RICERCA OPERATIVA (a.a. 2018/19)

Nome Cognome:

Corso: A B **Matricola:**

1) Il nuovo network *Radio Maya the Bee* vuole che le proprie trasmissioni radiofoniche raggiungano le m città presenti in una data regione. Per far ciò vuole affittare le 3 fasce orarie di trasmissione (6-14, 14-22, 22-6) dalle n stazioni di ripetitori radio già presenti sul territorio, in modo da garantire che tutte le città ricevano sempre le trasmissioni nelle 24 ore. Per ogni città i si conosce l'insieme $S(i)$ delle stazioni che possono garantire il segnale per la città in qualunque fascia oraria. Per affittare dalla stazione j la fascia oraria k, il network deve pagare un costo c_{jk}. Sapendo che, secondo le vigenti leggi regionali sulla concorrenza, ogni stazione può affittare al network al più 2 fasce orarie al giorno, si formuli in termini di P.L.I. il problema di stabilire da quali stazioni il network deve affittare le varie fasce orarie minimizzando la spesa sostenuta e garantendo il segnale per tutte le città nelle 24 ore.

SVOLGIMENTO

Introduciamo le variabili intere

$$x_{jk} = \begin{cases} 1, & \text{se il network affitta la fascia oraria } k \text{ dalla stazione } j, \\ 0, & \text{altrimenti,} \end{cases} \qquad j = 1, \cdots, n, \quad k = 1, 2, 3.$$

Il costo complessivo di affitto delle fasce orarie dalle varie stazioni è:

$$\sum_{j=1}^{n} \sum_{k=1}^{3} c_{jk} x_{jk}$$

I vincoli che garantiscono la copertura delle città sulle 24 ore sono:

$$\sum_{j \in S(i)} x_{jk} \geq 1, \qquad i = 1, \ldots, m, \; k = 1, 2, 3.$$

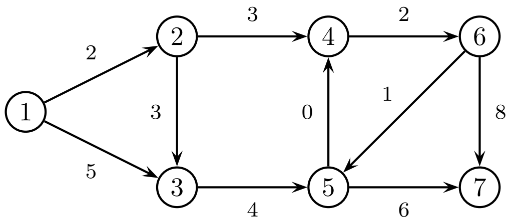
I vincoli sul numero di fasce orarie affittabili dalla singola stazione sono:

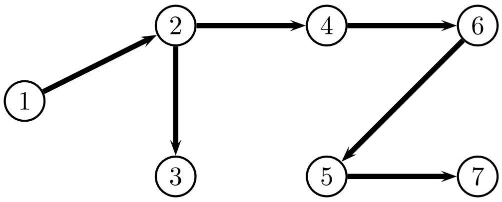
$$\sum_{k=1}^{3} x_{jk} \leq 2, \qquad j = 1, ..., n.$$

La formulazione in termini di P.L.I. è pertanto:

$$\begin{aligned} \min \quad & \sum_{j=1}^{n} \sum_{k=1}^{3} c_{jk} x_{jk} \\ & \sum_{j \in S(i)} x_{jk} \geq 1, \qquad i = 1, \ldots, m, \quad k = 1, 2, 3 \\ & \sum_{k=1}^{3} x_{jk} \leq 2, \qquad j = 1, ..., n \\ & x_{jk} \in \{0, 1\} \qquad j = 1, ...n, \quad k = 1, 2, 3 \end{aligned}$$

2) Si consideri il problema dell'albero dei cammini minimi di radice 1 sul grafo di sinistra:





Dire se l'albero sulla destra è un albero dei cammini minimi. Cambiando il costo dell'arco $(6, 7)$ da 8 a 5, trovare un albero dei cammini minimi di radice 1 applicando eventualmente un algoritmo opportuno. L'albero così individuato è l'unico albero dei cammini minimi? Giustificare tutte le risposte.

SVOLGIMENTO

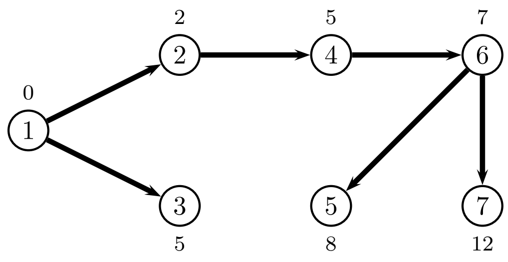
Il vettore di etichette associato all'albero dato è $\pi = (0, 2, 5, 5, 8, 7, 14)$. La seguente tabella mostra che tutti gli archi (i, j) non appartenenti all'albero soddisfano le condizioni di Bellman $\pi_i + c_{ij} \geq \pi_j$. Pertanto, l'albero dato è un albero dei cammini minimi.

(i,j)	$\pi_i + c_{ij}$	π_j
$(1,3)$	$0+5$	5
$(3,5)$	$5+4$	8
$(5,4)$	$8+0$	5
$(6,7)$	$7+8$	14

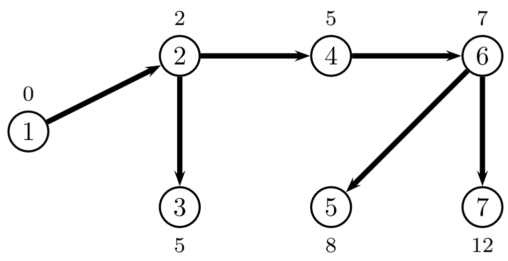
Cambiando il costo dell'arco $(6, 7)$ da 8 a 5, l'arco $(6, 7)$ non soddisfa più la corrispondente condizione di Bellman. Pertanto, l'albero dato non è più un albero dei cammini minimi. Per trovarne uno, è possibile applicare l'algoritmo di Dijkstra. Per ciascuna iterazione dell'algoritmo la tabella riporta il nodo selezionato u, il vettore p dei predecessori, il vettore π delle etichette e l'insieme U dei nodi da esaminare.

Iter.	u	p	π	U
0	-	$(0, -1, -1, -1, -1, -1, -1)$	$(0, \infty, \infty, \infty, \infty, \infty, \infty)$	$\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$
1	1	$(0, 1, 1, -1, -1, -1, -1)$	$(0, 2, 5, \infty, \infty, \infty, \infty)$	$\{2, 3, 4, 5, 6, 7\}$
2	2	$(0, 1, 1, 2, -1, -1, -1)$	$(0, 2, 5, 5, \infty, \infty, \infty)$	$\{3, 4, 5, 6, 7\}$
3	3	$(0, 1, 1, 2, 3, -1, -1)$	$(0, 2, 5, 5, 9, \infty, \infty)$	$\{4, 5, 6, 7\}$
4	4	$(0, 1, 1, 2, 3, 4, -1)$	$(0, 2, 5, 5, 9, 7, \infty)$	$\{5, 6, 7\}$
5	6	$(0, 1, 1, 2, 6, 4, 6)$	$(0, 2, 5, 5, 8, 7, 12)$	$\{5, 7\}$
6	5	$(0, 1, 1, 2, 6, 4, 6)$	$(0, 2, 5, 5, 8, 7, 12)$	$\{7\}$
7	7	$(0, 1, 1, 2, 6, 4, 6)$	$(0, 2, 5, 5, 8, 7, 12)$	$\emptyset$

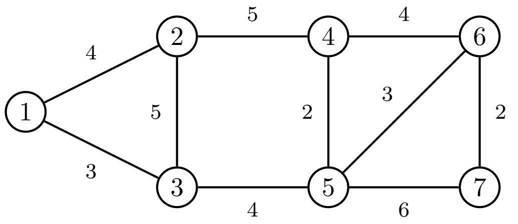
L'albero così individuato è illustrato in figura, riportando i costi dei cammini ottimi (etichette finali dei nodi).

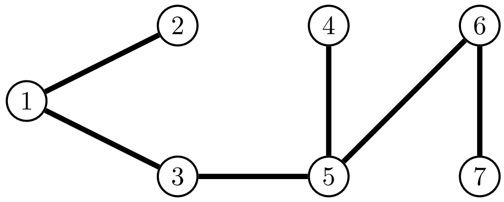


Poiché l'arco $(2, 3)$ soddisfa la condizione di Bellman come uguaglianza, l'albero non è l'unico albero dei cammini minimi. Infatti, lo è anche l'albero che si ottiene sostituendo l'arco $(1, 3)$ con l'arco $(2, 3)$ in quello sopra riportato.



3) Si consideri il problema dell'albero di copertura di costo minimo sul grafo di sinistra:





Dire se l'albero a destra è un albero di costo minimo utilizzando la caratterizzazione dell'ottimalità per tagli. Supponendo che i costi degli archi (1,3) e (2,4) siano rispettivamente α e β, dire per quali valori di α e β lo stesso albero è di costo minimo utilizzando la caratterizzazione dell'ottimalità per cicli. Giustificare tutte le risposte.

SVOLGIMENTO

Per ogni arco (i,j) dell'albero la tabella seguente riporta il suo costo, il taglio (N', N'') che si crea con la sua rimozione dall'albero, l'insieme $A_{ij}(N', N'')$ degli altri archi nel taglio, i loro costi ed il minimo c_{min} di tali costi.

(i,j)	c_{ij}	(N', N'')	$A_{ij}(N', N'')$	costi	c_{min}
$(1,2)$	4	$(\{2\}, \{1,3,4,5,6,7\})$	$(2,3),(2,4)$	$5,5$	5
$(1,3)$	3	$(\{1,2\}, \{3,4,5,6,7\})$	$(2,3),(2,4)$	$5,5$	5
$(3,5)$	4	$(\{1,2,3\}, \{4,5,6,7\})$	$(2,4)$	5	5
$(4,5)$	2	$(\{4\}, \{1,2,3,5,6,7\})$	$(2,4),(4,6)$	$5,4$	4
$(5,6)$	3	$(\{1,2,3,4,5\}, \{6,7\})$	$(4,6),(5,7)$	$4,6$	4
$(6,7)$	2	$(\{7\}, \{1,2,3,4,5,6\})$	$(5,7)$	6	6

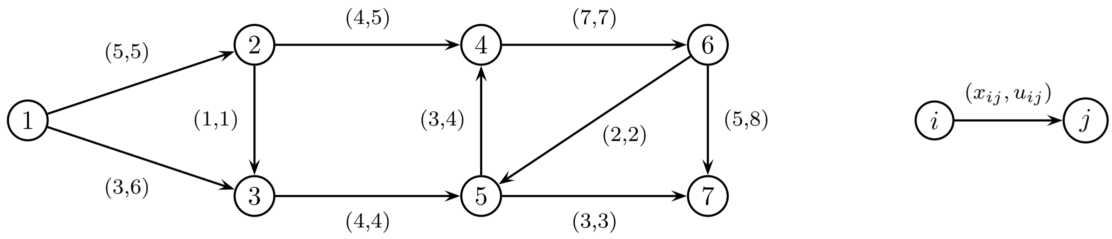
L'albero è di costo minimo in quanto il costo c_{ij} è minore o uguale al corrispondente c_{min} per ogni arco (i,j) dell'albero.

Per ogni arco (i,j) non appartenente all'albero la tabella seguente riporta il suo costo, il ciclo C che si crea con la sua aggiunta all'albero, l'insieme C_{ij} degli altri archi del ciclo, i loro costi ed il massimo c_{max} di tali costi.

(i,j)	c_{ij}	C	C_{ij}	costi	c_{max}
$(2,3)$	5	1–2–3–1	$(1,2),(1,3)$	$4,\alpha$	$\max\{4,\alpha\}$
$(2,4)$	β	1–2–4–5–3–1	$(1,2),(4,5),(3,5),(1,3)$	$4,2,4,\alpha$	$\max\{4,\alpha\}$
$(4,6)$	4	4–5–6–4	$(4,5),(5,6)$	$2,3$	3
$(5,7)$	6	5–6–7–5	$(5,6),(6,7)$	$3,2$	3

L'albero è di costo minimo se e solo se il costo c_{ij} è maggiore o uguale al corrispondente c_{max} per ogni arco (i,j) non appartenete all'albero, pertanto se e solo se $\alpha \leq 5$ e $\beta \geq \max\{4,\alpha\}$.

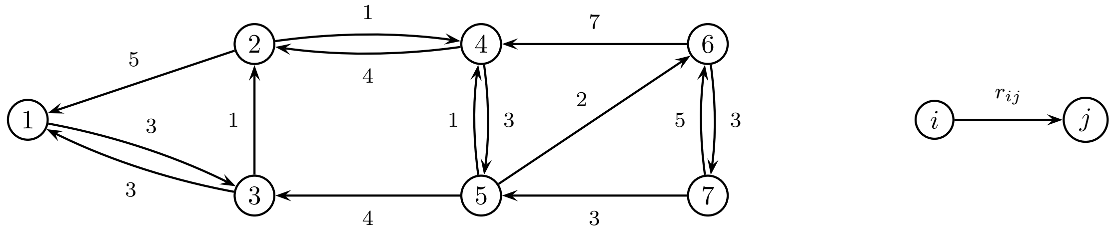
4) Si consideri il problema del flusso massimo dal nodo 1 al nodo 7 sul grafo seguente:



Dire se il flusso riportato in figura è massimo. Qualora non lo fosse, applicare un algoritmo per trovare un flusso massimo ed un taglio di capacità minima. Supponendo di cambiare verso a tutti gli archi del grafo, trovare un flusso massimo dal nodo 7 al nodo 1. Giustificare tutte le risposte.

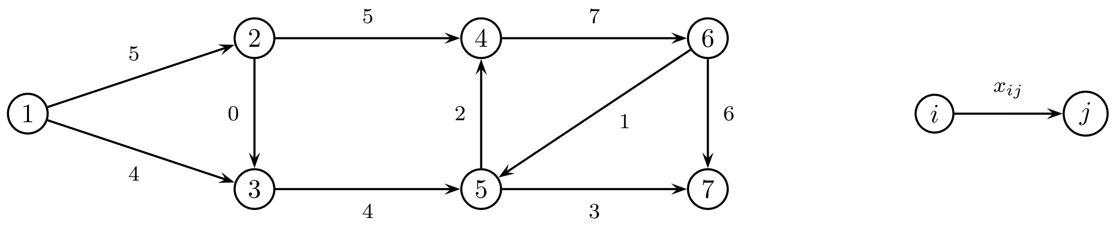
SVOLGIMENTO

Il flusso dato è massimo se e solo se non ammette cammini aumentanti. Il grafo residuo corrispondente al flusso dato è il seguente:

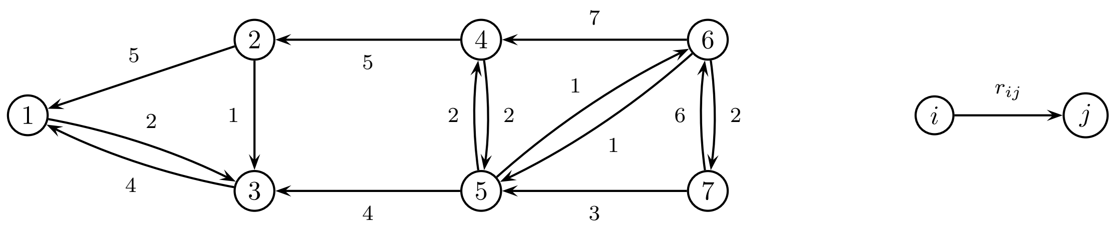


Poiché esiste il cammino aumentante $1-3-2-4-5-6-7$ di capacità $\delta = \min\{3,1,1,3,2,3\} = 1$, il flusso dato non è massimo.

A partire dal flusso dato si può applicare l'algoritmo di Edmonds-Karp, che alla prima iterazione restituisce il cammino sopra riportato. Inviando una unità di flusso lungo questo cammino si ottiene il flusso di valore $v = 9$ riportato nella figura sottostante.



Il grafo residuo corrispondente al nuovo flusso è



Non esistono cammini aumentanti perché il solo nodo raggiungiblie da 1 con un cammino orientato è il nodo 3. Pertanto, il flusso ottenuto è massimo ed il taglio $N_s = \{1,3\}$, $N_t = \{2,4,5,6,7\}$ è di capacità minima, infatti $u(N_s, N_t) = u_{12} + u_{35} = 5 + 4 = 9$.

Questo flusso è massimo anche dal nodo 7 al nodo 1 cambiando verso a tutti gli archi. Infatti, questo problema corrisponde a riportare indietro tutto il flusso inviato da 1 a 7 lungo i medesimi archi.