Agenti risolutori di problemi

Risolvere i problemi mediante ricerca

Alessio Micheli

a.a. 2015/2016

Credits: Maria Simi

Russell-Norvig

Agenti *risolutori di problemi*

- Adottano il paradigma della risoluzione di problemi come ricerca in uno spazio di stati (*problem solving*).
- Sono agenti con modello che adottano una rappresentazione atomica dello stato
- Sono particolari agenti con obiettivo, che pianificano l'intera sequenza di mosse prima di agire

- Prerequisiti : complessita asintotica O()

Il processo di risoluzione

- Passi da seguire:
  1. Determinazione obiettivo (un insieme di stati in cui obiettivo è soddisfatto)
  2. Formulazione del problema
     - rappresentazione degli stati
     - rappresentazione delle azioni
  3. Determinazione della soluzione mediante ricerca (un piano)
  4. Esecuzione del piano

  e.g. Viaggio con mappa: 1. Raggiungere Bucarest
  2. Guidare da una città all'altra. Stato = città su mappa

Che tipo di assunzioni?

- L'ambiente è statico
- Osservabile
- Discreto
  - un insieme finito di azioni possibili
- Deterministico (1 azione → 1 risultato)
  - Si assume che l'agente possa eseguire il piano "ad occhi chiusi". Niente può andare storto.

Formulazione del problema

Un problema può essere definito formalmente mediante cinque componenti:

1. Stato iniziale
2. Azioni possibili in *s*: Azioni(*s*)
3. Modello di transizione:
   Risultato: stato x azione $\rightarrow$ stato
   Risultato(s, a) = s', uno stato successore

1, 2 e 3 definiscono implicitamente lo *spazio degli stati*

Formulazione del problema (cnt.)

4. Test obiettivo:
   - Un insieme di stati obiettivo
   - Goal-Test: stato $\rightarrow$ {*true*, *false*}
5. Costo del cammino
   - somma dei costi delle azioni (costo dei passi)
   - costo di passo: c(*s*, *a*, *s'*)
   - Il costo di un'azione/passo non è mai negativo

Algoritmi di ricerca

*«Il processo che cerca una sequenza di azioni che raggiunge l'obiettivo è detto **ricerca**»*

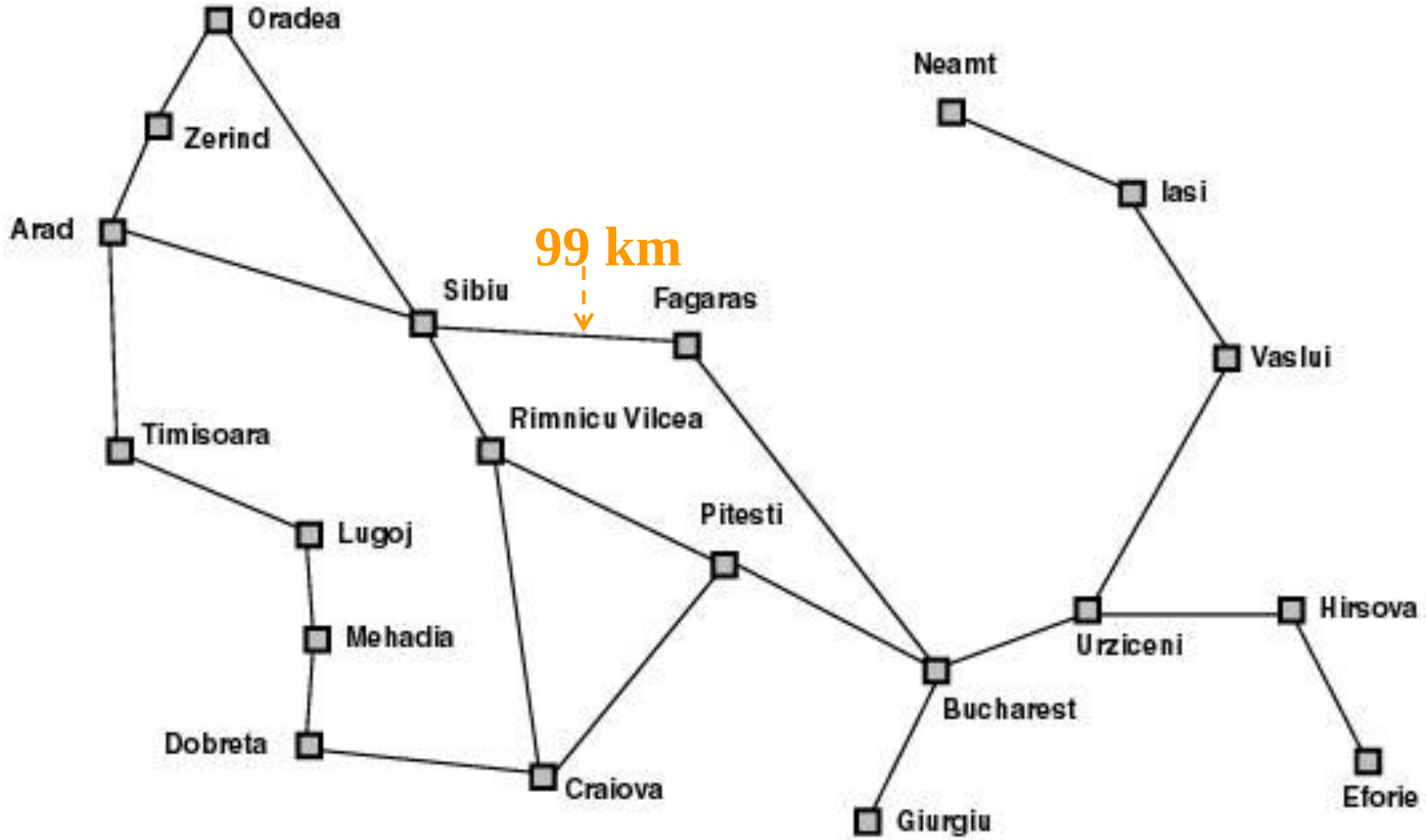
Gli algoritmi di ricerca prendono in input un problema e restituiscono un cammino soluzione, i.e. un cammino che porta dallo stato iniziale a uno stato goal

- *Misura delle prestazioni*

  Trova una soluzione? Quanto costa trovarla? Quanto efficiente è la soluzione?

  Costo totale = costo della ricerca +
  costo del cammino soluzione

Itinerario: il problema



Itinerario: la formulazione

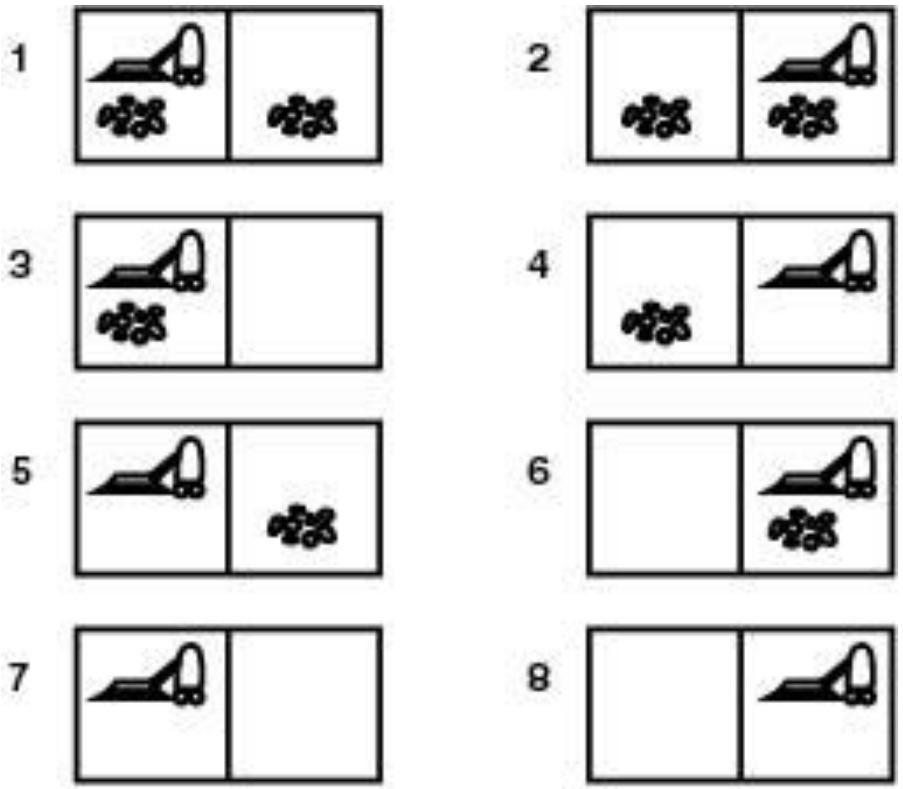
- *Stati*: le città. Es. *In*(Pitesti)

1. *Stato iniziale*: la città da cui si parte. *In*(Arad)
2. *Azioni*: spostarsi su una città vicina collegata
   1. Azioni(*In*(Arad)) ={Go(Sibiu), Go(Zerind) …}
3. Modello di transizione
   1. Risultato(*In*(Arad), Go(Sibiu)) = *In*(Sibiu)
4. *Test Obiettivo*: {*In(Bucarest)*}
5. *Costo del cammino*: somma delle lunghezze delle strade

- Lo spazio degli stati coincide con la rete (grafo) di collegamenti tra città (nodi=stati, archi=azioni)
- Astrazione dai dettagli : essenziale per “modellare”

Aspirapolvere: il problema (toy problem)

Versione semplice: solo due locazioni, sporche o pulite, l'agente può essere in una delle due



Percezioni:

Sporco

NonSporco

Azioni:

Sinistra (L)

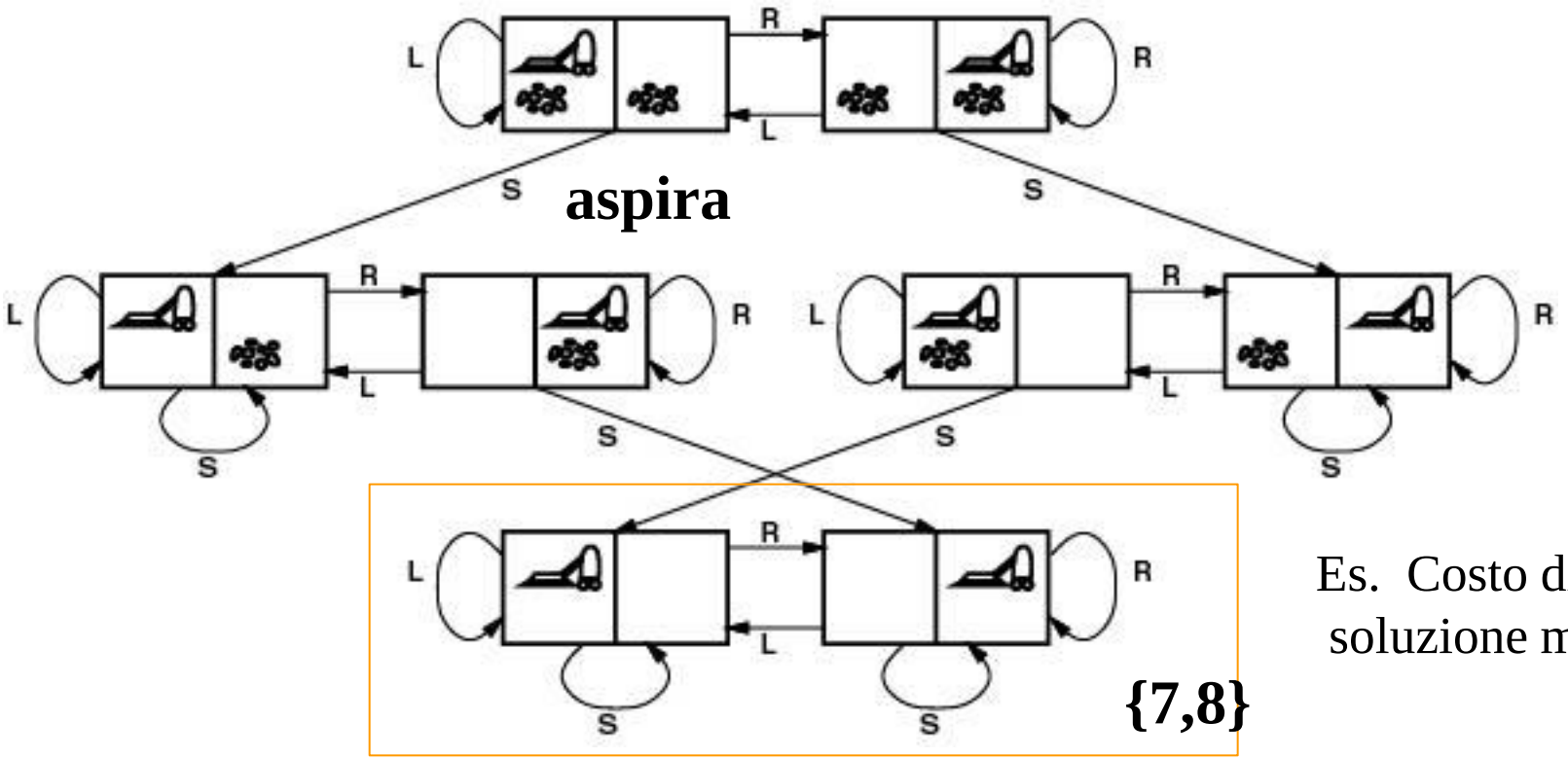
Destra (R)

Aspira (S)

Aspirapolvere: formulazione

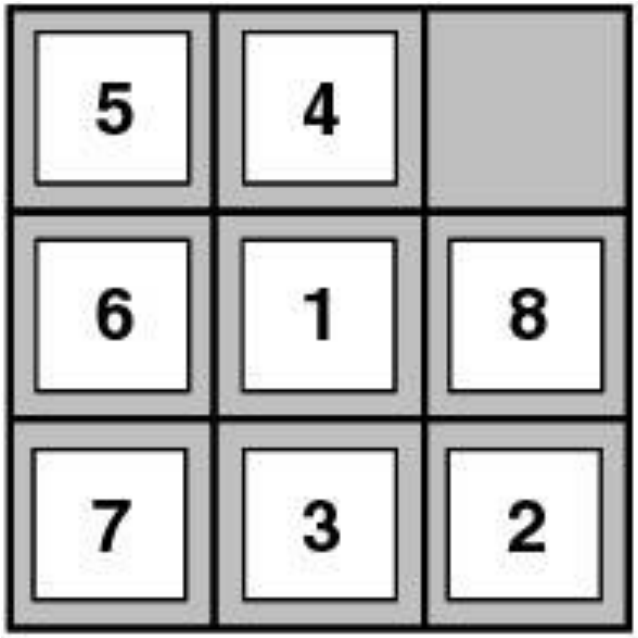
- *Obiettivo*: rimuovere lo sporco { 7, 8 }
- Ogni azione ha costo 1

Spazio degli stati :

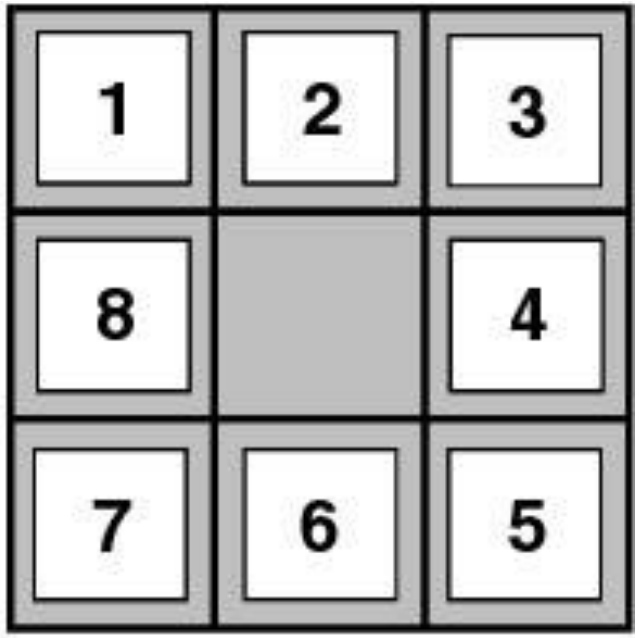


Es. Costo di soluzione min.?

Il puzzle dell'otto



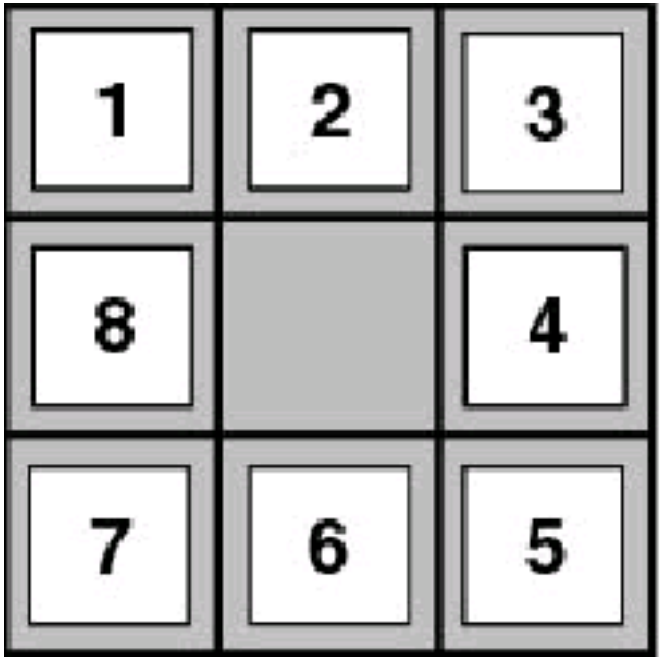
Start State



Goal State

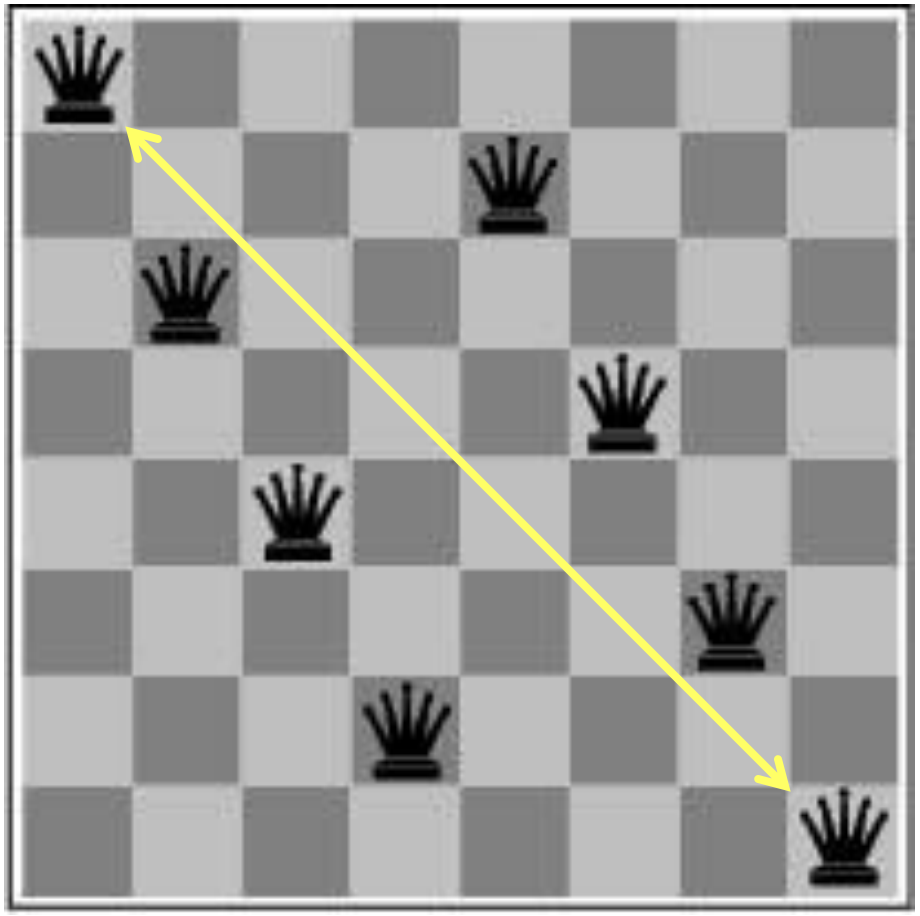
Puzzle dell'otto: formulazione

- *Stati*: possibili configurazioni della scacchiera
- *Stato iniziale*: una configurazione
- *Obiettivo*: una configurazione
  Goal-Test: Stato obiettivo?
- *Azioni*: mosse della casella bianca
  in sù: ↑ in giù: ↓
  a destra: → a sinistra: ←
- *Costo cammino*: ogni passo costa 1



- Lo spazio degli stati è un grafo con possibili cicli.
- NP-completo. Per 8 tasselli: 9!/2 =181K stati! Ma risolvibile in poco tempo (ms). Se cresce no!

Le otto regine: il problema



Collocare 8 regine sulla scacchiera in modo tale che nessuna regina sia attaccata da altre

Le otto regine:

Formulazione incrementale 1

- *Stati*: scacchiere con 0-8 regine
- *Goal-Test*: 8 regine sulla scacchiera, nessuna attaccata
- *Costo cammino*: zero (resta 8 e non è rilevante, interessa solo lo stato finale)
- *Azioni*: aggiungi una regina

$64 \times 63 \times \ldots \times 57 \sim 1.8 \times 10^{14}$

sequenze da considerare!

Le otto regine:

Formulazione incrementale 2

- *Stati*: scacchiere con 0-8 regine, nessuna minacciata
- *Goal-Test*: 8 regine sulla scacchiera, nessuna minacciata
- *Costo cammino*: zero
- *Azioni*: aggiungi una regina nella colonna vuota più a destra ancora libera in modo che non sia minacciata

  2057 sequenze da considerare

Le 8 regine:

Formulazione a stato completo

- *Goal-Test*: 8 regine sulla scacchiera, nessuna minacciata
- *Costo cammino*: zero
- *Stati*: scacchiere con 8 regine, una per colonna
- *Azioni*: sposta una regina nella colonna, se minacciata

Dimostrazione di teoremi

- Il problema:

  Dato un insieme di premesse

  $$\{s, t, q \Rightarrow p, r \Rightarrow p, v \Rightarrow q, t \Rightarrow r, s \Rightarrow v\}$$

  dimostrare una proposizione p

- Nel calcolo proposizionale un'unica regola di inferenza, il *Modus Ponens (MP)*:

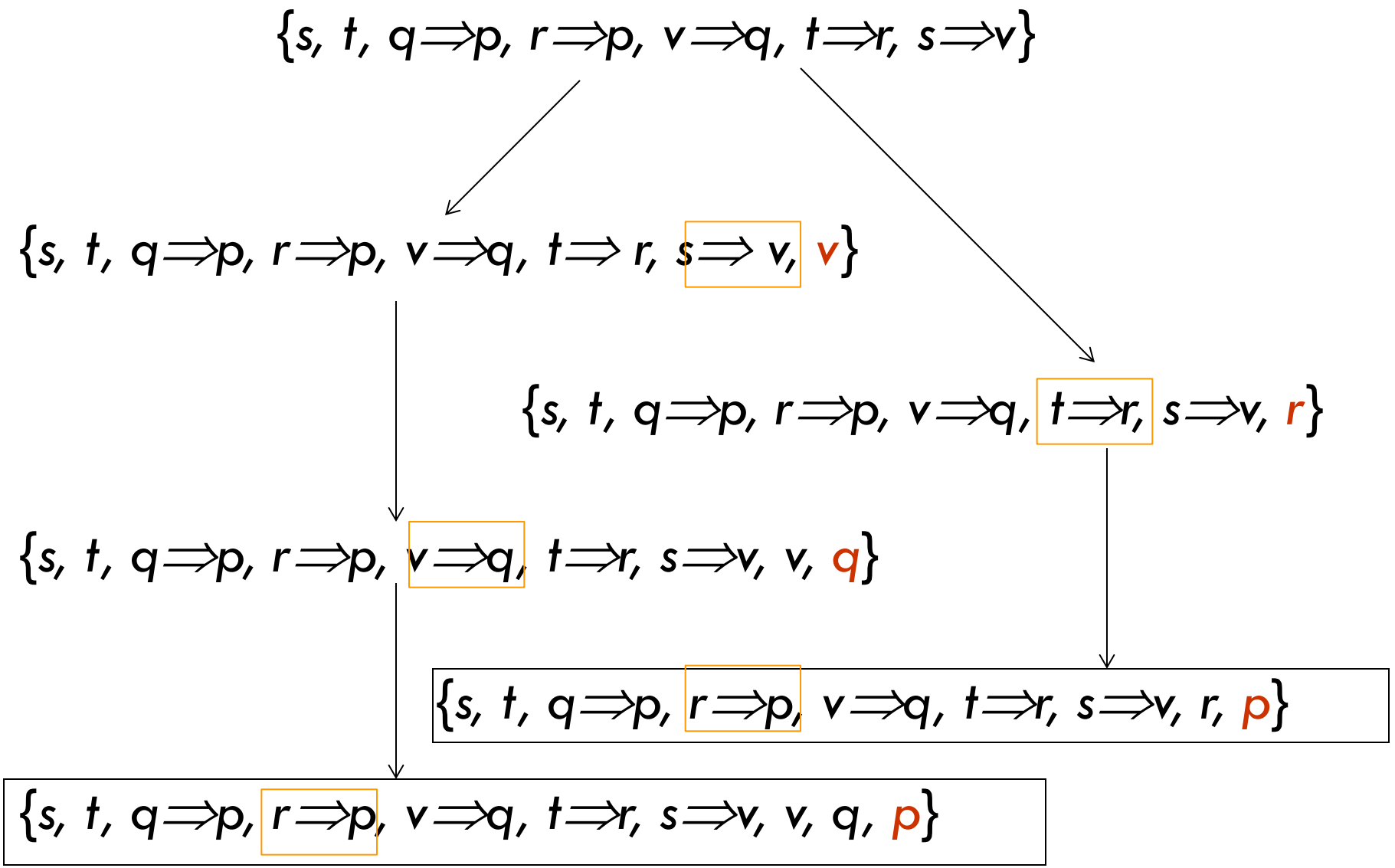
  $$\text{Se } p \text{ e } p \Rightarrow q \text{ allora } q$$

Dim. teoremi: formulazione

- *Stati*: insiemi di proposizioni
- *Stato iniziale*: un insieme di proposizioni (le premesse).
- *Stato obiettivo*: un insieme di proposizioni contenente il teorema da dimostrare. *Es p.*
- *Operatori:* l'applicazione del MP, che aggiunge teoremi

continua

Dim. teoremi: spazio degli stati

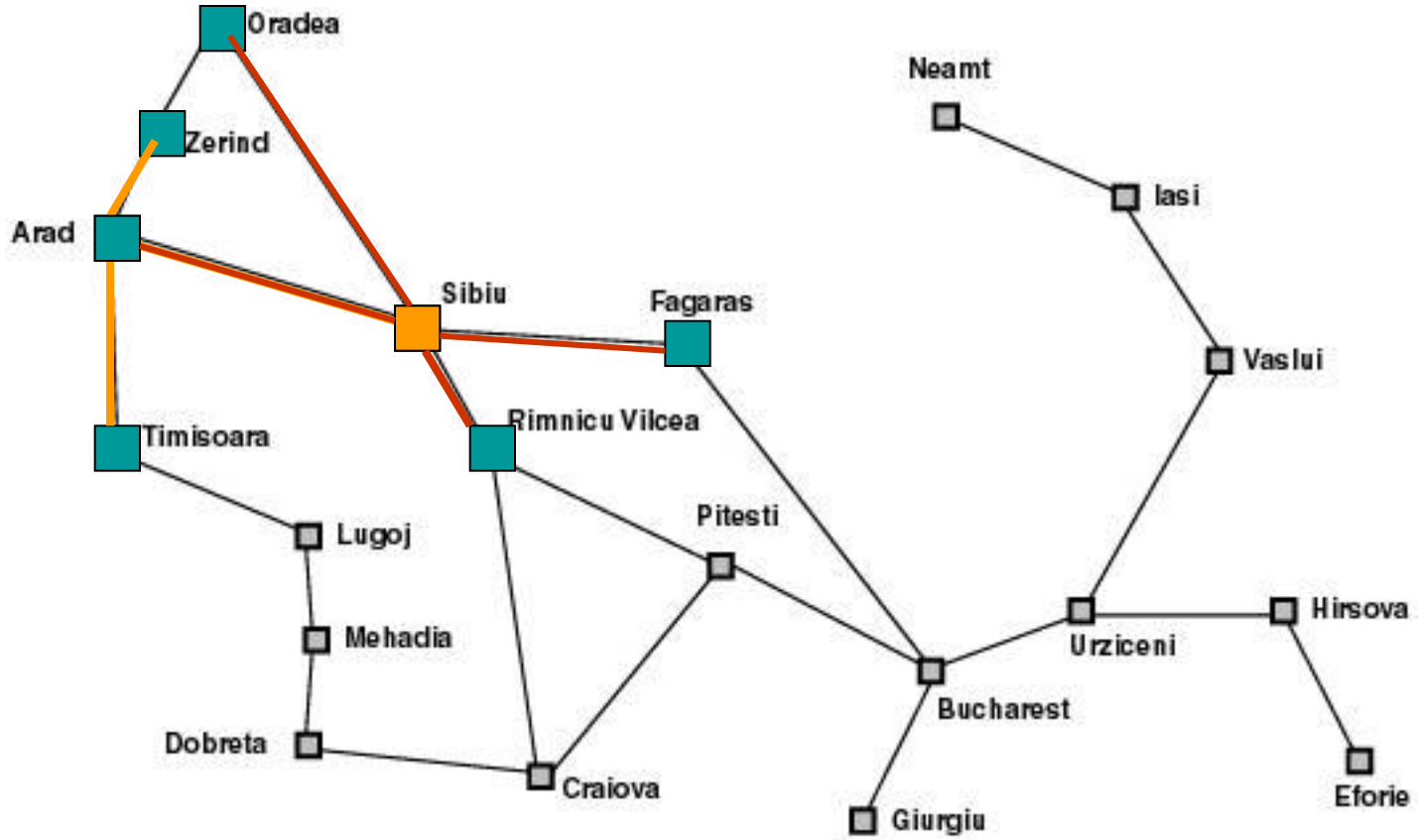


Problemi reali

- Pianificazione di viaggi aerei
- Problema del commesso viaggiatore
- Configurazione VLSI
- Navigazione di robot (spazio continuo!)
- Montaggio automatico
- Progettazione di proteine
- …

Ricerca della soluzione

Generazione di un albero di ricerca sovrapposto allo spazio degli stati (generato da possibili sequenze di azioni)

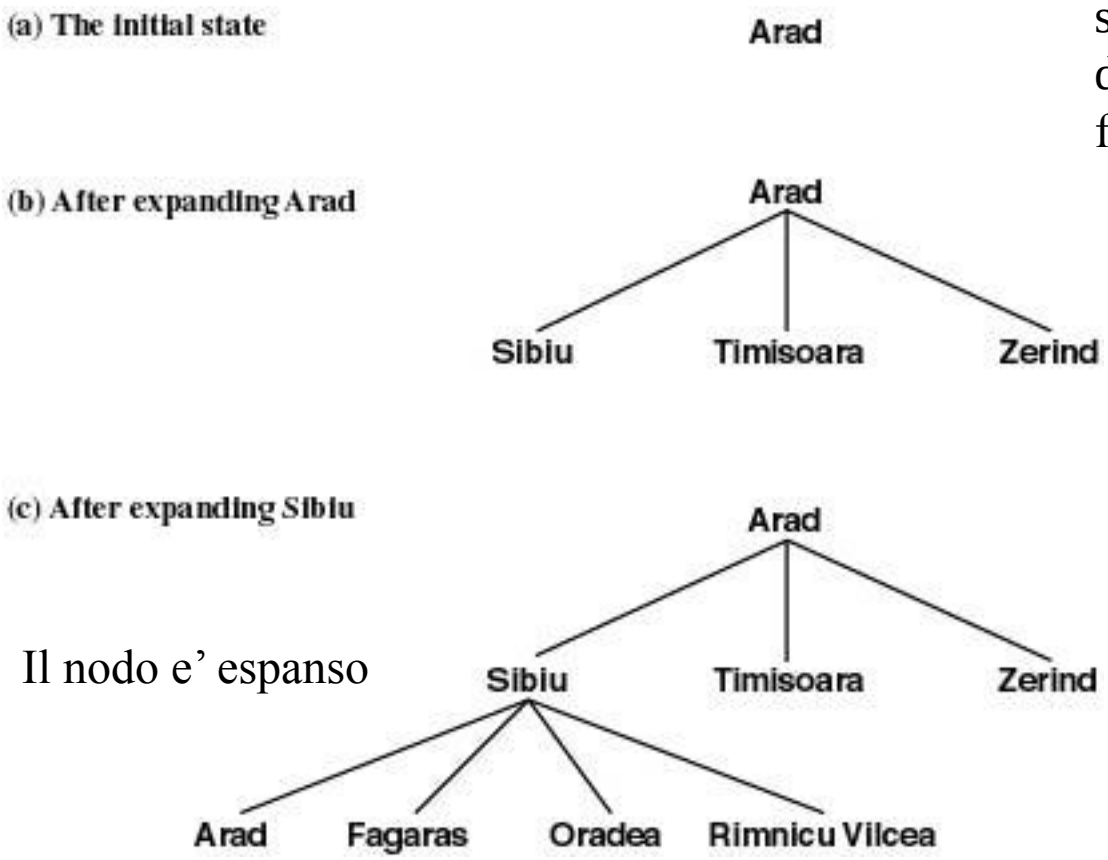


Ricerca: approfondire un'opzione, da parte le altre e ripredenderle se non trova soluzione

Ricerca della soluzione

Generazione di un albero di ricerca sovrapposto allo spazio degli stati

Nota: assumiamo sia noti concetti di padre, figlio, foglie, …



Il nodo e' espanso

Ricerca ad albero

function Ricerca-Albero (*problema)*

returns soluzione oppure **fallimento**

Inizializza la frontiera con stato iniziale del problema

loop do

if *la frontiera è vuota* **then return fallimento**

Scegli un nodo foglia da espandere e rimuovilo dalla frontiera*

if *il nodo contiene uno stato obiettivo*

then return *la soluzione corrispondente*

E*spandi il nodo e aggiungi i successori alla frontiera*

esamina opzione

passa alle altre opzioni

*Strategia: quale scegliere?

I nodi dell'albero di ricerca

Un nodo *n* è una struttura dati con quattro componenti:

- Uno stato: *n*.stato
- Il nodo padre: *n*.padre
- L'azione effettuata per generarlo: *n*.azione
- Il costo del cammino dal nodo iniziale al nodo: *n*.costo-cammino indicata come $g(n)$ (=*padre.costo-cammino*+*costo-passo ultimo*)

Struttura dati per la frontiera

- *Frontiera*: lista dei nodi in attesa di essere espansi (le foglie dell'albero di ricerca).
- La frontiera è implementata come una coda con operazioni:
  - Vuota?(*coda*)
  - POP(coda) estrae il primo elemento
  - Inserisci(elemento, coda)
  - Diversi tipi di coda hanno diverse funzioni di inserimento e implementano strategie diverse

Diversi tipi di strategie (di ricerca)

- FIFO- First In First Out
  - Viene estratto l'elemento più vecchio (in attesa da più tempo); in nuovi nodi sono aggiunti alla fine.
- LIFO-Last In First Out
  - Viene estratto il più recentemente inserito; i nuovi nodi sono inseriti all'inizio
- Coda non priorità
  - Viene estratto quello con priorità più alta in base a una funzione di ordinamento; dopo l'inserimento dei nuovi nodi si riordina.

Strategie non informate

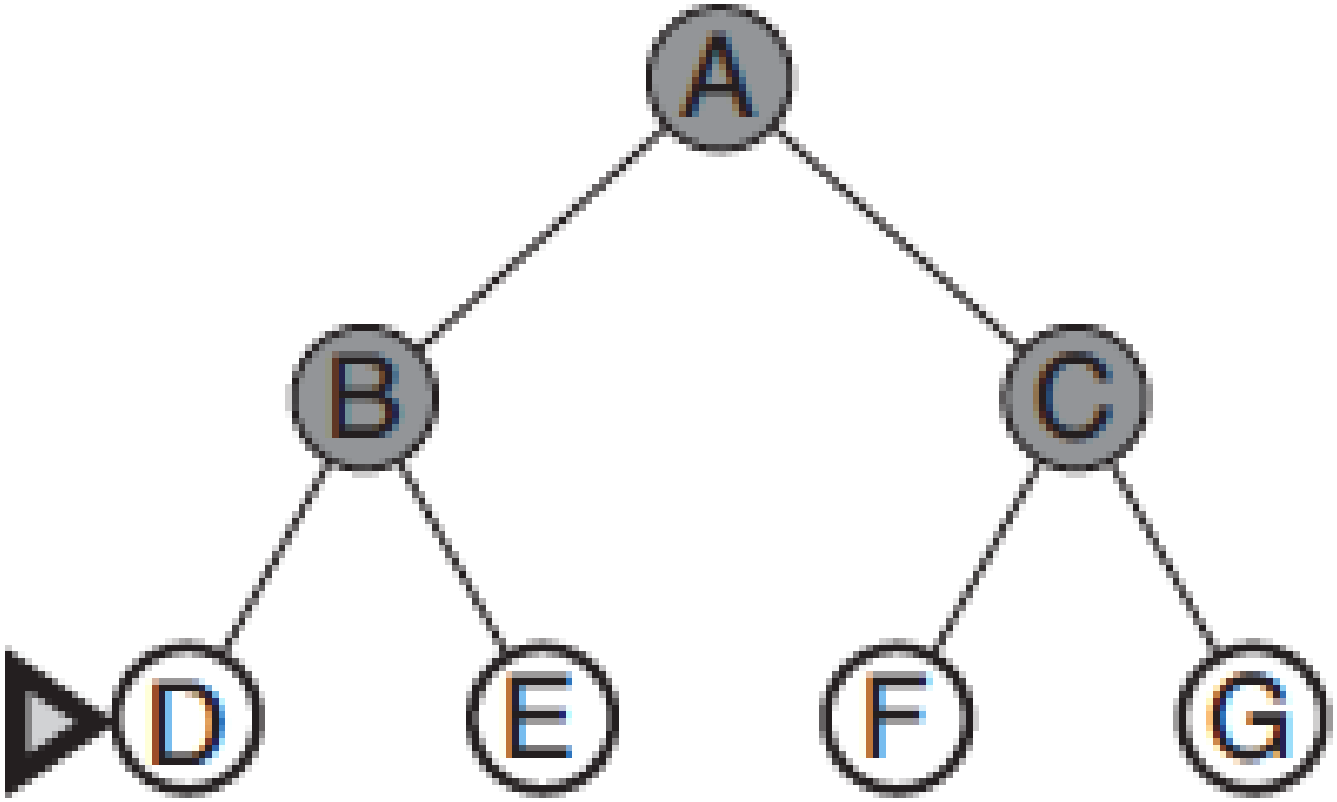
- Ricerca in ampiezza
- Ricerca di costo uniforme
- Ricerca in profondità
- Ricerca in profondità limitata
- Ricerca con approfondimento iterativo

Vs strategie di ricerca euristica (o informata):
fanno uso di informazioni riguardo alla distanza stimata dalla soluzione

Valutazione di una strategia

- *Completezza*: se la soluzione esiste viene trovata
- *Ottimalità* (ammissibilità): trova la soluzione migliore, con costo minore (costo del cammino)
- *Complessità in tempo*: tempo richiesto per trovare la soluzione
- *Complessità in spazio*: memoria richiesta

Ricerca in ampiezza (BF -Breadth-first)



Implementata con una coda che inserisce alla fine (FIFO)

Ricerca in ampiezza (su albero*)

function Ricerca-Ampiezza-A (*problema)*
returns soluzione oppure **fallimento**
nodo = un nodo con *stato il problema.stato-iniziale e costo-di-cammino=0*
if *problema.Test-Obiettivo(nodo.*Stato*)* **then return** Soluzione(*nodo*)
frontiera = una coda FIFO con *nodo* come unico elemento
loop do
if *Vuota?*(*frontiera*) **then return fallimento**
nodo = POP(*frontiera*)
for each azione **in** problema.Azioni(nodo.Stato) **do**
figlio = Nodo-Figlio(*problema*, *nodo, azione*) [costruttore: vedi AIMA]
if Problema.TestObiettivo(figlio.Stato) **then return** Soluzione(*figlio*)
frontiera = Inserisci(*figlio*, *frontiera*) /* frontiera gestita come coda FIFO
end

Analisi complessità spazio-temporale

- Assumiamo

  b = fattore di ramificazione (**b**ranching)
  (numero max di successori)

  d = profondità del nodo obiettivo più superficiale (**d**epth) [più vicino all' iniziale]

  m = lunghezza massima dei cammini nello spazio degli stati (**m**ax)

Ricerca in ampiezza: analisi

- Strategia *completa*
- Strategia *ottimale* se gli operatori hanno tutti lo stesso costo k, cioè $g(n) = k \cdot \text{depth}(n)$, dove $g(n)$ è il costo del cammino per arrivare a n
- Complessità nel tempo (nodi generati)

  $T(b, d) = b + b^2 + \ldots + b^d \rightarrow O(b^d)$ [b figli per ogni nodo]
- Complessità spazio (nodi in memoria): $O(b^d)$ [frontiera]

Nota: O notazione per la complessità asintotica

Ricerca in ampiezza: esempio

- *Esempio*: b=10; 1 milione nodi al sec generati;
  1 nodo occupa 1000 byte

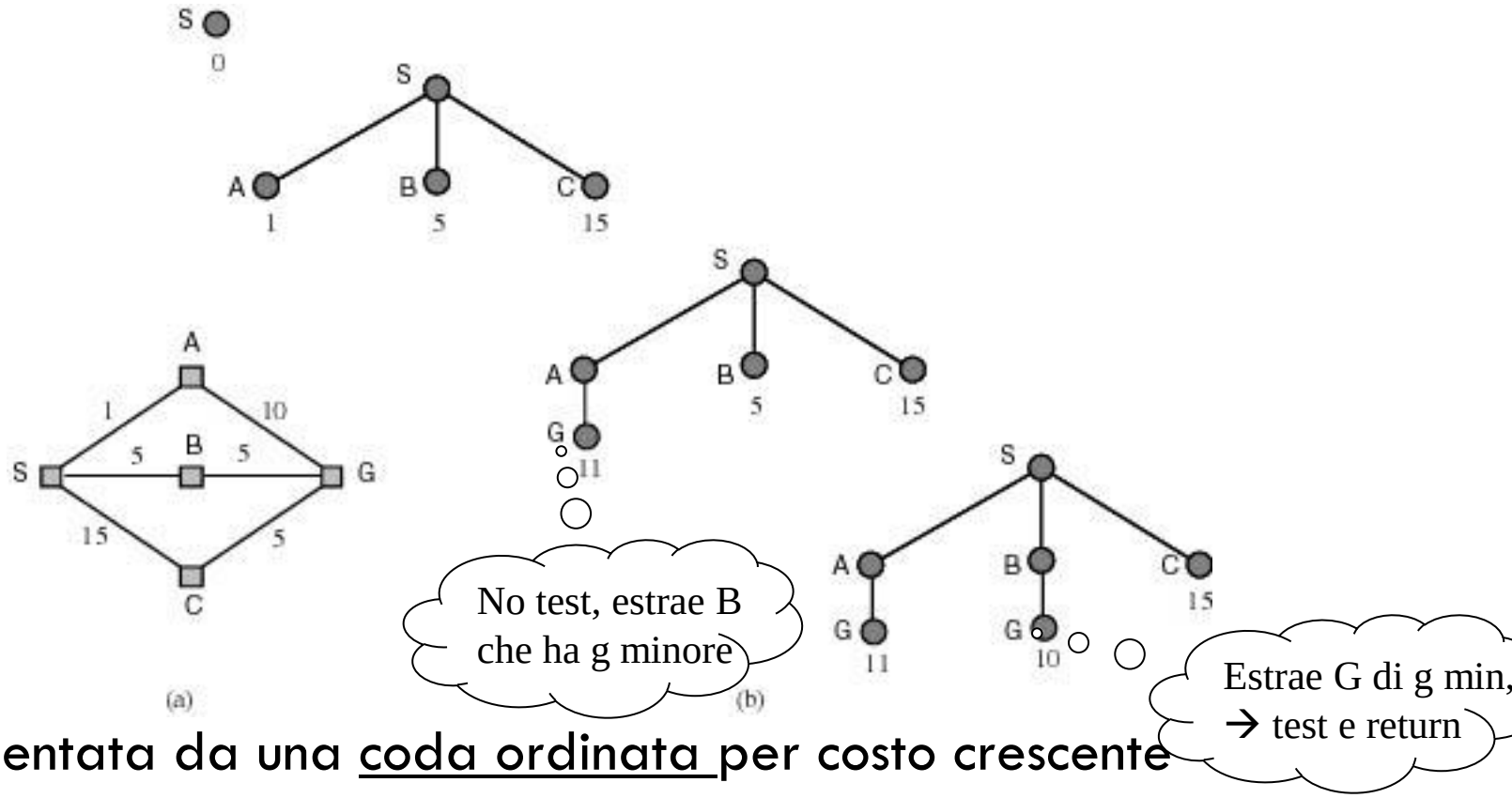
Piu incisivo!

Profondità	Nodi	Tempo	Memoria
2	110	0,11 ms	107 kilobyte
4	11.100	11 ms	10,6 megabyte
6	10^6	1.1 sec	1 gigabyte
8	10^8	2 min	103 gigabyte
10	10^{10}	3 ore	10 terabyte
12	10^{12}	13 giorni	1 petabyte
14	10^{14}	3,5 anni	1 esabyte

Scala male: solo istanze piccole!

Ricerca di costo uniforme (UC)

Generalizzazione della ricerca in ampiezza (costi diversi tra passi): *si sceglie il nodo di costo minore sulla frontiera* (si intende il costo *g(n)* del cammino)



Implementata da una coda ordinata per costo crescente (in cima i nodi di costo minore)

Ricerca UC (su albero)

function Ricerca-UC-A (*problema)*

returns soluzione oppure **fallimento**

nodo = un nodo con *stato il problema.stato-iniziale e costo-di-cammino=0*

frontiera = una **coda con priorità** con *nodo* come unico elemento

loop do

if *Vuota?*(*frontiera*) **then return fallimento**

nodo = POP(*frontiera*)

if problema.TestObiettivo(*nodo*.Stato) **then return** Soluzione(*nodo*)

for each azione **in** problema.Azioni(nodo.Stato) **do**

figlio = Nodo-Figlio(*problema*, *nodo, azione*)

frontiera = Inserisci(*figlio*, *frontiera*) /* in coda con priorità

end

Costo uniforme: analisi

Ottimalità e *completezza* garantite purché il costo degli archi sia maggiore di $\varepsilon > 0$.

Assunto C^* come il costo della soluzione ottima

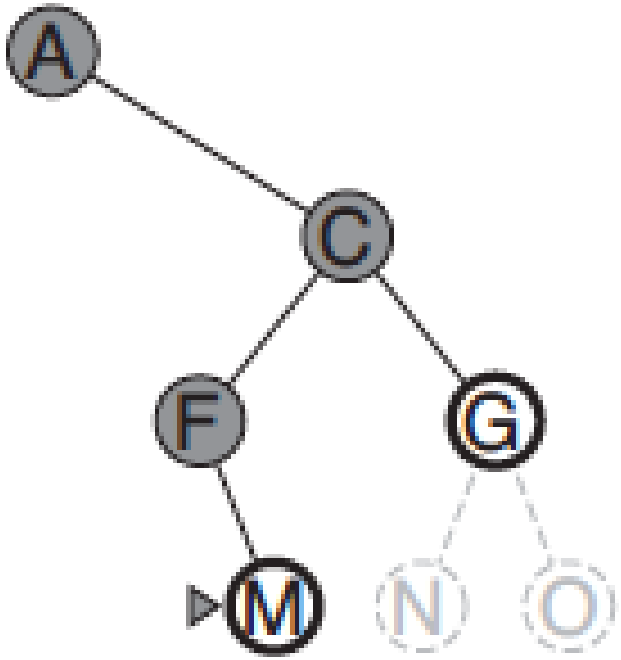
$\lfloor C^*/\varepsilon \rfloor$ è il numero di mosse nel caso peggiore, arrotondato per difetto

Complessità: $O(b^{1+\lfloor C^*/\varepsilon \rfloor})$

Nota: quando ogni azione ha lo stesso costo UC somiglia a BF ma complessità $O(b^{1+d})$

[causa esame e arresto solo dopo aver espanso anche l'ultima frontiera]

Ricerca in profondità



Implementata da una coda che mette i successori in testa alla lista (LIFO, pila o stack).

Ricerca in profondità: analisi

- Se *m* lunghezza massima dei cammini nello spazio degli stati
- *b* fattore di diramazione
  - Tempo: $O(b^m)$ [che può essere > $O(b^d)$]
  - Occupazione memoria: *bm* [frontiera sul cammino]
- [Versione su albero] Strategia *non completa* (loop) e *non ottimale*.
- Drastico risparmio in memoria:

  BF d=16 10 esabyte

  DF d=16 156 Kbyte

Ricerca in profondità ricorsiva

- Ancora più efficiente in occupazione di memoria perché mantiene solo il cammino corrente (solo *m* nodi nel caso pessimo)
- Realizzata da un algoritmo ricorsivo "con backtracking" che non necessita di tenere in memoria *b* nodi per ogni livello, ma salva lo stato su uno stack a cui torna in caso di fallimento per fare altri tentativi.

Ricerca in profondità (su albero)

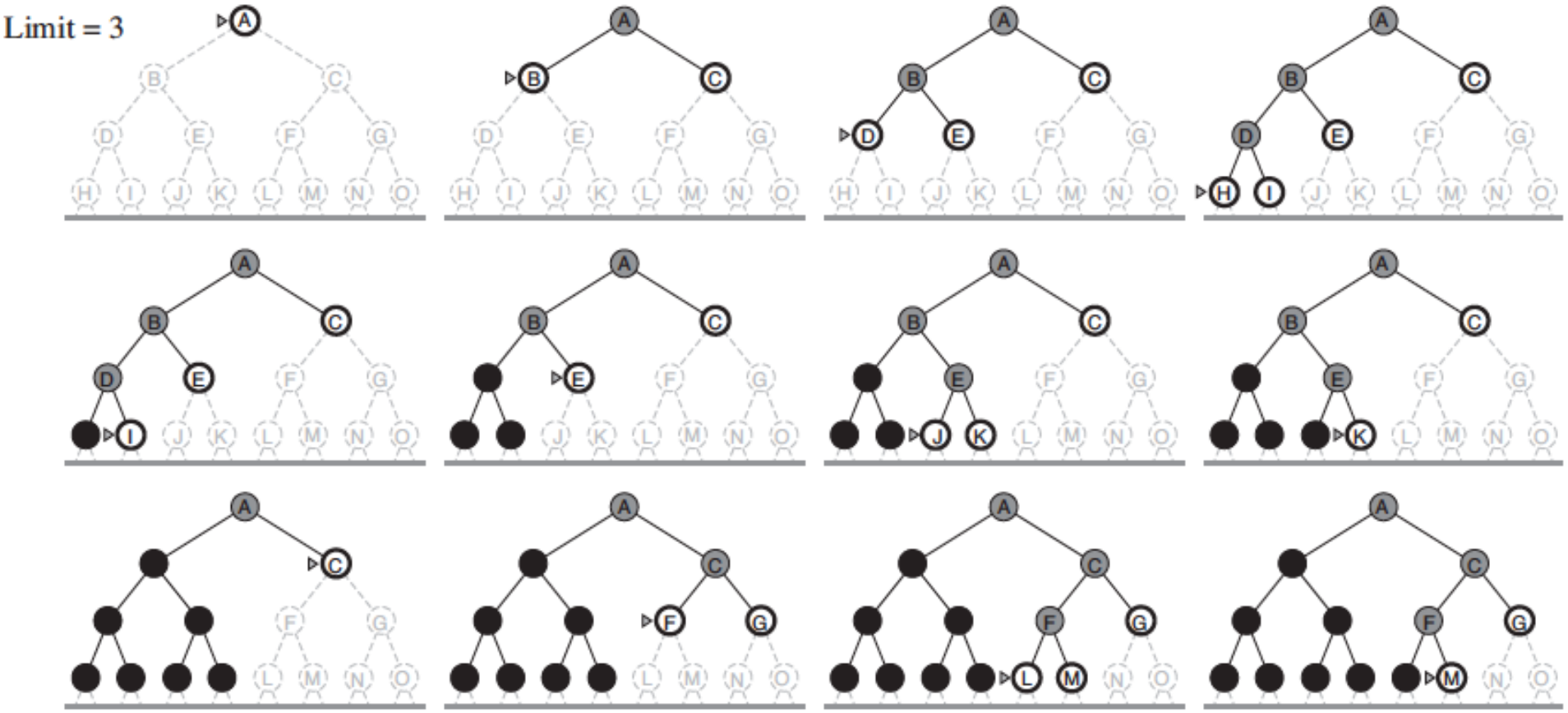
```
function Ricerca-DF-A (problema)
    returns soluzione oppure fallimento
    return Ricerca-DF-ricorsiva(CreaNodo(problema.Stato-iniziale), problema)

function Ricerca-DF-ricorsiva(nodo, problema)
    returns soluzione oppure fallimento
    if problema.TestObiettivo(nodo.Stato) then return Soluzione(nodo)
    else
    for each azione in problema.Azioni(nodo.Stato) do
            figlio = Nodo-Figlio(problema, nodo, azione)
            risultato = Ricerca-DF-ricorsiva(figlio, problema)
            if  risultato ≠ fallimento then return risultato
     return fallimento
```

Ricerca in profondità limitata (DL)

- Si va in profondità fino ad un certo livello predefinito ℓ
- *Completa* per problemi in cui si conosce un limite superiore per la profondità della soluzione.

  Es. Route-finding limitata dal numero di città – 1
- Completo: se $d < \ell$
- Non ottimale
- Complessità tempo: $O(b^{\ell})$
- Complessità spazio: $O(b\ell)$

Approfondimento iterativo (ID)



ID: analisi

- Miglior compromesso tra BF e DF

  BF: $b+b^2+ \ldots +b^{d-1}+b^d$ con $b=10$ e $d=5$

  $10+100+1000+10.000+100.000=111.110$
- ID: I nodi dell'ultimo livello generati una volta, quelli del penultimo 2, quelli del terzultimo 3 … quelli del primo d volte

  ID: $(d)b+(d-1)\ b^2+ \ldots +3b^{d-2}+2b^{d-1}+1b^d$

  $= 50+400+3000+20.000+100.000=123450$
- Complessità tempo: $O(b^d)$ Spazio: $O(b.d)$

- Spazio: Versus $O(b^d)$ della BF

Direzione della ricerca

Un problema ortogonale alla strategia è la *direzione della ricerca*:

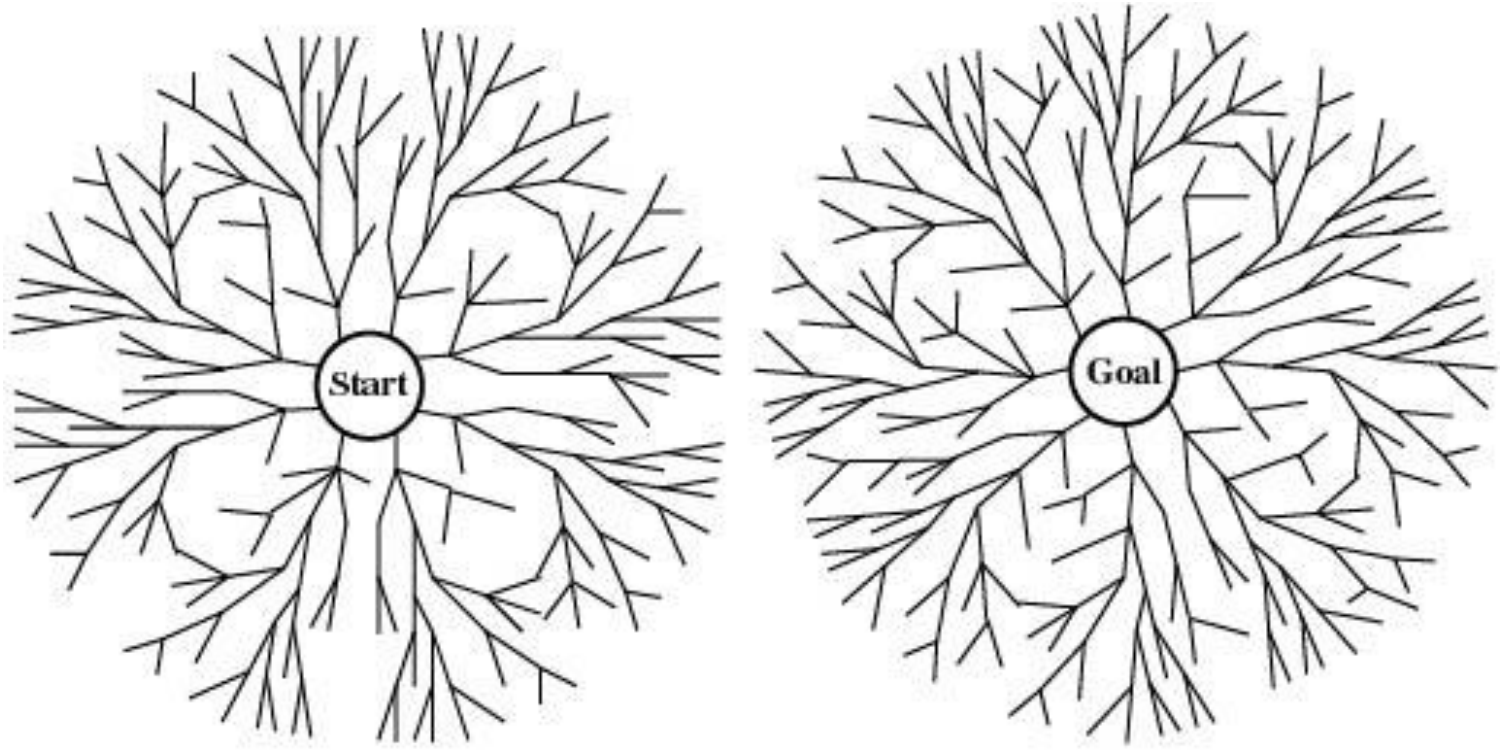
- ricerca *in avanti* o *guidata dai dati*: si esplora lo spazio di ricerca dallo stato iniziale allo stato obiettivo;
- ricerca *all'indietro* o *guidata dall'obiettivo*: si esplora lo spazio di ricerca a partire da uno stato goal e riconducendosi a sotto-goal fino a trovare uno stato iniziale.

Quale direzione?

- Conviene procedere nella direzione in cui il fattore di diramazione è minore
- Si preferisce ricerca all'indietro quando:
  - l'obiettivo e chiaramente definito (th. pr.) o si possono formulare una serie limitata di ipotesi;
  - i dati del problema non sono noti e la loro acquisizione può essere guidata dall'obiettivo
- Si preferisce ricerca in avanti quando:
  - gli obiettivi possibili sono molti (design)
  - abbiamo una serie di dati da cui partire

Ricerca bidirezionale

Si procede nelle due direzioni fino ad incontrarsi



Ricerca bidirezionale: analisi

- Complessità tempo: $O(b^{d/2})$ [/2 = radice quadrata!]

  (test intersezione in tempo costante, es. hash table)
- Complessità spazio: $O(b^{d/2})$

  (almeno tutti i nodi in una direzione in memoria, es usando BF)

NOTA: non sempre applicabile, es. predecessori non definiti, troppi stati obiettivo …

Confronto delle strategie (albero)

Criterio	BF	UC	DF	DL	ID	Bidir
Completa?	si	si(^)	*no*	si (+)	*si*	si
Tempo	$O(b^d)$	$O(b^{1+\lfloor C^*/\varepsilon \rfloor})$	$O(b^m)$	$O(b^\ell)$	$O(b^d)$	$O(b^{d/2})$
Spazio	$O(b^d)$	$O(b^{1+\lfloor C^*/\varepsilon \rfloor})$	$O(bm)$	$O(b\ell)$	$O(bd)$	$O(b^{d/2})$
Ottimale?	si(*)	si(^)	no	no	si(*)	si

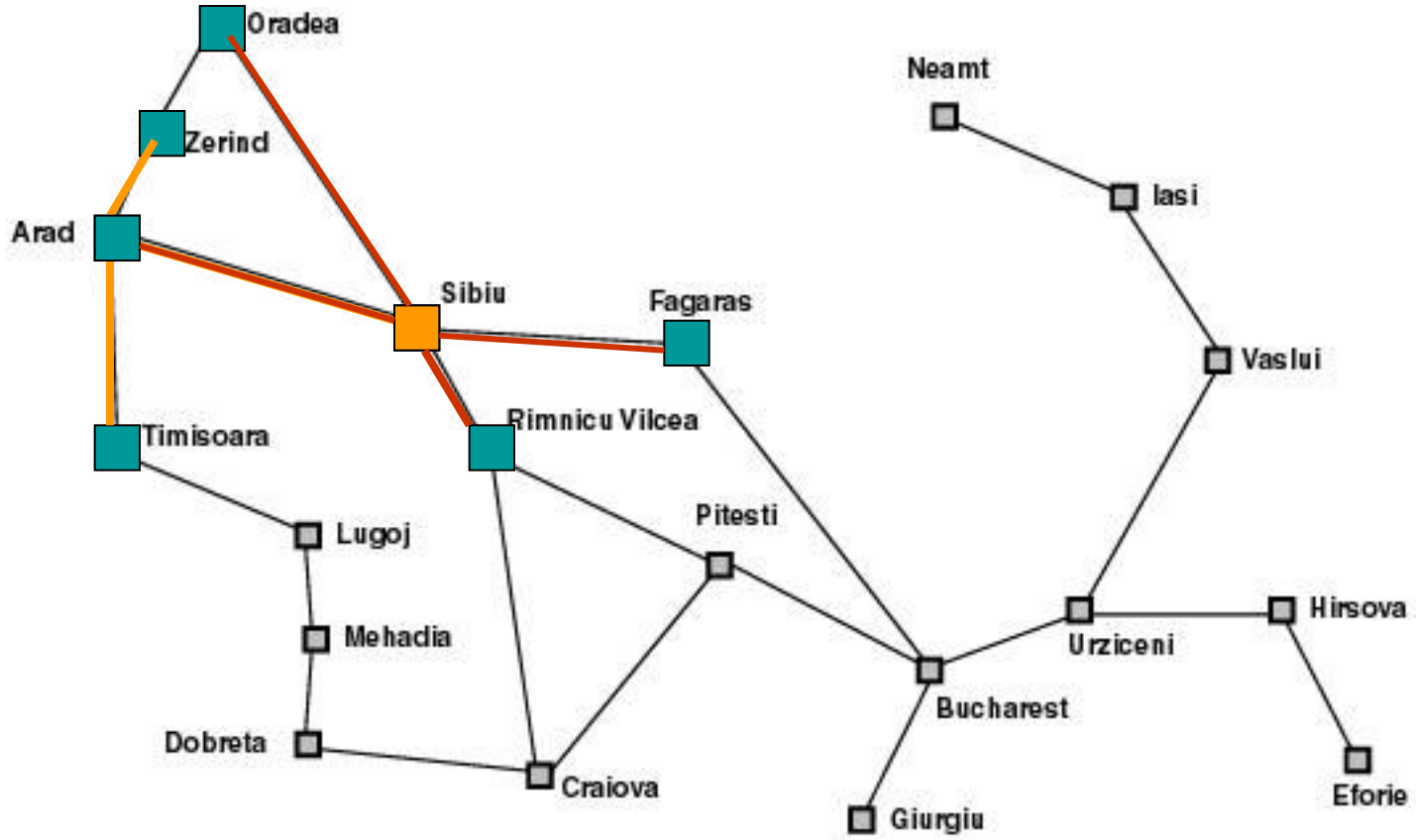
(*) se gli operatori hanno tutti lo stesso costo

(^) per costi degli archi $\geq \varepsilon > 0$

(+) per problemi per cui si conosce un limite alla profondità della soluzione (se l >d)

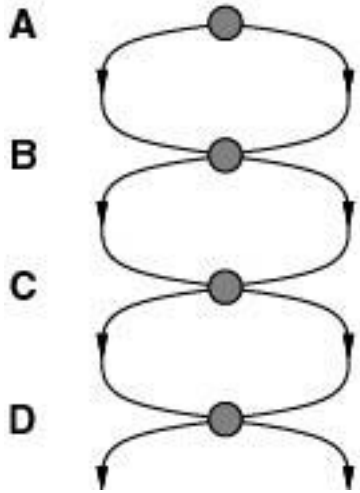
Ricerca su grafi: cammini ciclici

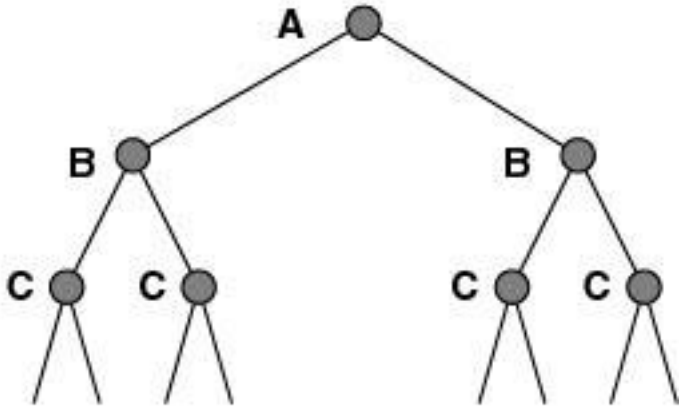
I cammini ciclici rendono gli alberi di ricerca infiniti



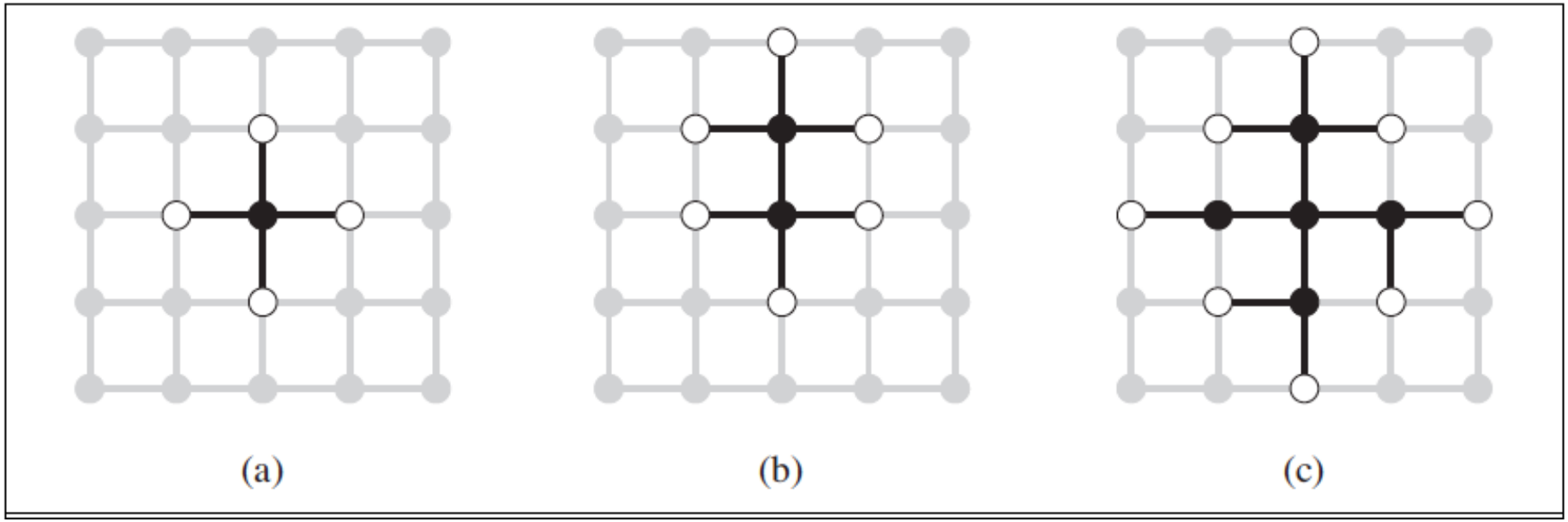
Ricerca su grafi: ridondanze

Su spazi di stati a grafo si generano più volte gli stessi nodi nella ricerca, anche in assenza di cicli.





Ridondanza nelle griglie



Visitare stati già visitati fa compiere lavoro inutile. Come evitarlo?

Costo: 4^d ma $\sim 2d^2$ stati distinti

Compromesso tra spazio e tempo

- Ricordare gli stati già visitati occupa spazio ma ci consente di evitare di visitarli di nuovo
- *Gli algoritmi che dimenticano la propria storia sono destinati a ripeterla!*

Tre soluzioni

In ordine crescente di costo e di efficacia:

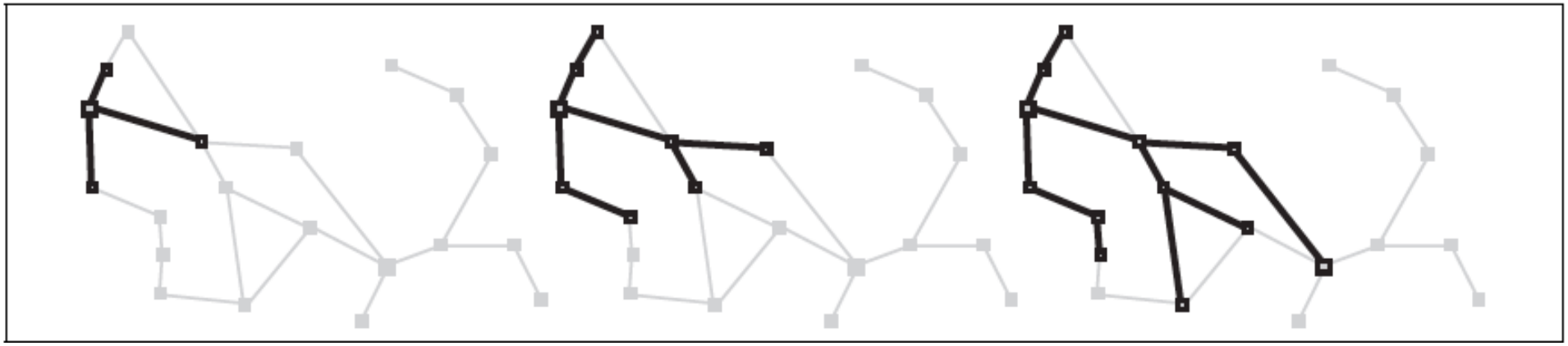
- Non tornare nello stato da cui si proviene: si elimina il genitore dai nodi successori
- Non creare cammini con cicli: si controlla che i successori non siano antenati del nodo corrente
- Non generare nodi con stati già visitati: ogni nodo visitato deve essere tenuto in memoria per una complessità O(*s*) dove *s* è il numero di stati possibili (*hash table* per accesso efficiente).

- Note:
  - Esempi precedenti assumevano spesso di evitare stati ripetuti (immaginatele fatte con la versione «su grafi» che segue)
  - Il costo può essere alto: in caso di DF (profon.) la memoria torna da *bm* a tutti i nodi, ma diviene *completa*

Ricerca "su grafi"

- Mantiene una lista dei nodi visitati (*lista chiusa*)
- Prima di espandere un nodo si controlla se lo stato era stato già incontrato prima o è gia nella frontiera
- Se questo succede, il nodo appena trovato non viene espanso
- Ottimale solo se abbiamo la garanzia che il costo del nuovo cammino sia maggiore o uguale

Ricerca sul grafo della Romania



- La ricerca su grafo esplora uno stato al più una volta
- La frontiera separa i nodi esplorati da quelli non esplorati [ogni cammino dallo stato iniziale a inesplorati deve attraversare la frontiera]

- Nota: la Ric. Profondita (DF) diviene completa su grafo (per spazi finiti)

Ricerca-grafo in ampiezza

```
function Ricerca-Ampiezza-g (problema)
    returns soluzione oppure fallimento
    nodo = un nodo con stato il problema.stato-iniziale e costo-di-cammino=0
    if problema.Test-Obiettivo(nodo.Stato) then return Soluzione(nodo)
    frontiera = una coda FIFO con nodo come unico elemento
    esplorati = insieme vuoto
  loop do
    if Vuota?(frontiera) then return fallimento
    nodo = POP(frontiera); aggiungi nodo.Stato  a esplorati
    for each azione in problema.Azioni(nodo.Stato) do
            figlio = Nodo-Figlio(problema, nodo, azione)
            if figlio.Stato non è in esplorati e non è in frontiera then
               if Problema.TestObiettivo(figlio.Stato) then return Soluzione(figlio)
               frontiera = Inserisci(figlio, frontiera)   /* in coda
```

Ricerca-grafo UC

```
function Ricerca-UC-G (problema)
    returns soluzione oppure fallimento
   nodo = un nodo con stato il problema.stato-iniziale e costo-di-cammino=0
    frontiera = una coda con priorità con nodo come unico elemento
    esplorati = insieme vuoto
 loop do
    if Vuota?(frontiera) then return fallimento
    nodo = POP(frontiera);
    if problema.TestObiettivo(nodo.Stato) then return Soluzione(nodo)
    aggiungi nodo.Stato  a esplorati
    for each azione in problema.Azioni(nodo.Stato) do
            figlio = Nodo-Figlio(problema, nodo, azione)
            if figlio.Stato non è in esplorati e non è in frontiera then
                frontiera = Inserisci(figlio, frontiera)   /* in coda con priorità
            else if figlio.Stato è in frontiera con Costo-cammino più alto then
                sostituisci quel nodo frontiera con figlio
```

Spostata per esaminare post-espansione e vedere il costo minore

$g(n)$

Conclusioni

- Un agente per “problem solving” adotta un paradigma generale di risoluzione dei problemi:
  - Formula il problema
  - Ricerca la soluzione nello spazio degli stati
- Strategie “non informate” per la ricerca della soluzione
- Prossima volta: come si può ricercare “meglio”
- BIB: AIMA Cap 3 (fino a 3.4)

Per informazioni

Alessio Micheli

micheli@di.unipi.it

Dipartimento di Informatica
Università di Pisa - Italy

Computational Intelligence &
Machine Learning Group