LA TRASFORMATA DI FOURIER, PROPRIETA' ED ESEMPI

Trasformata di Fourier

L'operatore che consente di ottenere la risposta in frequenza *H(f)* a partire dalla risposta all'impulso del sistema *h(t),* viene detto **trasformata di Fourier.**

La trasformata di Fourier puo' essere calcolata per un generico segnale *x(t)*, non solo per la risposta all'impulso di un sistema LTI:

$$X(f) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) \exp\{-j2\pi ft\} dt$$

L'operatore che consente di riottenere il segnale *x(t)* a partire dalla sua trasformata di Fourier *X(f)* viene detto **trasformata inversa di Fourier:**

$$x(t) = \int_{-\infty}^{\infty} X(f) \exp\{j2\pi ft\} df$$

Si noti che la trasformata di Fourier e la sua inversa sono uguali, a parte il segno dell'esponente.

Trasformata di Fourier: notazioni

trasformata di Fourier

$$X(f) = \begin{cases} \Im[x(t)] \\ TDF[x(t)] \\ FT[x(t)] \end{cases}$$

trasformata inversa di Fourier

$$x(t) = \begin{cases} \Im^{-1}[X(f)] \\ TDFI[X(f)] \\ IFT[X(f)] \end{cases}$$

Si dice anche che *x(t)* e *X(f)* sono una coppia per la trasformata di Fourier **:**

$$x(t) \leftrightarrow X(f)$$

$$x(t) \xrightarrow{\text{TDF}} X(f)$$

Proprieta' della TDF (1)

1 **LINEARITA'**: la TDF della combinazione lineare (somma pesata) di due segnali e' uguale alla combinazione lineare delle TDF dei due segnali.

$$a_1 x_1(t) + a_2 x_2(t) \xrightarrow{\text{TDF}} a_1 X_1(f) + a_2 X_2(f)$$

2 **SIMMETRIA**:

$$x(-t) \xrightarrow{\text{TDF}} X(-f)$$

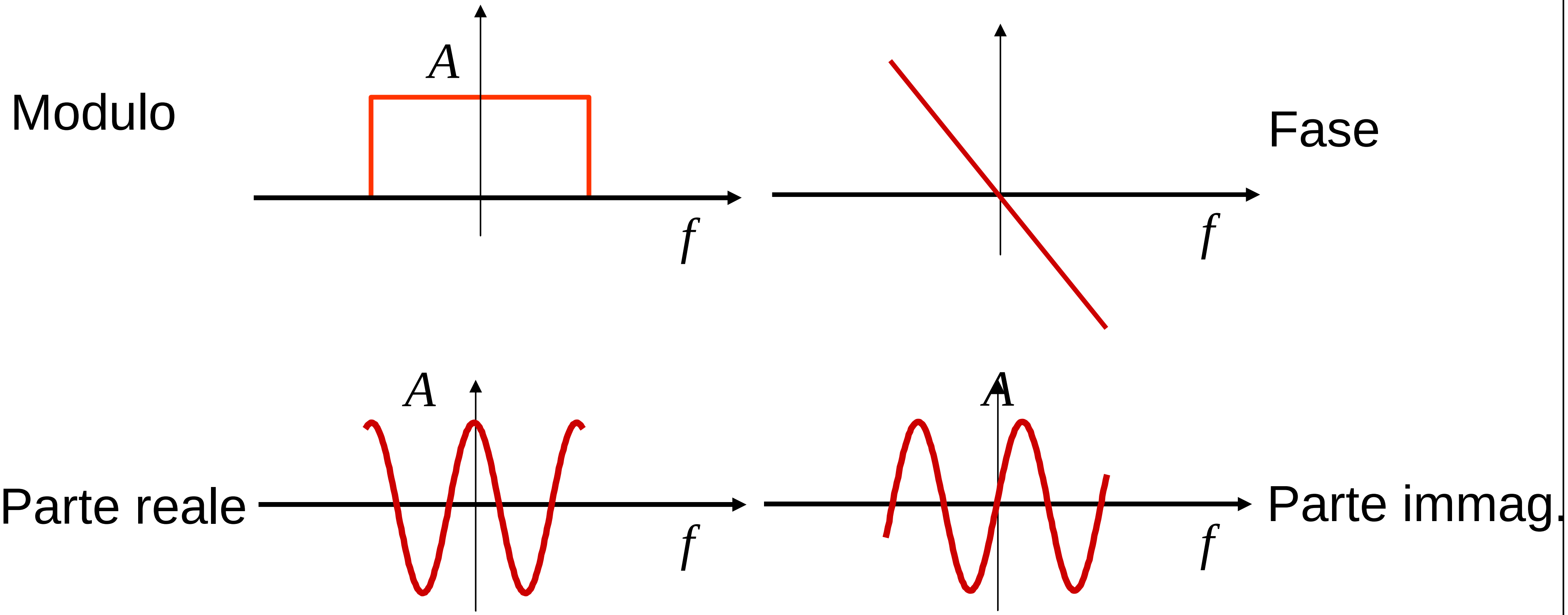
$$x^*(t) \xrightarrow{\text{TDF}} X^*(-f)$$

conseguenze: la TDF di una segnale reale gode di simmetria complessa coniugata. La parte reale e il modulo sono simmetrici rispetto all'origine (sono "pari"), la parte immaginaria e la fase sono antisimmetriche rispetto all'origine (sono "dispari").

$$x(t) \quad \text{reale} \xrightarrow{\text{TDF}} X(-f) = X^*(f)$$

Proprieta' della TDF (2)

TDF di una segnale reale



Casi particolari

$x(t)$ reale pari → TDF → $X(f)$ reale pari

$x(t)$ reale dispari → TDF → $X(f)$ immaginario dispari

Proprieta' della TDF (3)

3 **Valori nell'origine**: la TDF in *f=0* e' uguale all'integrale del segnale nei tempi. Il segnale in *t=0* e' uguale all'integrale della TDF nelle frequenze.

$$X(0) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)dt; \qquad x(0) = \int_{-\infty}^{\infty} X(f)df;$$

4 **Dualita'**: dato il segnale *x(t)* e la sua TDF *X(f)*, vale la seguente relazione duale:

$$X(-t) \xrightarrow{\text{TDF}} x(f)$$

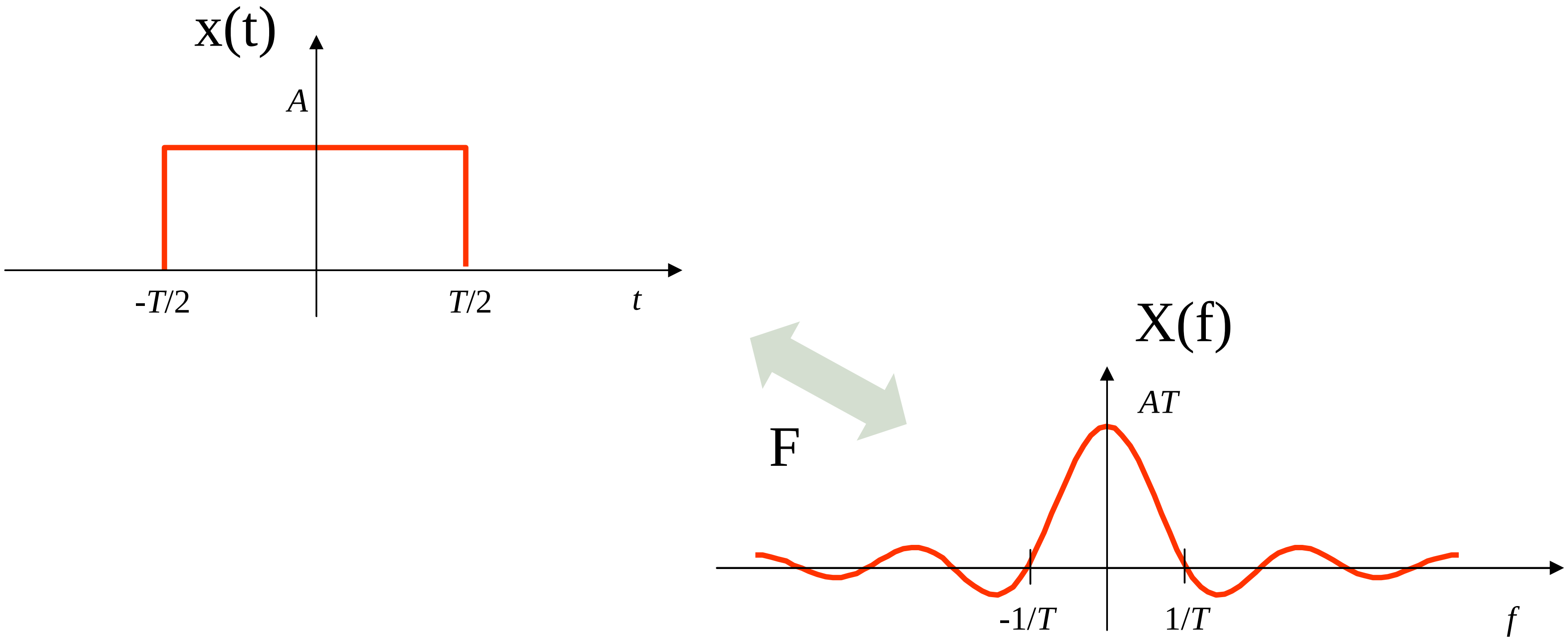
5 **Scalatura**:

$$x(at) \xrightarrow{\text{TDF}} \frac{1}{|a|} X\left(\frac{f}{a}\right)$$

Caso particolare, a=-1: $x(-t) \xrightarrow{\text{TDF}} X(-f)$

Esempi di trasformata di Fourier (il rettangolo)

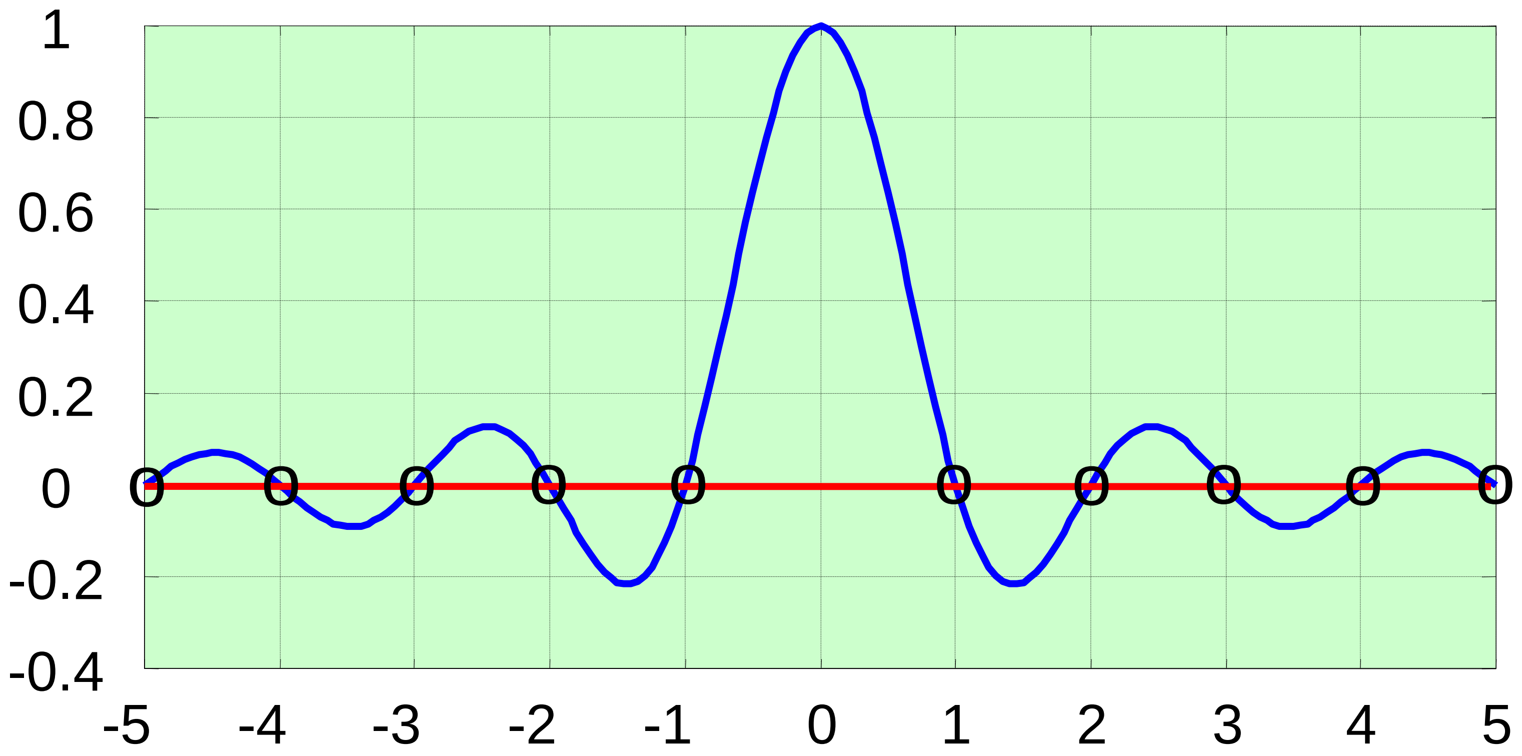
$$x(t) = \boxed{A\, rect\left(\frac{t}{T}\right)} \quad \Leftrightarrow \quad X(f) = A\int_{-T/2}^{T/2} \exp(-j2\pi ft)\,dt = AT\,\frac{\sin \pi fT}{\pi fT} = \boxed{AT \operatorname{sinc}(Tf)}$$



Seno cardinale

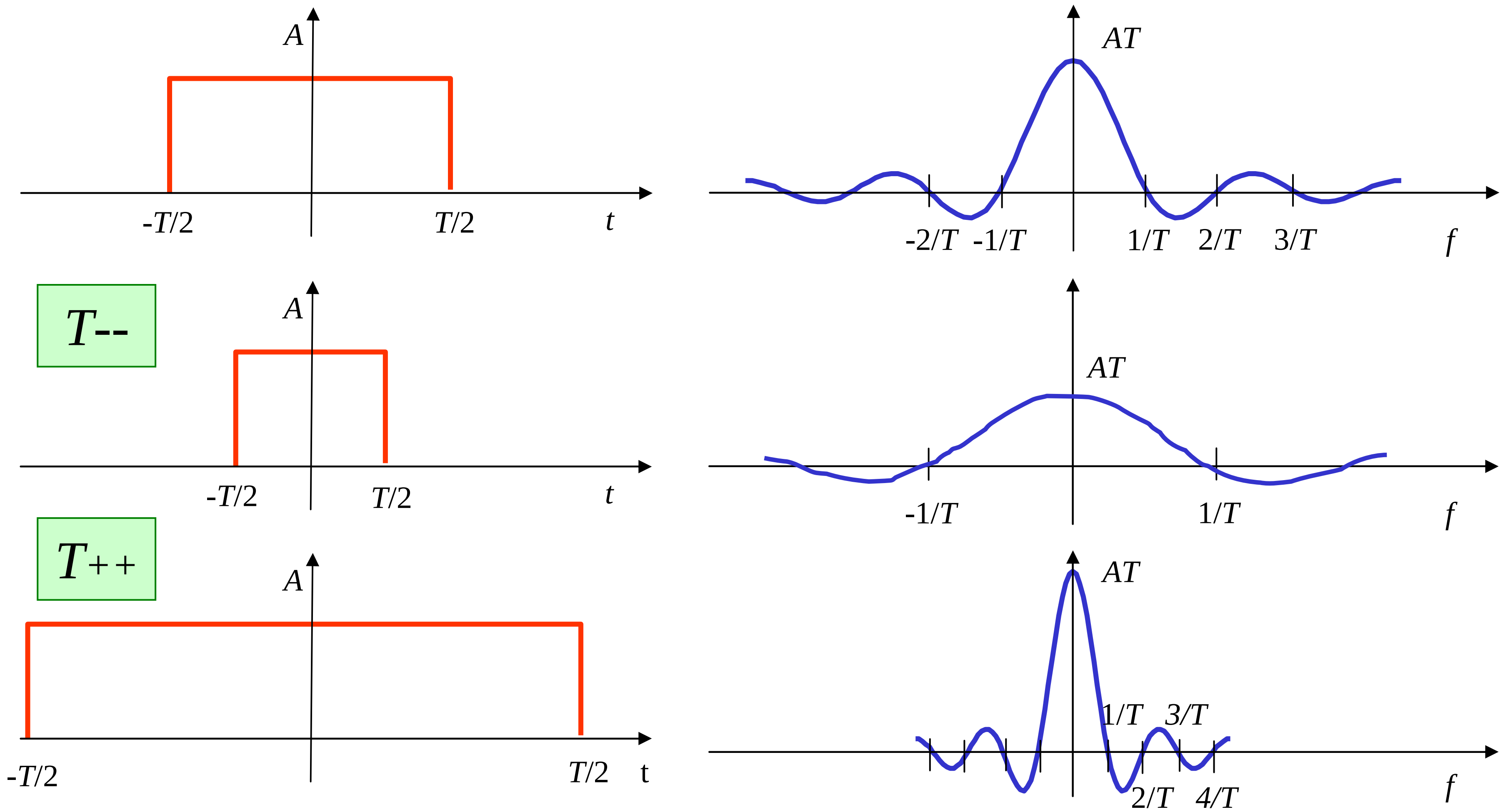
$$\mathrm{sinc}(f) = \frac{\sin \pi f}{\pi f}$$

Si annulla per tutti i valori interi di f tranne nell'origine, dove ha valore unitario



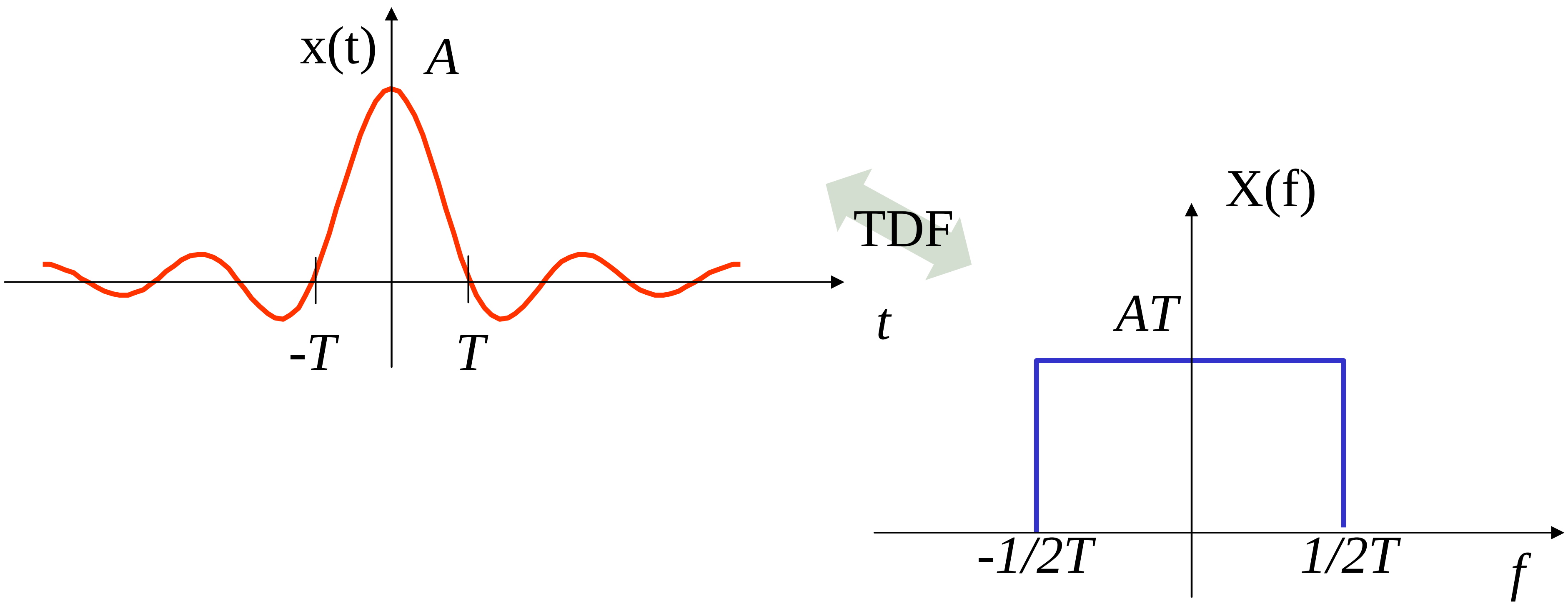
Scalatura del rettangolo

$$x(t) = A\ rect\left(\frac{t}{T}\right) \quad \Leftrightarrow \quad X(f) = AT\,\mathrm{sinc}(Tf)$$



Esempi di trasformata di Fourier (il sinc)

$$x(t) = A\,sinc\left(\frac{t}{T}\right) \quad \Leftrightarrow \quad X(f) = AT\,rect(fT)$$



Proprieta' della TDF (4)

6 **Traslazione nei tempi**: la TDF del segnale ritardato e' uguale a quella del segnale originale moltiplicata per un esponenziale complesso

$$x(t-t_0) \xrightarrow{\text{TDF}} e^{-j2\pi f t_0} X(f)$$

7 **Traslazione nelle frequenze**: traslare in frequenza la TDF del segnale equivale a moltiplicare il segnale nei tempi per un esponenziale complesso

$$x(t)\, e^{j2\pi f_0 t} \xrightarrow{\text{TDF}} X(f- f_0)$$

8 **Derivazione nei tempi**: la TDF del segnale derivato nel tempo e' uguale a quella del segnale originale moltiplicata per $j2\pi f$:

$$\boxed{\frac{dx(t)}{dt}} \xrightarrow{\text{TDF}} \boxed{j2\pi f\ X(f)}$$