Attenzione!

Per la delicatezza degli argomenti trattati,
le pagine che seguono richiedono un pubblico maturo

Il più grande mistero della Matematica

We may - paraphrasing the famous sentence of George Orwell - say that "all mathematics is beautiful, yet some is more beautiful than the other". But the most beautiful in all mathematics is the Zeta function. There is no doubt about it. (Krzysztof Maslanka)

La serie armonica

Sia

$$H(n) = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{n}$$

ricordando che

$$\frac{d}{dt} \ln t = \frac{1}{t}$$

vale (la dimostrazione non è immediata)

$$H(n) > \ln(n+1)$$

e quindi H(n) diverge, inoltre H(n) cresce proprio come ln n e vale il limite fondamentale

$$\lim_{n \to \infty} H(n) - \ln n = \gamma$$

dove

$$\gamma = 0.5772156649015328606065120900824024310421593359399235988...$$

è la costante di Eulero-Mascheroni (si congettura che sia irrazionale e addirittura trascendente ma nessuno lo ha ancora dimostrato).

Ancora sui numeri primi

Rivediamo la dimostrazione di Euclide che non esiste il massimo primo.

I numeri primi sono quei numeri che non possono essere scomposti in prodotto di fattori minori

A = {2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, ... 37,... 317, ...}.

Dimostriamo che esistono infiniti numeri primi e cioè che la successione A non termina mai.

Supponiamo che A abbia fine e che {2, 3, 5, …, p} rappresenti la successione completa dei numeri primi (per cui p risulta il massimo numero primo). Con questa ipotesi consideriamo il numero q definito dalla formula q = (2 3 5 … p) +1. E' evidente che q non è divisibile per nessuno dei numeri 2, 3, 5,…, p, perché il resto della divisione per ognuno di questi numeri sarà sempre 1. Ma, allora o q stesso è un numero primo, oppure esso è divisibile per qualche primo che supera tutti quelli di A. Questo contraddice l'ipotesi che non esista un numero primo maggiore di p, e perciò l'ipotesi che A abbia fine è falsa.

Dimostrazione di Eulero che i numeri primi sono infiniti

$$\lim_{n \to \infty} H(n) = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots =$$

$$= 1 + \sum_{1 \le i}^{\infty} \frac{1}{p_i} + \sum_{1 \le i \le j}^{\infty} \frac{1}{p_i p_j} + \sum_{1 \le i \le j \le k}^{\infty} \frac{1}{p_i p_j p_k} + \ldots =$$

$$= \left(1 + \frac{1}{p_1} + \frac{1}{p_1^2} + \ldots + \frac{1}{p_1^k} + \ldots\right)\left(1 + \frac{1}{p_2} + \frac{1}{p_2^2} + \ldots + \frac{1}{p_2^k} + \ldots\right) \ldots =$$

$$= \left[\sum_{j=0}^{\infty} \left(\frac{1}{p_1}\right)^j\right] \left[\sum_{j=0}^{\infty} \left(\frac{1}{p_2}\right)^j\right] \ldots \left[\sum_{j=0}^{\infty} \left(\frac{1}{p_k}\right)^j\right] \ldots =$$

$$= \frac{1}{1 - \frac{1}{p_1}} \frac{1}{1 - \frac{1}{p_2}} \ldots \frac{1}{1 - \frac{1}{p_k}} \ldots = \prod_{k=1}^{\infty} \frac{1}{1 - \frac{1}{p_k}} = \infty$$

Il primo termine diverge e i termini della produttoria sono tutti finiti (nel senso che sono numeri reali), quindi la produttoria finale deve contenere infiniti termini (nel senso che non sono in numero finito). NB si noti la leggera ambiguità linguisrtica.

Questa dimostrazione dice qualcosa di più rispetto a quella di Euclide. Tenendo presente che $H(n)$ va all'infinito come $\log n$ prendendo il logaritmo del primo e dell'ultimo termine della catena di uguaglianze si ha una espessione che Eulero scriveva come

$$\sum_{p \text{ primo}} \frac{1}{p} = \log(\log \infty)$$

e che può essere interpretata con maggiore precisione come

$$\sum_{p<x} \frac{1}{p} \approx \log(\log x)$$

formando il primo seme del Teorema dei numeri primi.

La distribuzione dei primi

La funzione π(x) rappresenta il numero di primi fino ad x, non esiste una formula chiusa semplice per π(x) ma ne esistono molte approssimazioni. Per esempio il Teorema dei numeri primi afferma che

$$\pi(x) \approx \frac{x}{\ln x}$$

(ovviamente questo non significa che la differenza tra i due termini vada a zero).

Il Teorema dei numeri primi fu congetturato da Gauss nel 1792 (a 15 anni!) e dimostrato oltre un secolo dopo (1896) da Hadamard e De la Vallée Poussin.

Gauss trovò una forma più precisa del teorema ovvero

$$\pi(x) \approx Li(x)$$

dove

$$Li(x) = \int_2^x \frac{u}{\ln u} du \approx \frac{x}{\ln x} + \frac{x}{(\ln x)^2} + \ldots + \frac{(k-1)!x}{(\ln x)^k} + \ldots$$

NB questo è uno sviluppo asintotico (bestia brutta e cattiva) in cui la serie non converge ma ogni troncamento finito con n termini è una approssimazione migliore di quelle con meno di n termini.

Il Crivello di Eratostene

Un algoritmo molto efficiente per il calcolo dei numeri primi è il Crivello di Eratostene. Vediamone un esempio (manuale) di funzionamento.

Si scrive dapprima una tabella con tutti i numeri da 2 a n (100 nel nostro caso):

	2	3	4	5	6	7	8	9	10
11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
31	32	33	34	35	36	37	38	39	40
41	42	43	44	45	46	47	48	49	50
51	52	53	54	55	56	57	58	59	60
61	62	63	64	65	66	67	68	69	70
71	72	73	74	75	76	77	78	79	80
81	82	83	84	85	86	87	88	89	90
91	92	93	94	95	96	97	98	99	100

Il numero 2 è primo, si cancellano quindi tutti i multipli di 2, a partire da 4.

	2	3	~~4~~	5	~~6~~	7	~~8~~	9	~~10~~
11	~~12~~	13	~~14~~	15	~~16~~	17	~~18~~	19	~~20~~
21	~~22~~	23	~~24~~	25	~~26~~	27	~~28~~	29	~~30~~
31	~~32~~	33	~~34~~	35	~~36~~	37	~~38~~	39	~~40~~
41	~~42~~	43	~~44~~	45	~~46~~	47	~~48~~	49	~~50~~
51	~~52~~	53	~~54~~	55	~~56~~	57	~~58~~	59	~~60~~
61	~~62~~	63	~~64~~	65	~~66~~	67	~~68~~	69	~~70~~
71	~~72~~	73	~~74~~	75	~~76~~	77	~~78~~	79	~~80~~
81	~~82~~	83	~~84~~	85	~~86~~	87	~~88~~	89	~~90~~
91	~~92~~	93	~~94~~	95	~~96~~	97	~~98~~	99	~~100~~

Il numero 3 risulta quindi primo e si cancellano tutti i suoi multipli a partire da 9 ($6 = 2 \times 3$ l'ho già cancellato perché pari).

	2	3	~~4~~	5	~~6~~	7	~~8~~	~~9~~	~~10~~
11	~~12~~	13	~~14~~	~~15~~	~~16~~	17	~~18~~	19	~~20~~
~~21~~	~~22~~	23	~~24~~	25	~~26~~	~~27~~	~~28~~	29	~~30~~
31	~~32~~	~~33~~	~~34~~	35	~~36~~	37	~~38~~	~~39~~	~~40~~
41	~~42~~	43	~~44~~	~~45~~	~~46~~	47	~~48~~	49	~~50~~
~~51~~	~~52~~	53	~~54~~	55	~~56~~	~~57~~	~~58~~	59	~~60~~
61	~~62~~	~~63~~	~~64~~	65	~~66~~	67	~~68~~	~~69~~	~~70~~
71	~~72~~	73	~~74~~	~~75~~	~~76~~	77	~~78~~	79	~~80~~
~~81~~	~~82~~	83	~~84~~	85	~~86~~	~~87~~	~~88~~	89	~~90~~
91	~~92~~	~~93~~	~~94~~	95	~~96~~	97	~~98~~	~~99~~	~~100~~

Il numero 5 risulta primo e si provvede a cancellare tutti i suoi multipli a partire da 25 (perché 10, 15 e 20 li ho già cancellati).

	2	3	~~4~~	5	~~6~~	7	~~8~~	~~9~~	~~10~~
11	~~12~~	13	~~14~~	~~15~~	~~16~~	17	~~18~~	19	~~20~~
~~21~~	~~22~~	23	~~24~~	~~25~~	~~26~~	~~27~~	~~28~~	29	~~30~~
31	~~32~~	~~33~~	~~34~~	35	~~36~~	37	~~38~~	~~39~~	~~40~~
41	~~42~~	43	~~44~~	~~45~~	~~46~~	47	~~48~~	49	~~50~~
~~51~~	~~52~~	53	~~54~~	55	~~56~~	~~57~~	~~58~~	59	~~60~~
61	~~62~~	~~63~~	~~64~~	65	~~66~~	67	~~68~~	~~69~~	~~70~~
71	~~72~~	73	~~74~~	~~75~~	~~76~~	77	~~78~~	79	~~80~~
~~81~~	~~82~~	83	~~84~~	85	~~86~~	~~87~~	~~88~~	89	~~90~~
91	~~92~~	~~93~~	~~94~~	95	~~96~~	97	~~98~~	~~99~~	~~100~~

Il 7 è primo e si cancellano tutti i suoi multipli a partire da 49.

	2	3	~~4~~	5	~~6~~	7	~~8~~	~~9~~	~~10~~
11	~~12~~	13	~~14~~	~~15~~	~~16~~	17	~~18~~	19	~~20~~
~~21~~	~~22~~	23	~~24~~	~~25~~	~~26~~	~~27~~	~~28~~	29	~~30~~
31	~~32~~	~~33~~	~~34~~	35	~~36~~	37	~~38~~	~~39~~	~~40~~
41	~~42~~	43	~~44~~	~~45~~	~~46~~	47	~~48~~	~~49~~	~~50~~
~~51~~	~~52~~	53	~~54~~	55	~~56~~	~~57~~	~~58~~	59	~~60~~
61	~~62~~	~~63~~	~~64~~	65	~~66~~	67	~~68~~	~~69~~	~~70~~
71	~~72~~	73	~~74~~	~~75~~	~~76~~	~~77~~	~~78~~	79	~~80~~
~~81~~	~~82~~	83	~~84~~	85	~~86~~	~~87~~	~~88~~	89	~~90~~
~~91~~	~~92~~	~~93~~	~~94~~	95	~~96~~	97	~~98~~	~~99~~	~~100~~

Infine, poiché 11×11 è maggiore di 100, abbiamo finito e i sopravvissuti

2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, 31, 37, 41, 43, 47, 53, 59, 61, 67, 71, 73, 79, 83, 89, 97

sono i numeri primi minori di 100.

La funzione Zeta di Riemann

Definizione

$$\zeta(s)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^s},\quad \mathrm{Re}(s)>1 \qquad (1)$$

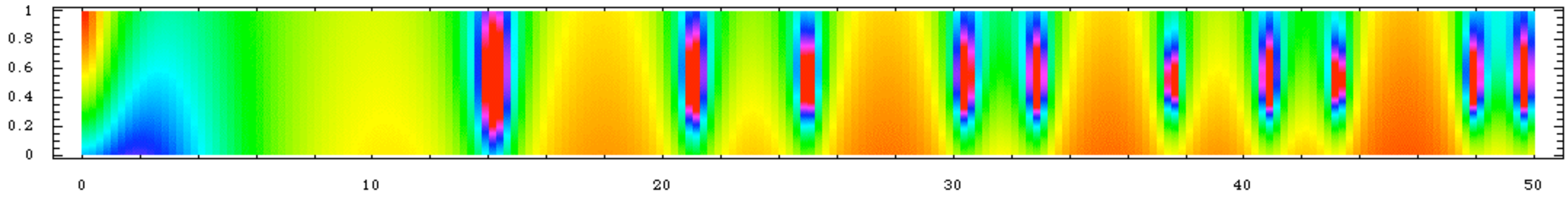
Per $\mathrm{Re}(s) \leq 1$, la serie diverge, per $\mathrm{Re}(s) > 1$, $\zeta(s)$ è una funzione analitica. $\zeta(s)$ può essere estesa per continuazione analitica ad una funzione meromorfica definita su tutto il piano complesso con l'eccezione di $s=1$ dove $\zeta(1)$ coincide con il limite della serie armonica e ha un polo con residuo 1.

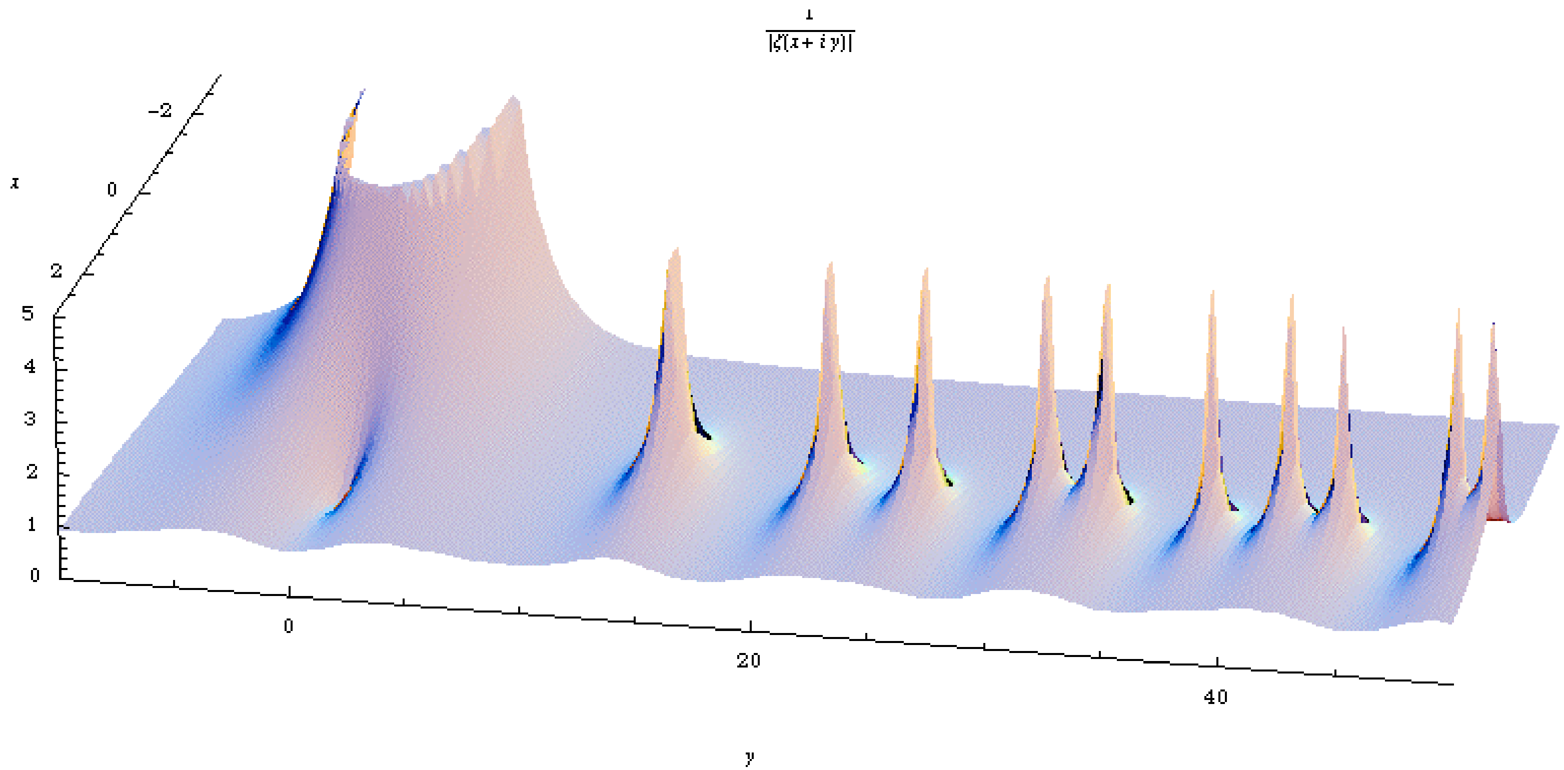
Attenzione se $\mathrm{Re}(s) \leq 1$ la $\zeta(s)$ non è più data dalla serie (1) ma, per esempio, da un'opportuna serie di Laurent (γ è la costante di Eulero-Mascheroni, gli altri γ_n le costanti di Stieltjes).

$$\zeta(s)=\frac{1}{s-1}+\gamma+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n!}\gamma_n(s-1)^n$$

$\zeta(s)$ si annulla per $s = -2, -4, \ldots, -2n$, questi sono detti zeri banali.

Si dimostra che tutti gli altri zeri (non banali) sono nella striscia $0 < \mathrm{Re}(s) < 1$. In particolare vi sono infiniti zeri sulla linea critica $\mathrm{Re}(s)=1/2$.





Eulero aveva studiato la sommatoria (1) un secolo prima di Riemann e aveva notato una importante connessione tra questa funzione e la sequenza dei numeri primi.

$$\zeta(s) = \prod_{p \text{ primo}} \frac{1}{1-p^{-s}}, \quad \mathrm{Re}(s) > 1$$

Dimostrazione

$$\prod_{k=1}^{\infty} \frac{1}{1-p_k^{-s}} = \frac{1}{1-p_1^{-s}} \frac{1}{1-p_2^{-s}} \cdots \frac{1}{1-p_k^{-s}} \cdots =$$

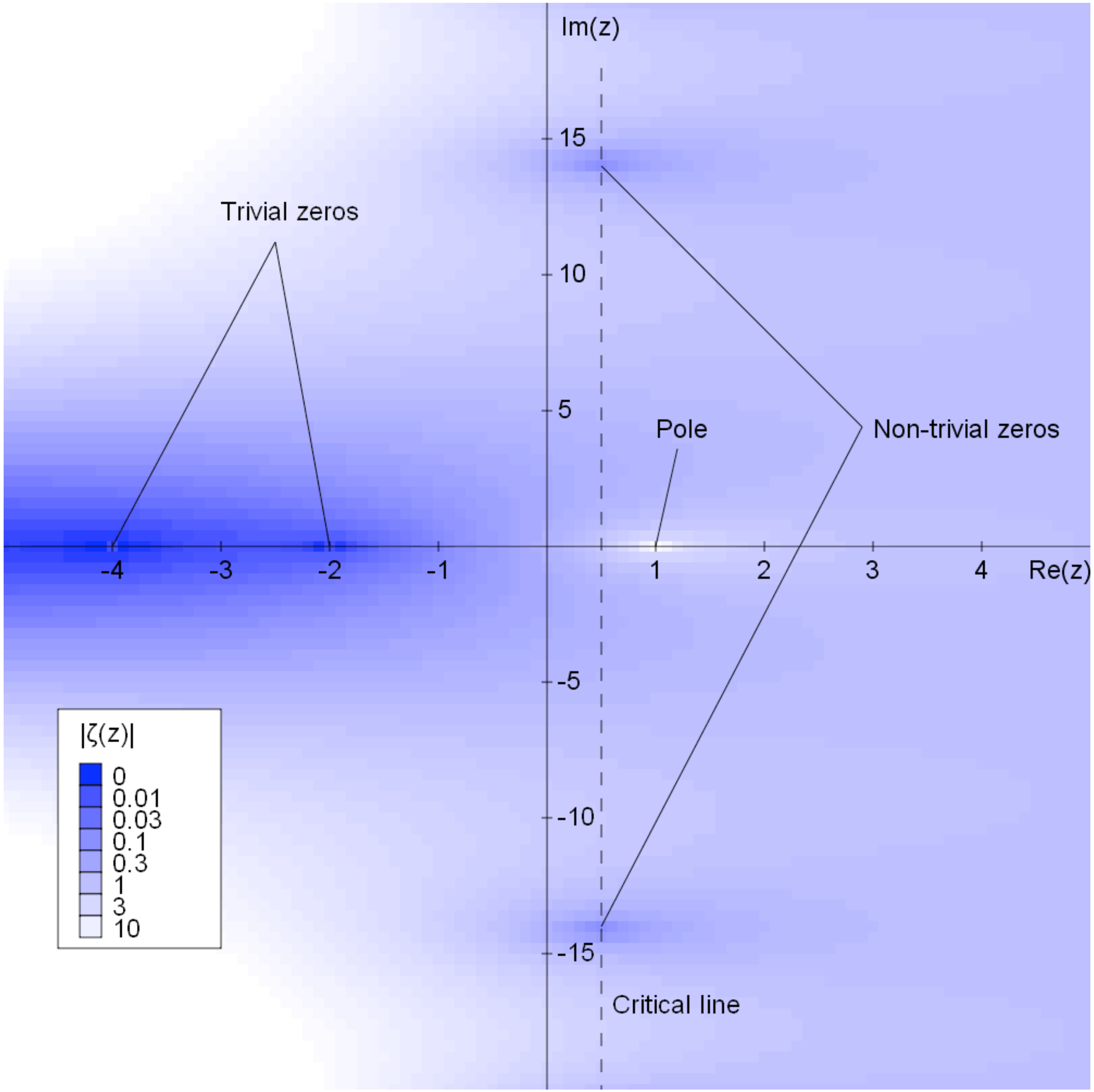
$$= \left[\sum_{j=0}^{\infty} p_1^{-sj}\right]\left[\sum_{j=0}^{\infty} p_2^{-sj}\right] \cdots \left[\sum_{j=0}^{\infty} p_k^{-sj}\right] \cdots =$$

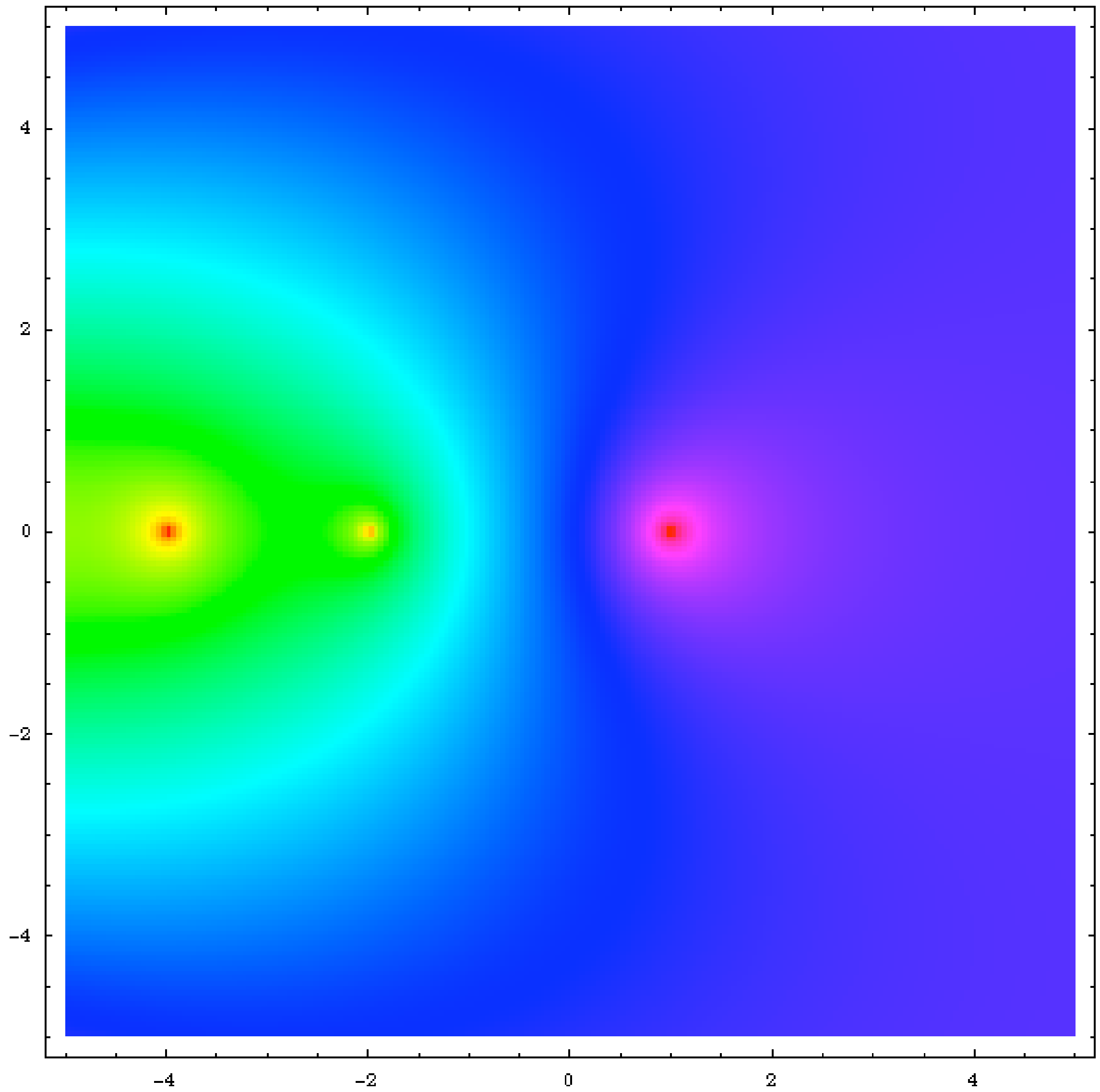
$$= \left(1 + \frac{1}{p_1^s} + \frac{1}{p_1^{2s}} + \ldots + \frac{1}{p_1^{ks}} + \ldots\right)\left(1 + \frac{1}{p_2^s} + \frac{1}{p_2^{2s}} + \ldots + \frac{1}{p_2^{ks}} + \ldots\right) \cdots =$$

$$= 1 + \sum_{1 \le i}^{\infty} \frac{1}{p_i^s} + \sum_{1 \le i \le j}^{\infty} \frac{1}{p_i^s p_j^s} + \ldots + \sum_{1 \le i \le j \le k}^{\infty} \frac{1}{p_i^s p_j^s p_k^s} + \ldots =$$

$$= 1 + \frac{1}{2^s} + \frac{1}{3^s} + \ldots \frac{1}{k^s} + \ldots = \zeta(s)$$

Qualche altro grafico della $\zeta(s)$




4
2
0
-2
-4
-4
-2
0
2
4

Ipotesi di Riemann

Tutti gli zeri non banali sono sulla linea critica.

Non è stata dimostrata ma risulta verificata per i primi 10.000 miliardi di zeri.

È il problema aperto più importante della matematica, ha infiniti legami con la teoria dei numeri (in particolare con la distribuzione dei primi), con la fisica quantistica, con la teoria della relatività, con problemi di algoritmica statistica, di crittografia, ecc.

Per dimostrarla falsa, basterebbe trovare uno zero non banale fuori dalla linea critica $\frac{1}{2} + i\,t$.

Il calcolo degli zeri della funzione di Riemann sulla linea critica

Year	n	Author
1903	15	J. P. Gram [6]
1914	79	R. J. Backlund [1]
1925	138	J. I. Hutchinson [7]
1935	1,041	E. C. Titchmarsh [22]
1953	1,104	A. M. Turing [24]
1956	15,000	D. H. Lehmer [12]
1956	25,000	D. H. Lehmer [11]
1958	35,337	N. A. Meller [14]
1966	250,000	R. S. Lehman [10]
1968	3,500,000	J. B. Rosser, J. M. Yohe, L. Schoenfeld [21]
1977	40,000,000	R. P. Brent [2]
1979	81,000,001	R. P. Brent [3]
1982	200,000,001	R. P. Brent, J. van de Lune, H. J. J. te Riele, D. T. Winter [25]
1983	300,000,001	J. van de Lune, H. J. J. te Riele [8]
1986	1,500,000,001	J. van de Lune, H. J. J. te Riele, D. T. Winter [9]
2001	10,000,000,000	J. van de Lune (unpublished)
2004	900,000,000,000	S. Wedeniwski [26]
2004	10,000,000,000,000	X. Gourdon and Patrick Demichel [5]

Tabella dei record

La cosa importante non è tanto calcolare molti zeri sulla linea critica quanto dimostrare che non ve ne sono altri. Per fare questo lo schema classico del calcolo, sino dai tempi di Turing (pur con infinite varianti) è organizzato come segue.

Si imposta un algoritmo per il calcolo della funzione Z(t) (la funzione di Riemann-Siegel) che è reale, analitica e per cui vale

$$\left|Z(t)\right| = \left|\zeta(\frac{1}{2}+it)\right|, t \text{ reale}$$

Si calcola il numero di zeri N(T) di ζ(x+iy) nel rettangolo $-1 < x < 2$, $-iT < i\,y < iT$, per esempio con l'integrale chiuso sui bordi del rettangolo R.

$$N(t)-1 = \frac{1}{2\pi i}\int_{\partial R}\frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)}ds$$

Poiché Z(t) è pari, si cercano esattamente N(T)/2 intervalli di separazione di Z(t) tra 0 e T, se si ha successo l'ipotesi è verificata fino a T.

Ancora sulla distribuzione dei primi

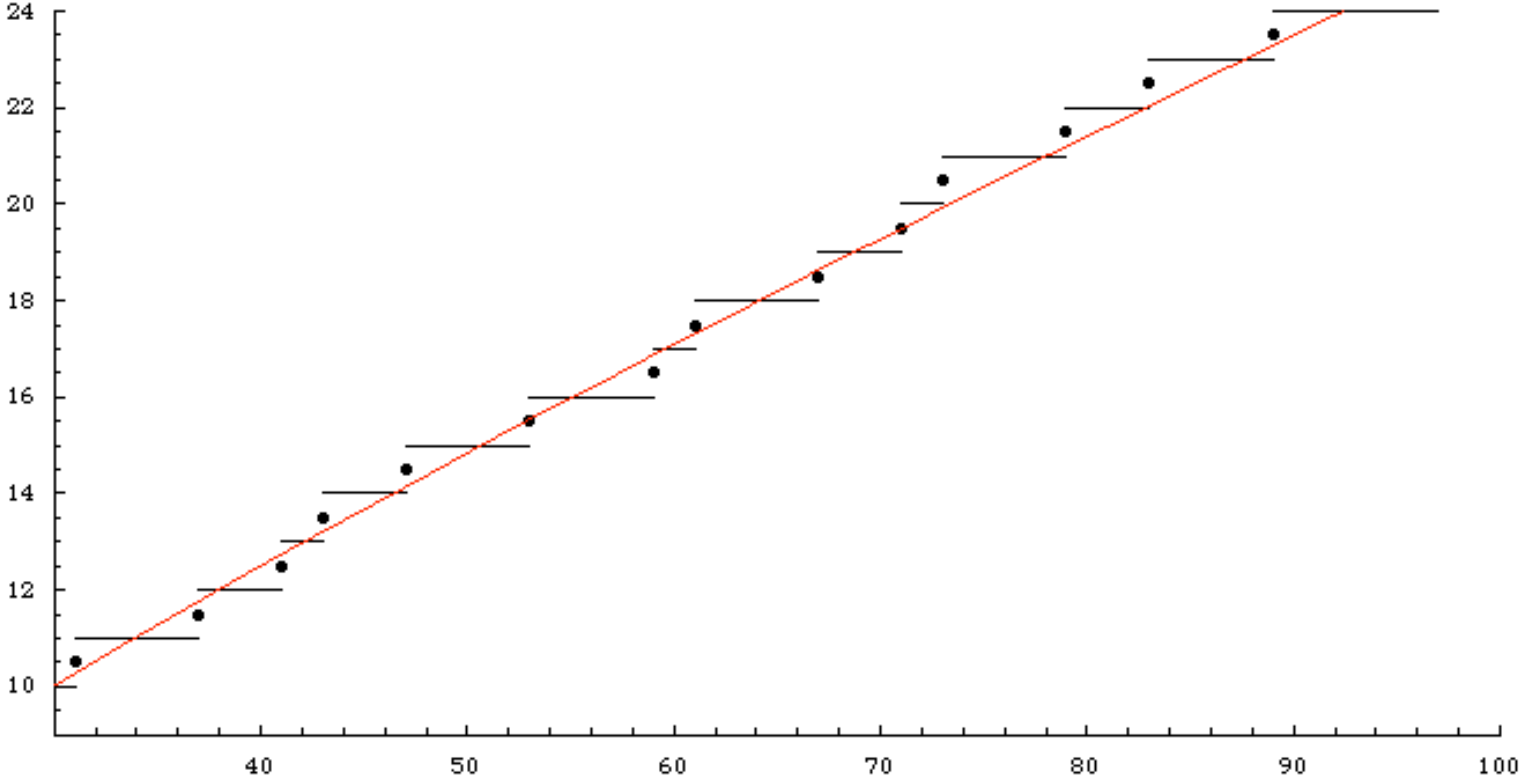
Si dimostra che la seguente relazione è equivalente alla Ipotesi di Riemann

$$\pi(x) = Li(x) + O\left(\sqrt{x}\ln x\right)$$

Ancora più accurata di Li(x) è la Formula di Riemann per la distribuzione dei primi ottenuta usando valori della funzione Zeta

$$R(x) = 1 + \sum_{m=1}^{\infty} \frac{(\log x)^m}{m!\, m\, \zeta(m+1)}$$

Questa approssimazione (in rosso) è una funzione continua e monotona crescente



Approssimazione a $\pi(x)$ con la formula di Riemann .

Purtroppo,come si vede anche dalla figura, la $\pi(x)$ è invece una funzione discontinua costante a tratti.

Esiste una approssimazione molto più sofisticata che fa entrare in gioco gli infiniti zeri non banali che la ζ(x) possiede sulla linea critica x = 1/2 + i t.

Formula di Riemann-Mangoldt per la distribuzione dei primi

$$\pi_0(x) = \sum_{n \geq 1} \frac{\mu(n)}{n} f\left(x^{1/n}\right)$$

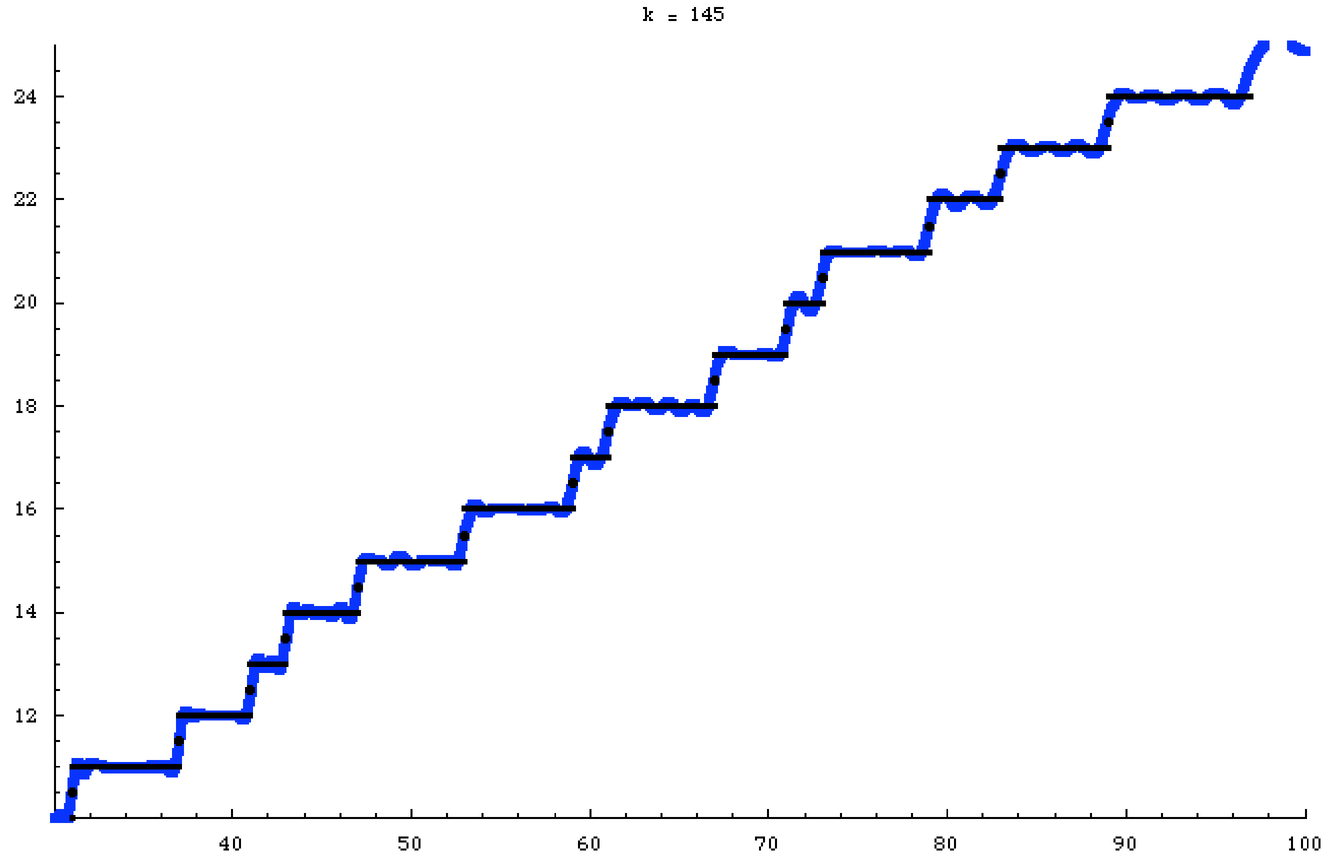
$$f(x) = \mathrm{li}(x) - \sum_{\varsigma(\rho)=0} \mathrm{ei}(\rho \log x) - \log 2 + \int_x^{\infty} \frac{dt}{t(t^2-1)\log t}$$

ovvero, con pochi semplici passaggi

$$\pi_0(x) = \sum_{n=1}^{\log_2 x} \frac{\mu(n)}{n} \left[\mathrm{li}\left(x^{1/n}\right) - \log 2 + \int_{x^{1/n}}^{\infty} \frac{dt}{t(t^2-1)\log t} \right] +$$

$$-2 \sum_{\substack{\varsigma(\rho)=0 \\ \mathrm{Im}(\rho)>0}} \sum_{n=1}^{\log_2 x} \frac{\mu(n)}{n} \mathrm{Re}\left(\mathrm{ei}\left(\frac{\rho}{n} \log x\right)\right)$$

Questa formula insieme ad un buon programma di calcolo numerico e simbolico (io ho usato *Mathematica*), permette di generare una bellissima animazione che evidenzia l'influenza della collocazione degli zeri della $\zeta(x)$ sulla distribuzione dei primi.



Approssimazione di Riemann-Mangoldt a $\pi(x)$ ottenuta con 145 zeri della funzione Zeta

Bibliografia

La Bibliografia sulla Zeta di Riemann è sterminata e la sua lettura richiede profonde conoscenze di analisi complessa.

Qui ci limitatiamo a citare il testo storico-divulgativo

M. du Sautoy, L'enigma dei numeri primi. BUR saggi, 2005

e alcuni link di internet

mathworld.wolfram.com/RiemannZetaFunction.html
mathworld.wolfram.com/PrimeNumberTheorem.html
mathworld.wolfram.com/RiemannHypothesis.html

en.wikipedia.org/wiki/Prime_number_theorem
en.wikipedia.org/wiki/Riemann_hypothesis
en.wikipedia.org/wiki/Prime_counting_function
en.wikipedia.org/wiki/Riemann_zeta_function

web.mala.bc.ca/pughg/RiemannZeta/RiemannZetaLong.html
numbers.computation.free.fr/Constants/Miscellaneous/zetazeroscompute.html