$$\text{Fact} = \{\langle \underline{0},1\rangle, \langle \underline{1},1\rangle, \langle \underline{2},2\rangle, \langle \underline{3},6\rangle, \dots\}$$

$$\forall n \in \mathbb{N} \,.\, \langle n, m\rangle \in \text{Fact}$$

ossia fact è TOTALE

è definita per ogni valore di $\mathbb{N}$

---

esempio:

$$f(n) = \begin{cases} 0 & \text{se } n = 1 \\ f(n+1)+1 & \text{se } n \neq 1 \end{cases} \qquad f: \mathbb{N} \to \mathbb{N}$$

è Totale?

$$F = \underbrace{\{\langle 1, 0\rangle\}}_{\text{caso } n=1} \cup \underbrace{\{\langle n, m+1\rangle \mid n \neq 1 \wedge \langle n+1, m\rangle \in F \wedge n \in \mathbb{N}\}}_{\text{caso } n \neq 1}$$

calcoliamo il minimo punto fisso di

$$T(X) = \{\langle 1,0\rangle\} \cup \{\langle n, m+1\rangle \mid n \neq 1 \wedge \langle n+1, m\rangle \in X \wedge n \in \mathbb{N}\}$$

$$T^0(\emptyset) = \emptyset$$

$$T^1(\emptyset) = T(\emptyset) = \{\langle 1,0\rangle\} \cup \emptyset = \{\langle 1,0\rangle\}$$

$$T^2(\emptyset) = T(\{\langle 1,0\rangle\}) = \{\langle 1,0\rangle\} \cup \{\langle n, m+1\rangle \mid \dots \langle n+1, m\rangle \in \{\langle 1,0\rangle\} \dots\}$$

$$= \{\langle 1,0\rangle\} \cup \{\langle 0,1\rangle\} = \{\langle 1,0\rangle, \langle 0,1\rangle\}$$

$$T^3(\emptyset) = T(\{\langle 1,0\rangle, \langle 0,1\rangle\}) = \{\langle 1,0\rangle\} \cup \{\langle n, m+1\rangle \mid \dots \underbrace{\langle n+1, m\rangle \in \{\langle 1,0\rangle, \langle 0,1\rangle\} \dots}_{}\}$$

NON MI CONSENTE DI OTTENERE ALTRE COPPIE

$$= \{\langle 1,0\rangle\} \cup \{\langle 0,1\rangle\}$$

$$= \{\langle 1,0\rangle, \langle 0,1\rangle\}$$

$\{\langle \underline{1},0\rangle, \langle \underline{0},1\rangle\}$ è il minimo punto fisso di T

$\quad = F$

in questo caso esistono coppie solo per 0 e 1

$\Rightarrow$ f non è <u>TOTALE</u>

$$f(n) = \begin{cases} 0 & \text{se } n = 1 \\ f(n+1)+1 & \text{se } n \neq 1 \end{cases}$$

$$f(2) = f(2+1)+1 = f(3)+1$$
$$= (f(3+1)+1)+1 = f(4)+2$$
$$= (f(5)+1)+2$$
$$= f(5)+3$$
$$\vdots$$

richiamo ricorsivamente f su numeri sempre più grandi senza mai raggiungere il caso che posso risolvere senza chiamate ricorsive $(n=1)$

$\Rightarrow$ IL "PROGRAMMA" f <u>NON TERMINA</u>

VEDIAMO COME <u>PROGETTARE</u> FUNZIONI RICORSIVE TOTALI

INSIEME BEN FONDATO

Lo si basa su una relazione di precedenza

Dato un insieme A, una relazione di precedenza è una relazione su A, ossia un insieme di coppie di elementi di A

$$\underbrace{R}_{\text{relazione}} \subseteq A \times A$$

→ prodotto cartesiano, ossia l'insieme di tutte le coppie di elementi di A

in particolare consideriamo relazioni non riflessive $\langle a,a\rangle \notin R$ e antisimmetriche $\langle a,b\rangle \in R \Rightarrow \langle b,a\rangle \notin R$

esempio: $A = \mathbb{N}$, consideriamo la relazione $<$ su $\mathbb{N}$

$$< \; = \{\langle 0,1\rangle, \langle 0,2\rangle, \dots, \langle 1,2\rangle, \langle 1,3\rangle, \dots\}$$

di solito scriviamo $a<b$ per dire $\langle a,b\rangle \in <$

useremo come simboli per le relazioni di precenza: $\sqsubset, \prec, \prec\!\prec, \dots$

$(A, \sqsubset)$ l'insieme A si dice BEN FONDATO rispetto alla relazione di precedenza $\sqsubset \subseteq A \times A$ se e solo se non esiste in A una sequenza decrescente infinita rispetto alla relazione $\sqsubset$

cioè partendo da un valore $a_0 \in A$ non esistono $a_1, a_2, a_3, \ldots \in A$ tali che

$$\ldots\ldots \sqsubset a_3 \sqsubset a_2 \sqsubset a_1 \sqsubset a_0$$

ESEMPI

- $(\mathbb{N}, <)$ è ben fondato!

  partendo da qualunque $n \in \mathbb{N}$ qualunque sequenza discendente contiene al massimo n valori

  $$0 < 1 < 2 < \ldots < n-2 < n-1 < n$$

- $(\mathbb{Z}, <)$ non è ben fondato!

$$\ldots < -2 < -1 < 0 < \ldots < n-2 < n-1 < n$$

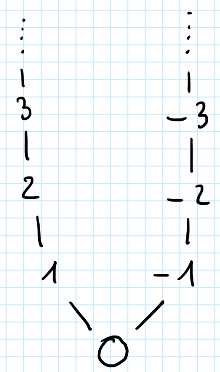
- $(\mathbb{Z}, \sqsubset)$

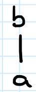
  Definiamo $\sqsubset$ su $\mathbb{Z}$ tale che

  $$\forall n, m \in \mathbb{Z} \quad n \sqsubset m \equiv (n \geq 0 \wedge m = n+1) \vee (n \leq 0 \wedge m = n-1)$$

$0 \sqsubset 1$	$0 \sqsubset -1$
$1 \sqsubset 2$	$-1 \sqsubset -2$
$2 \sqsubset 3$	$-2 \sqsubset -3$
$3 \sqsubset 4$	$-3 \sqsubset -4$

Disegnamo la relazione $\sqsubset$





$a \sqsubset b$ (il più grande sta sopra)

questo disegno mi fa capire

- non esistono sequenze discendenti infinite
- 0 è un elemento MINIMALE

Data una funzione ricorsiva $f : A \to B$ la <u>relazione di precedenza indotta</u> dalla definizione di f, la relazione $\prec_f$ tale che

$\forall x, y \in A \;.\; x \prec_f y$ se il calcolo di $f(y)$ richiama ricorsivamente $f(x)$

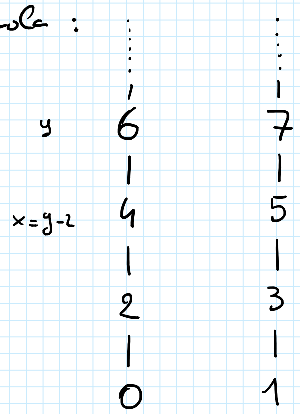
<u>ESEMPIO</u>

$$f(n) = \begin{cases} 0 & n = 0 \\ 1 & n = 1 \\ f(n-2) & n > 1 \end{cases} \qquad f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$$

abbiamo la seguente relazione di precedenza indotta

$$x \prec_f y \;\equiv\; x = y - 2$$

disegnamola :



- 0 e 1 sono minimali
- f è totale
  (poiché $(\mathbb{N}, \prec_f)$ è ben fondato)

- ESEMPIO (PER ESERCIZIO) DISEGNARE LA RELAZIONE INDOTTA DA $\underline{fact}$

- ESEMPIO (successione di Fibonacci)

$0, 1, 1, 2, 3, 5, \ldots$

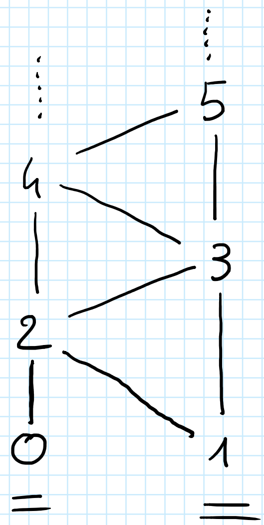
$$fib(n) = \begin{cases} 0 & n = 0 \\ 1 & n = 1 \\ fib(n-1) + fib(n-2) & n > 1 \end{cases}$$

è totale ?

relazione di precedenza indotta $\prec_{fib}$

$$\forall x, y \in \mathbb{N} \quad x \prec_{fib} y \equiv (x = y-1) \vee (x = y-2)$$

disegnamo $\prec_{fib}$



$2 \prec_{fib} 3 \qquad 1 \prec_{fib} 3$

$0 \prec_{fib} 2 \qquad 1 \prec_{fib} 2$

PRINCIPIO DI INDUZIONE BEN FONDATA

Dato un insieme $(A, \sqsubset)$ ben fondato, possiamo dimostrare che una certa proprietà P valga su tutti gli elementi di A (ossia $\forall x \in A. P(x)$) verificando:

1. che P vale su tutti gli elementi minimali di $\sqsubset$ (<u>CASO BASE</u>)

2. che se assumiamo che P valga <u>PER TUTTI</u> gli elementi $y \in A$ tali che $y \sqsubset x$, allora P vale anche per x (<u>CASO INDUTTIVO</u>)

- ESEMPIO

$$f(n) = \begin{cases} 0 & n=0 \\ 1 & n=1 \\ f(n-2) & n>1 \end{cases} \qquad (\mathbb{N}, \prec_f) \text{ è ben fondato}$$

$\ldots - 6 - 4 - 2 - 0$

$\ldots - 7 - 5 - 3 - 1$

verifichiamo che $\forall x \in \mathbb{N} .\ f(x) = x \bmod 2$] P

usiamo il principio di induzione ben fondata

CASO BASE

- $x=0, \quad f(0) = 0 = 0 \bmod 2$ ✓
- $x=1, \quad f(1) = 1 = 1 \bmod 2$ ✓

CASO INDUTTIVO

$\forall x \in \mathbb{N} .\ x \prec_f y .\ f(x) = x \bmod 2$] IPOTESI INDUTTIVA $\quad y>1$

$\Rightarrow \quad f(y) = y \bmod 2$??

$$\begin{aligned} & f(y) \\ = & \ \{\text{def } f\} \\ & f(y-2) \\ = & \ \{\text{ipotesi induttiva con } x = y-2\} \\ & (y-2) \bmod 2 \\ = & \ \{\text{proprietà di mod} : \underline{\underline{a+b}} \bmod b \equiv a \bmod b\} \\ & \underline{\underline{(y-2)+2}} \bmod 2 \\ = & \ y \bmod 2 \qquad ✓ \end{aligned}$$

ESEMPIO

$$f(n,m) = \begin{cases} m & \text{se } n=0 \wedge (m=0 \vee m=1) \\ f(n,m-2)+2 & \text{se } n=0 \wedge m>1 \\ f(n-1,m)+1 & \text{se } n>0 \end{cases}$$

$f: \mathbb{N} \times \mathbb{N} \to \mathbb{N}$

Calcoliamo $\prec_f$ confronta coppie

$$\langle x_1, x_2 \rangle \prec_f \langle y_1, y_2 \rangle \equiv (y_1 = 0 \wedge y_2 > 1 \wedge x_1 = y_1 \wedge x_2 = y_2 - 2)$$
$$\vee$$
$$(y_1 > 0 \wedge x_1 = y_1 - 1 \wedge x_2 = y_2)$$

disegnamola

$\langle n, m \rangle$ $\quad n > 0 \quad m > 1$

|

$\langle n-1, m \rangle$

|

$\langle n-2, m \rangle$

|

⋮

$\langle 0, m \rangle$

|

$\langle 0, m-2 \rangle$

|

$\langle 0, m-4 \rangle$

|

⋮

$\underline{\underline{\langle 0, b \rangle}}$

$b = 0 \vee b = 1$

se m pari $\qquad$ se m dispari

$\left.\begin{array}{l} \langle 0,0 \rangle \\ \langle 0,1 \rangle \end{array}\right\}$ sono minimali

ben fondato!

dimostriamo

$$\forall x, y \in \mathbb{N} \,.\; f(x,y) = x+y$$

principio di induz. ben fondata

CASO BASE

- $\langle 0,0 \rangle \quad f(0,0) = 0 = 0+0 \quad \checkmark$
- $\langle 0,1 \rangle \quad f(0,1) = 1 = 0+1 \quad \checkmark$

CASO INDUTTIVO

1° caso: $\langle n, m \rangle$ con $n = 0 \wedge m > 1$

$f(n, m)$

$= \{\text{def. di } f\}$

$f(n, m-2) + 2$

$= \{\text{ipotesi induttiva}\}$

$(n + (m-2)) + 2$

$=$

$n + m \quad \checkmark$

2° caso: $\langle n, m \rangle$ con $n > 0$

$f(n, m)$

$= \{\text{def. di } f\}$

$f(n-1, m) + 1$

$= \{\text{ip induttiva}\}$

$((n-1) + m) + 1$

$=$

$n + m \quad \checkmark$