

La rappresentazione dei numeri e le operazioni

Ornella Menchi

Dipartimento di Informatica

Evoluzione?

- Quando ci confrontiamo con il passato siamo portati a pensare che ogni evoluzione nel tempo sia anche un'evoluzione di funzionalità. In questo giocano un ruolo non trascurabile:
- la teoria dell'evoluzione, che colloca l'uomo in una posizione preminente rispetto alle forme di vita che si sono via via evolute,
- la storia che si studia a scuola che ci insegna che, a parte qualche deplorabile evento, vi è stato un graduale miglioramento nelle condizioni di vita dell'uomo.
- Ciononostante vi è la sensazione che non sempre, o per lo meno non in tutti i campi, si possa trarre la conclusione che quanto viene dopo sia un miglioramento rispetto a quanto c'era prima. Consideriamo come esempio, i grandi scrittori del passato: Omero, Dante, Shakespeare hanno scritto capolavori insuperabili.

- Per quanto riguarda la matematica, vi è l'idea che tutta la costruzione teorica che si è venuta a formare nei secoli ne abbia migliorato progressivamente la funzionalità, nel senso che oggi siamo in grado di risolvere molti più problemi di quelli che venivano risolti un tempo.
- Problemi come mandare un razzo su Marte o fare una previsione metereologica (che richiedono di risolvere complicati sistemi di equazioni differenziali) sono poi più importanti che costruire case e strade (che i romani facevano con molto acume e solo un po' di aritmetica)?

- Lo sviluppo della matematica può essere visto come un meccanismo che si autogenera: ogni nuova idea matematica genera nuove teorie e quindi nuovi problemi, per risolvere i quali si devono sviluppare nuove idee matematiche, e così via.
- I matematici sono sempre stati molto abili nel convincere tutto il mondo scientifico (e non) che l'evoluzione della matematica era un fatto positivo e che la conoscenza della matematica era necessaria per far progredire tutte le scienze, con un'evidente ricaduta positiva anche dal punto di vista pratico.

- Nello sviluppo della matematica un ruolo fondamentale è stato svolto dalla rappresentazione dei numeri. In generale i numeri sono stati rappresentati con combinazioni di cifre espresse in opportune basi.
- La base 10 ha avuto alla fine il sopravvento sulle altre basi perché era quella usata dai romani, che per alcuni secoli dominarono militarmente ed economicamente il mondo occidentale. Era un sistema facile da comprendere, che faceva uso di pochissimi simboli e per il quale erano stati inventati efficaci algoritmi di calcolo su abaco.
- Oltre alla base, l'elemento caratterizzante della rappresentazione è la regola che indica come le diverse cifre concorrono alla formazione del numero. Due sono le regole che si sono affermate: la notazione additiva e la notazione posizionale.

La notazione

- La scrittura dei numeri e le operazioni su di essi costituiscono il nucleo essenziale dell'aritmetica che oggi si basa sulla notazione posizionale.
- L'evoluzione di questa parte si può considerare conclusa con la pubblicazione della *Summa de arithmetica, geometria, . . .* di Luca Pacioli nel 1494 (dopo l'unica aggiunta veramente importante è stata l'introduzione della notazione decimale per i numerici frazionari).
- Si trova scritto sui libri che la notazione posizionale dei numeri e la conseguente strutturazione delle operazioni ha fornito alla matematica quel salto di qualità che le ha consentito di progredire fino ad oggi.
- Ma davvero la notazione posizionale è così superiore, ad esempio, a quella additiva usata dai romani? Se noi dovessimo fare ancora le operazioni a mano (e non con il calcolatore) una notazione additiva sarebbe un ostacolo insormontabile?

Il sistema mesopotamico

- Le tavolette di argilla rinvenute testimoniano dell'alto livello di conoscenze matematiche dei babilonesi.
- Usavano la base 60, che era molto più sofisticata e consentiva una parziale notazione posizionale, più adatta per il calcolo tecnico e scientifico. Per questo fu utilizzata per secoli dagli scienziati (ad esempio Tolomeo). È stata acquisita nelle nostre misure del tempo e degli angoli.
- Già dal 2000 a.C. possedevano le tabelle dei quadrati, dei cubi e dei reciproci degli interi, con cui calcolavano moltiplicazioni, divisioni fra interi ed estrazione di radici quadrate e risolvevano alcune equazioni di secondo e terzo grado.

- Le rappresentazioni di numeri sono molto frequenti nei documenti egizi: gli scribi avevano una vera passione nell'elencare, ad esempio, nelle molte iscrizioni che celebravano le spedizioni vittoriose dei sovrani, il numero dei prigionieri catturati e dei capi di bestiame raziati.
- Fra i documenti pervenutici è estremamente importante il papiro di Rhind, dal nome dell'antiquario scozzese, Henry Rhind, che lo acquistò nel 1858. Fu compilato da uno scriba di nome Ahmes attorno al 1660 a.C. e contiene le soluzioni di 85 problemi matematici ricorrenti nella vita quotidiana degli uomini d'affari, degli agrimensori, dei costruttori.

Il sistema egizio

- Il sistema egizio è a base 10. Le cifre delle unità sono rappresentate da tratti verticali, le cifre delle decine da delle U rovesciate, le cifre delle centinaia da spirali e così via fino al milione, rappresentato con una figura inginocchiata, forse il dio dell'infinito.
- Gli egizi usavano soprattutto l'addizione e la moltiplicazione per due, con cui eseguivano moltiplicazioni e le divisioni fra interi.
- Erano inoltre capaci di rappresentare particolari tipi di frazioni e di operare su di esse. Le frazioni utilizzate erano principalmente quelle unitarie, cioè aventi come numeratore l'unità, e la frazione $2/3$.

Il sistema greco

- Nel primo millennio a.C. la Grecia era politicamente divisa in diversi stati indipendenti, ciascuno con propria moneta, propria amministrazione e proprio sistema numerico. Si possono comunque individuare due sistemi numerici, che facevano entrambi uso di cifre rappresentate con lettere dell'alfabeto (uso mutuato da quello fenicio).
- I diversi sistemi numerici confluirono nel sistema ionico che utilizzava 27 lettere:

1 : α 2 : β 3 : γ 4 : δ 5 : ϵ 6 : ς 7 : ζ 8 : η 9 : θ
10 : ι 20 : κ 30 : λ 40 : μ 50 : ν 60 : ξ 70 : \omicron 80 : π
90 : υ 100 : ρ 200 : σ 300 : τ 400 : υ 500 : φ 600 : χ
700 : ψ 800 : ω 900 : λ

Per gli altri numeri fino a 999 si usava la giustapposizione: ad esempio, il numero 123 si scriveva come $\rho\kappa\gamma$.

Il sistema romano

- Le cifre romane, malgrado la loro apparenza, non hanno origine alfabetica, ma sono una stilizzazione delle tacche usate nella pratica dell'intaglio per contare. Solo in seguito a successive trasformazioni, i simboli assunsero l'aspetto delle lettere dell'alfabeto.

simboli arcaici		∨	×	┌-	⊂	⊃	⊂⊃
simboli classici	I	V	X	L	C	D	M
valore	1	5	10	50	100	500	1000

Il sistema romano

- Sovrapponendo una linea sopra ad un simbolo, lo si moltiplicava per 1000. Così \overline{V} valeva 5000 e \overline{C} valeva 100000. Con due linee sovrapposte si moltiplicavano i simboli per un milione.
- La notazione romana è a legge additiva in cui si usano le cifre più grandi possibili, che vengono scritte da sinistra a destra in ordine decrescente.
- Per evitare la scrittura di lunghe successioni di simboli, in certi casi viene utilizzata anche la notazione sottrattiva: una cifra che stia immediatamente a sinistra di un'altra che indica un numero maggiore va intesa in senso sottrattivo.
- Nei documenti ufficiali la notazione sottrattiva è apparsa piuttosto tardi ed è diventata di routine solo nel medioevo.

Le frazioni romane

- Non si trovano rappresentazioni di frazioni, ma dai testi risulta che i romani avevano i nomi delle frazioni, espresse rispetto a denominatori in diverse basi.
- La base fondamentale era 12, detta *as*. La dodicesima parte di un *as* era detta *uncia*. Così $5/12$ era *quinque unciae*, abbreviato in *quincunx* e $1/24$ era *semeuncia*.
- Con opportune combinazioni delle frazioni si poteva esprimere praticamente qualsiasi quantità frazionaria.
- Anche se non scritte esplicitamente, le frazioni erano certamente usate nei conti.

Il sistema indo-arabico

- Inizialmente vennero usati dei semplici trattini verticali, disposti a gruppi. Poi vennero introdotti nuovi simboli per indicare quattro, dieci, venti e cento. Successivamente vennero definiti i caratteri brahmi, che presentavano un'analogia con le cifre del sistema ionico dei greci.
- Seguì il riconoscimento che, attraverso l'uso del principio posizionale, le cifre indicanti le prime nove unità sono sufficienti per descrivere anche i corrispondenti multipli di dieci e ogni sua potenza. Non si sa quando sia avvenuta la riduzione a nove cifre; è probabile che tale transizione sia avvenuta in modo graduale.
- Va notato che il riferimento a nove cifre, anziché a dieci, implica che gli indiani non avevano ancora fatto il secondo passo verso il sistema moderno di numerazione, ossia l'introduzione di un simbolo per lo zero.

Il sistema indo-arabico

- Il primo libro in cui comparve la notazione posizionale con l'uso dello zero è il *Brahmasphuta Siddhanta*, scritto dal matematico indiano Brahmagupta, vissuto fra il 598 e il 668. Vi si descrive un sistema che fa uso di nove cifre, da 1 fino a 9, e di un simbolo, lo 0, che indica la posizione vuota.
- È possibile che lo zero abbia avuto origine nel mondo greco (inventato nei circoli neopitagorici greci di Alessandria) e sia stato trasmesso all'India dopo che vi si era consolidato il sistema posizionale decimale.
- La notazione indiana passa nel mondo islamico ed è documentata già nel 662 a Damasco.

L'introduzione del sistema indo-arabico in Europa

- È legata essenzialmente a due nomi:
- Mohammed ibn-Musa al-Khuwarizmi (790-850), matematico e astronomo vissuto a Baghdad, la cui opera più importante al-kitab al-mukhtasar fi hisab al-jabr wa'l-muqabalah ha fornito alle lingue moderne un termine d'uso popolare: algebra. Oltre a questa, egli scrisse un'opera di aritmetica di cui ci è pervenuta soltanto la traduzione latina recante il titolo *De numero indorum*, che descrive in modo completo il sistema di numerazione indiano.
- Leonardo Pisano (1170-1250), detto Fibonacci (abbreviazione di filius Bonacci), che per seguire il padre nei suoi impegni, aveva viaggiato in Egitto, Siria, Grecia e Algeria, dove era venuto a contatto con i metodi algebrici arabi.

Fibonacci (1170 – 1250)

- La rappresentazione posizionale dei numeri richiede l'uso di un carattere speciale per lo zero. Già i babilonesi avevano introdotto un simbolo speciale per lo spazio vuoto fra cifre, ma mai in posizione estrema. Invece la notazione sessagesimale usata da Tolomeo nell'Almagesto ha lo zero, sia in posizione intermedia che terminale.
- L'acquisizione della notazione posizionale con le nove cifre e lo zero da parte del mondo occidentale deve attendere fino al 13° secolo (Leonardo Pisano, detto Fibonacci, Liber Abaci, 1202).
- Ma il principale vantaggio della notazione posizionale, cioè la sua applicabilità alle frazioni, continua a sfuggire. Anche Fibonacci usa le frazioni a numeratore unitario, così la frazione $98/100$ viene trasformata in $1/100 + 1/50 + 1/5 + 1/4 + 1/2$ e la frazione $99/100$ viene trasformata in $1/25 + 1/5 + 1/4 + 1/2$.

- Prima dell'adozione della numerazione posizionale le operazioni venivano eseguite mediante l'uso delle dita o dell'abaco.
- Inizialmente si trattava di semplici tavolette che servivano a facilitare le addizioni e le sottrazioni. Successivamente furono arricchite di una serie di guide parallele, che convenzionalmente indicavano le unità, le decine, le centinaia, ecc. Lungo queste guide potevano essere spostati piccoli oggetti mobili, come pietruzze o palline (in latino *calculi*).
- Il loro funzionamento si basava sul principio che il valore di una configurazione dipende dalla posizione occupata dai diversi calculi. Si trattava di un'applicazione pratica del principio di numerazione posizionale, che però non era utilizzata nella contemporanea scrittura dei numeri.

- Con la notazione posizionale l'abaco in quanto strumento di calcolo perse la sua posizione preminente perché le operazioni potevano essere fatte direttamente sulle cifre rappresentate.
- In Europa l'uso dell'abaco durò anche dopo l'adozione della numerazione attuale e cessò solo con la rivoluzione francese.
- In Asia l'uso dell'abaco si è protratto assai più a lungo, praticamente fino alla diffusione dei calcolatori elettronici.
- Fin dai tempi del Fibonacci si verificò una contrapposizione fra i cosiddetti abachisti, legati alla notazione romana, e gli algoritmisti, che sostenevano la nuova notazione posizionale.

- Usando l'abaco i dati iniziali e intermedi venivano continuamente corretti, perdendo traccia dei diversi passi eseguiti e quindi perdendo la possibilità di un controllo di correttezza.
- La nuova aritmetica presupponeva la scrittura di tutti i numeri coinvolti nel calcolo, di cui veniva tenuta traccia.
- Questo fu uno dei fattori che frenò la diffusione del nuovo metodo: la scrittura dei numeri richiedeva l'uso in grande quantità di materiale a basso costo, che non poteva essere che la carta.

La nuova aritmetica

- Alla fine, dopo secoli di confronti, vinsero gli algoritmisti per vari motivi:
- l'apprendimento e la pratica dell'abaco richiedevano un allenamento prolungato rispetto a quello della nuova aritmetica, soprattutto per le operazioni più complicate, come la divisione e l'estrazione delle radici,
- l'estensione della notazione posizionale ai numeri non interi eliminò la necessità dell'uso delle frazioni, che era assai complicato,
- la contemporanea invenzione della stampa, che contribuì anche ad un incremento della produzione di carta,
- a livello teorico, il simbolismo che si stava affermando in matematica era compatibile con una mentalità algoritmica ma molto meno con una mentalità abachistica.

Quale punto di vista?

- Al giorno d'oggi non ci si pone più il problema se la notazione romana possa competere con quella posizionale, anche perché dipendiamo in modo quasi totale dai calcolatori, che devono operare con notazione binaria posizionale.
- Ma in fondo al nostro cervello resta pur sempre un piccolo tarlo: ma davvero la notazione attuale è superiore a quella romana? o è possibile che da certi punti di vista quella romana possa essere considerata competitiva?