Esame di Ricerca Operativa del 09/02/2016

(Cognome)	(Nome)	(Matricola)

Esercizio 1. Una sartoria produce 3 tipi di vestiti: pantaloni, gonne e giacche, utilizzando stoffa e filo. Settimanalmente, la disponibilità delle materie prime impiegate nella produzione è pari a 70 m di stoffa e 100 m di filo. Il costo al metro delle materie prime è rispettivamente di 8 euro e di 0.30 euro. La produzione di un paio di pantaloni richiede 2.5 m di stoffa e 3 m di filo, la produzione di una gonna richiede 1.5 m di stoffa e 1.5 m di filo, mentre la produzione di una giacca richiede 3.5 m di stoffa e 5 m di filo. I prezzi di vendita sono 40 euro per un paio di pantaloni, 30 euro per una gonna e 70 euro per una giacca. Determinare la produzione settimanale che massimizza il profitto sapendo che, per soddisfare la richiesta di un negozio, la sartoria deve produrre almeno 5 pantaloni, 3 gonne e 2 giacche.

Variabili decisionali:

Modello:

Esercizio 2. Completare la seguente tabella considerando il problema di programmazione lineare:

$$\begin{cases} \min\ 12\ y_2 - 2\ y_3 - 3\ y_4 + 10\ y_6 \\ -4\ y_2 + y_3 + 2\ y_4 + y_5 - 3\ y_6 = -1 \\ y_1 - 3\ y_2 + y_3 + y_4 - 2\ y_6 = -5 \\ y \geq 0 \end{cases}$$

Base	Soluzione di base	Ammissibile (si/no)	Degenere (si/no)
{2, 3}	$x =$		
{2, 4}	$y =$		

Esercizio 3. Effettuare due iterazioni dell'algoritmo del simplesso duale per il problema dell'esercizio 2.

	Base	x	y	Indice entrante	Rapporti	Indice uscente
1° iterazione	{4,6}					
2° iterazione						

Esercizio 4. Si consideri il seguente problema di programmazione lineare intera:

$$\begin{cases} \min\ 11\ x_1 + 7\ x_2 \\ 17\ x_1 + 16\ x_2 \geq 60 \\ 7\ x_1 + 12\ x_2 \geq 42 \\ x_1 \geq 0 \\ x_2 \geq 0 \\ x_1, x_2 \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

a) Calcolare una valutazione inferiore del valore ottimo risolvendo il rilassamento continuo.

sol. ottima del rilassamento = $\qquad\qquad$ $v_I(P) =$

b) Calcolare una valutazione superiore del valore ottimo arrotondando la soluzione ottima del rilassamento.

sol. ammissibile = $\qquad\qquad$ $v_S(P) =$

c) Calcolare un taglio di Gomory.

$r =$ $\qquad\qquad$ taglio:

Esercizio 5. Si consideri il problema di trovare il ciclo hamiltoniano di costo minimo su una rete di 5 città, le cui distanze reciproche sono indicate in tabella:

città	**2**	**3**	**4**	**5**
1	19	17	18	21
2		22	16	20
3			34	35
4				14

a) Trovare una valutazione inferiore del valore ottimo calcolando l'1–albero di costo minimo.

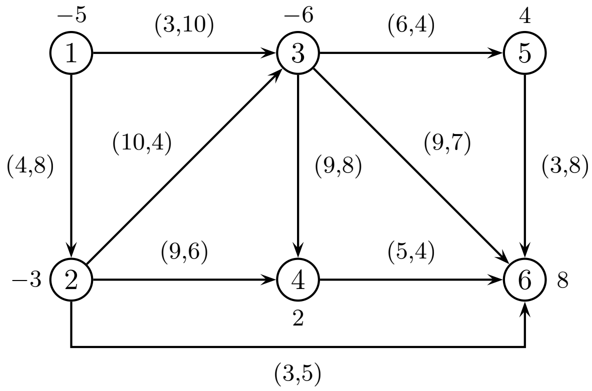
1–albero: $\qquad\qquad$ $v_I(P) =$

b) Trovare una valutazione superiore applicando l'algoritmo del nodo più vicino a partire dal nodo 2.

ciclo: $\qquad\qquad$ $v_S(P) =$

c) Applicare il metodo del *Branch and Bound*, utilizzando l'1–albero di costo minimo come rilassamento di ogni sottoproblema ed istanziando, nell'ordine, le variabili x_{34}, x_{35}, x_{45}.

Esercizio 6. Completare la seguente tabella considerando il problema di flusso di costo minimo sulla seguente rete (su ogni nodo è indicato il bilancio e su ogni arco sono indicati, nell'ordine, il costo e la capacità).

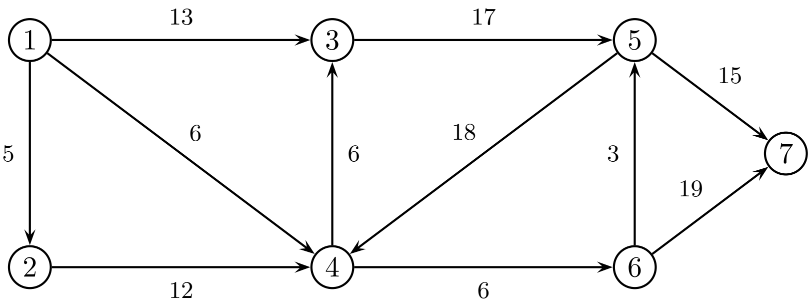


Archi di T	Archi di U	Soluzione di base	Ammissibile (si/no)	Degenere (si/no)
(1,2) (2,3) (2,4) (3,5) (4,6)	(1,3) (5,6)	$x =$		
(1,3) (2,3) (3,4) (3,5) (5,6)	(1,2) (4,6)	$\pi = (0,$		

Esercizio 7. Effettuare due iterazioni dell'algoritmo del simplesso su reti per il problema dell'esercizio 6.

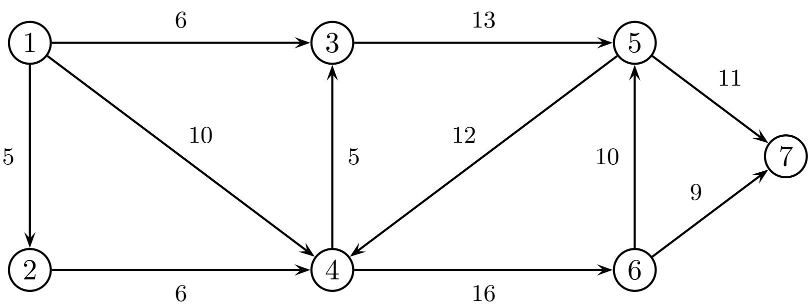
	1° iterazione	2° iterazione
Archi di T	(1,2) (1,3) (2,6) (3,4) (3,5)	
Archi di U	(2,3) (3,6)	
x		
π		
Arco entrante		
ϑ^+, ϑ^-		
Arco uscente		

Esercizio 8. a) Applicare l'algoritmo di Dijkstra per trovare l'albero dei cammini minimi di radice 1 sulla seguente rete.



	iter 1		iter 2		iter 3		iter 4		iter 5		iter 6		iter 7	
	π	p	π	p	π	p	π	p	π	p	π	p	π	p
nodo visitato														
nodo 2														
nodo 3														
nodo 4														
nodo 5														
nodo 6														
nodo 7														
insieme Q														

b) Applicare l'algoritmo di Ford-Fulkerson (con la procedura di Edmonds-Karp per la ricerca del cammino aumentante) per trovare il flusso massimo tra il nodo 1 ed il nodo 7 sulla seguente rete.



cammino aumentante	δ	x	v

Taglio di capacità minima: $N_s =$ $N_t =$

SOLUZIONI

Esercizio 1. Variabili decisionali:
x_1 = numero di pantaloni
x_2 = numero di gonne
x_3 = numero di giacche

Modello:

$$\begin{cases} \max\ 40\,x_1 + 30\,x_2 + 70\,x_3 - 8\,(2.5\,x_1 + 1.5\,x_2 + 3.5\,x_3) - 0.3\,(3\,x_1 + 1.5\,x_2 + 5\,x_3) \\ 2.5\,x_1 + 1.5\,x_2 + 3.5\,x_3 \leq 70 \\ 3\,x_1 + 1.5\,x_2 + 5\,x_3 \leq 100 \\ x_1 \geq 5 \\ x_2 \geq 3 \\ x_3 \geq 2 \\ x_1, x_2, x_3 \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

Esercizio 2.

Base	Soluzione di base	Ammissibile (si/no)	Degenere (si/no)
$\{2,\ 3\}$	$x = (-6,\ 4)$	NO	SI
$\{2,\ 4\}$	$y = \left(0,\ \frac{9}{2},\ 0,\ \frac{17}{2},\ 0,\ 0\right)$	SI	NO

Esercizio 3.

	Base	x	y	Indice entrante	Rapporti	Indice uscente
1° iterazione	$\{4,\ 6\}$	$(4,\ -11)$	$(0,\ 0,\ 0,\ 13,\ 0,\ 9)$	2	$13,\ \frac{9}{2}$	6
2° iterazione	$\{2,\ 4\}$	$\left(\frac{3}{2},\ -6\right)$	$\left(0,\ \frac{9}{2},\ 0,\ \frac{17}{2},\ 0,\ 0\right)$	5	$9,\ \frac{17}{3}$	4

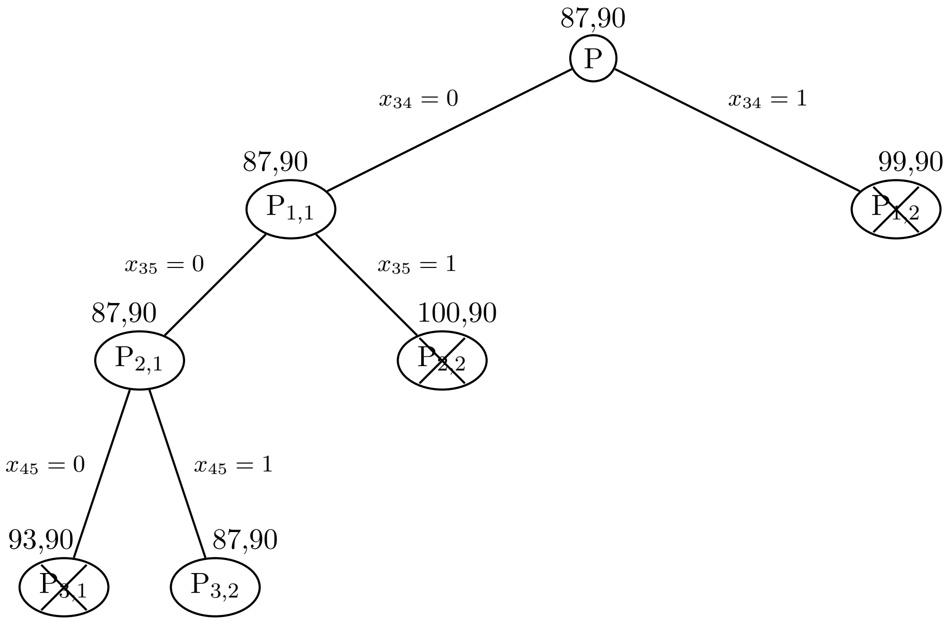
Esercizio 4.
a) sol. ottima del rilassamento $= \left(0, \frac{15}{4}\right)$ $\qquad v_I(P) = 27$
b) sol. ammissibile $= (0, 4)$ $\qquad v_S(P) = 28$
c) $r = 2$ $\qquad 16\,x_1 + 15\,x_2 \geq 57$

Esercizio 5.

a) 1–albero: (1 , 3) (1 , 4) (2 , 3) (2 , 4) (4 , 5) $v_I(P) = 87$

b) ciclo: 2 – 4 – 5 – 1 – 3 $v_S(P) = 90$

c)



Esercizio 6.

Archi di T	Archi di U	Soluzione di base	Ammissibile (si/no)	Degenere (si/no)
(1,2) (2,3) (2,4) (3,5) (4,6)	(1,3) (5,6)	$x = (-5,\ 10,\ -4,\ 2,\ 0,\ 0,\ 12,\ 0,\ 0,\ 8)$	NO	SI
(1,3) (2,3) (3,4) (3,5) (5,6)	(1,2) (4,6)	$\pi = (0,\ -7,\ 3,\ 12,\ 9,\ 12)$	NO	SI

Esercizio 7.

	1° iterazione	2° iterazione
Archi di T	(1,2) (1,3) (2,6) (3,4) (3,5)	(1,3) (2,3) (2,6) (3,4) (3,5)
Archi di U	(2,3) (3,6)	(3,6)
x	(2, 3, 4, 0, 1, 2, 4, 7, 0, 0)	(0, 5, 2, 0, 1, 2, 4, 7, 0, 0)
π	(0, 4, 3, 12, 9, 7)	(0, −7, 3, 12, 9, −4)
Arco entrante	(2,3)	(2,4)
ϑ^+, ϑ^-	7 , 2	6 , 2
Arco uscente	(1,2)	(2,3)

Esercizio 8.

a)

	iter 1		iter 2		iter 3		iter 4		iter 5		iter 6		iter 7	
	π	p	π	p	π	p	π	p	π	p	π	p	π	p
nodo visitato	1		2		4		3		6		5		7	
nodo 2	5	1	5	1	5	1	5	1	5	1	5	1	5	1
nodo 3	13	1	13	1	12	4	12	4	12	4	12	4	12	4
nodo 4	6	1	6	1	6	1	6	1	6	1	6	1	6	1
nodo 5	$+\infty$	-1	$+\infty$	-1	$+\infty$	-1	29	3	15	6	15	6	15	6
nodo 6	$+\infty$	-1	$+\infty$	-1	12	4	12	4	12	4	12	4	12	4
nodo 7	$+\infty$	-1	$+\infty$	-1	$+\infty$	-1	$+\infty$	-1	31	6	30	5	30	5
insieme Q	2, 3, 4		3, 4		3, 6		5, 6		5, 7		7		$\emptyset$	

b)

cammino aumentante	δ	x	v
1 - 3 - 5 - 7	6	(0, 6, 0, 0, 6, 0, 0, 0, 6, 0, 0)	6
1 - 4 - 6 - 7	9	(0, 6, 9, 0, 6, 0, 9, 0, 6, 0, 9)	15
1 - 4 - 3 - 5 - 7	1	(0, 6, 10, 0, 7, 1, 9, 0, 7, 0, 9)	16
1 - 2 - 4 - 3 - 5 - 7	4	(4, 6, 10, 4, 11, 5, 9, 0, 11, 0, 9)	20

Taglio di capacità minima: $N_s = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ $N_t = \{7\}$