Esame di Ricerca Operativa del 19/01/2016

(Cognome)	(Nome)	(Matricola)

Esercizio 1. Una banca offre ai suoi clienti 3 diversi tipi di prestito: mutuo casa, credito auto, credito famiglia, che rendono un interesse annuo rispettivamente del 4%, 7% e 6%. La banca ha a disposizione 250 milioni di euro e deve erogare i prestiti in modo che:

- il mutuo casa rappresenti almeno il 40% di tutti i prestiti erogati;
- il credito auto non superi il 30% di tutti i prestiti erogati;
- il tasso di interesse medio su tutti i prestiti non superi il 5.5%.

La banca vuole determinare quanti euro erogare per ogni tipo di prestito in modo da massimizzare il suo profitto.

variabili decisionali:
modello:

Esercizio 2. Completare la seguente tabella considerando il problema di programmazione lineare:

$$\begin{cases} \max\ -x_1 + x_2 \\ -x_1 + 2\,x_2 \le 6 \\ x_1 + x_2 \le 3 \\ -x_1 \le 2 \\ -x_2 \le 2 \\ x_1 \le 3 \\ x_1 - x_2 \le 5 \end{cases}$$

Base	Soluzione di base	Ammissibile (si/no)	Degenere (si/no)
$\{1, 2\}$	$x =$		
$\{5, 6\}$	$y =$		

Esercizio 3. Effettuare due iterazioni dell'algoritmo del simplesso primale per il problema dell'esercizio 2.

	Base	x	y	Indice uscente	Rapporti	Indice entrante
1° iterazione	{4,5}					
2° iterazione						

Esercizio 4. Si consideri il seguente problema di programmazione lineare intera:

$$\begin{cases} \min\ 5\,x_1 + 14\,x_2 \\ 16\,x_1 + 6\,x_2 \geq 43 \\ 7\,x_1 + 8\,x_2 \geq 51 \\ x_1 \geq 0 \\ x_2 \geq 0 \\ x_1, x_2 \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

a) Calcolare una valutazione inferiore del valore ottimo risolvendo il rilassamento continuo.

sol. ottima del rilassamento =	$v_I(P) =$

b) Calcolare una valutazione superiore del valore ottimo arrotondando la soluzione ottima del rilassamento.

sol. ammissibile =	$v_S(P) =$

c) Calcolare un taglio di Gomory.

$r =$	taglio:

Esercizio 5. Si consideri il problema di trovare il ciclo hamiltoniano di costo minimo su una rete di 5 città, le cui distanze reciproche sono indicate in tabella:

città	**2**	**3**	**4**	**5**
1	21	26	18	17
2		15	14	28
3			13	16
4				20

a) Trovare una valutazione inferiore del valore ottimo calcolando il 2–albero di costo minimo.

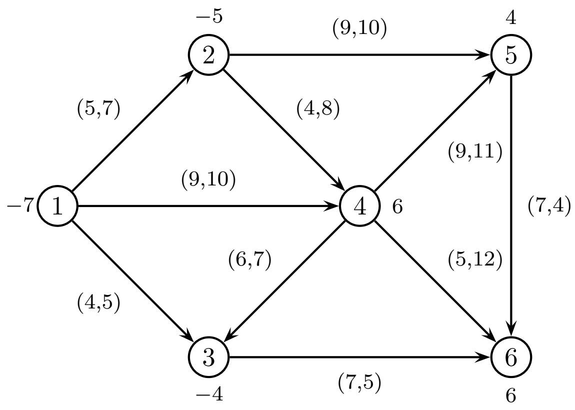
2–albero:	$v_I(P) =$

b) Trovare una valutazione superiore applicando l'algoritmo del nodo più vicino a partire dal nodo 5.

ciclo:	$v_S(P) =$

c) Applicare il metodo del *Branch and Bound*, utilizzando il 2–albero di costo minimo come rilassamento di ogni sottoproblema ed istanziando, nell'ordine, le variabili x_{23}, x_{34}, x_{24}.

Esercizio 6. Completare la seguente tabella considerando il problema di flusso di costo minimo sulla seguente rete (su ogni nodo è indicato il bilancio e su ogni arco sono indicati, nell'ordine, il costo e la capacità).

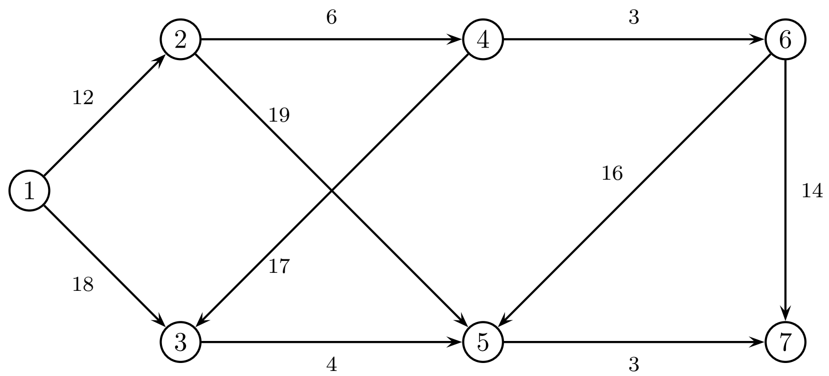


Archi di T	Archi di U	Soluzione di base	Ammissibile (si/no)	Degenere (si/no)
(1,2) (2,4) (2,5) (3,6) (5,6)	(4,3) (4,6)	$x =$		
(1,2) (1,4) (3,6) (4,5) (5,6)	(1,3) (4,6)	$\pi = (0,$		

Esercizio 7. Effettuare due iterazioni dell'algoritmo del simplesso su reti per il problema dell'esercizio 6.

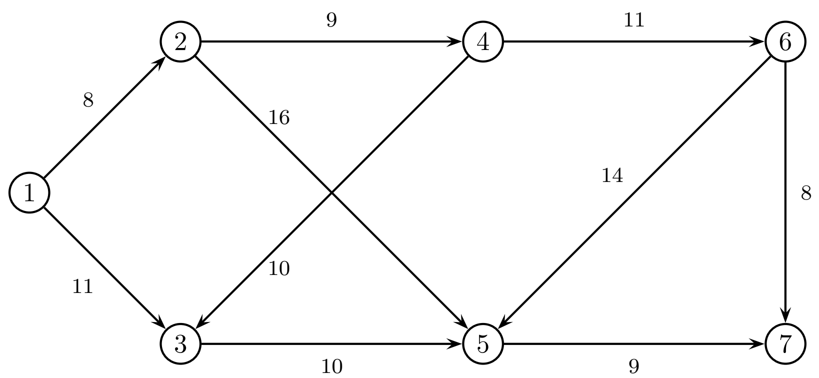
	1° iterazione	2° iterazione
Archi di T	(1,4) (2,5) (3,6) (4,5) (5,6)	
Archi di U	(1,2) (2,4)	
x		
π		
Arco entrante		
ϑ^+, ϑ^-		
Arco uscente		

Esercizio 8. a) Applicare l'algoritmo di Dijkstra per trovare l'albero dei cammini minimi di radice 1 sulla seguente rete.



	iter 1		iter 2		iter 3		iter 4		iter 5		iter 6		iter 7	
	π	p	π	p	π	p	π	p	π	p	π	p	π	p
nodo visitato														
nodo 2														
nodo 3														
nodo 4														
nodo 5														
nodo 6														
nodo 7														
insieme Q														

b) Applicare l'algoritmo di Ford-Fulkerson (con la procedura di Edmonds-Karp per la ricerca del cammino aumentante) per trovare il flusso massimo tra il nodo 1 ed il nodo 7 sulla seguente rete.



cammino aumentante	δ	x	v

Taglio di capacità minima: $N_s =$ $N_t =$

SOLUZIONI

Esercizio 1. Variabili decisionali:
x_1 = milioni di euro erogati per il mutuo casa
x_2 = milioni di euro erogati per il credito auto
x_3 = milioni di euro erogati per il credito famiglia

Modello:

$$\begin{cases} \max\ 0.04\,x_1 + 0.07\,x_2 + 0.06\,x_3 \\ x_1 + x_2 + x_3 \leq 250 \\ x_1 \geq 0.4\,(x_1 + x_2 + x_3) \\ x_2 \leq 0.3\,(x_1 + x_2 + x_3) \\ 0.04\,x_1 + 0.07\,x_2 + 0.06\,x_3 \leq 0.055\,(x_1 + x_2 + x_3) \\ x_1, x_2, x_3 \geq 0 \end{cases}$$

Esercizio 2.

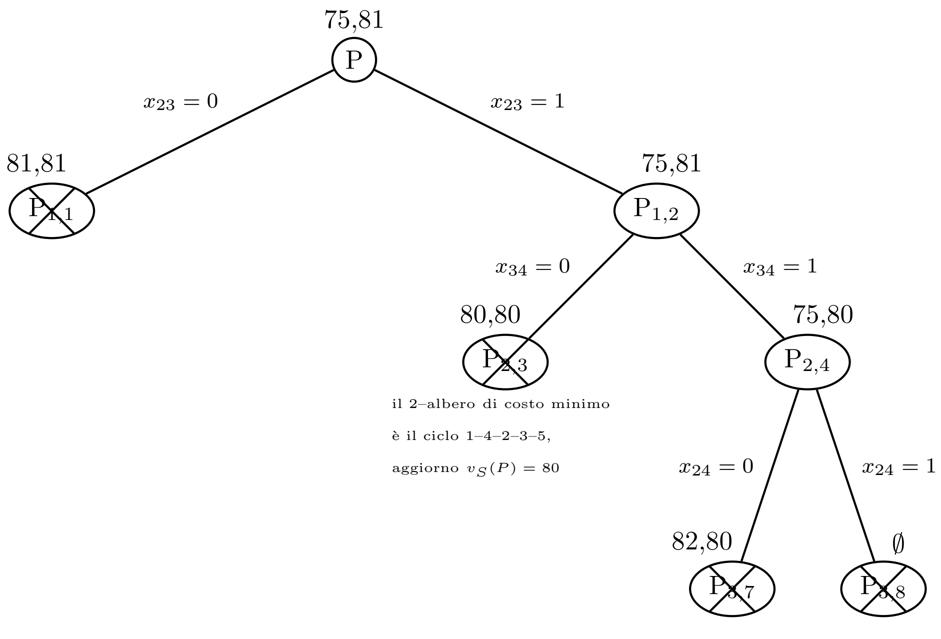
Base	Soluzione di base	Ammissibile (si/no)	Degenere (si/no)
$\{1,\ 2\}$	$x = (0,\ 3)$	SI	NO
$\{5,\ 6\}$	$y = (0,\ 0,\ 0,\ 0,\ 0,\ -1)$	NO	SI

Esercizio 3.

	Base	x	y	Indice uscente	Rapporti	Indice entrante
1° iterazione	$\{4,\ 5\}$	$(3,\ -2)$	$(0,\ 0,\ 0,\ -1,\ -1,\ 0)$	4	$\frac{13}{2},\ 2$	2
2° iterazione	$\{2,\ 5\}$	$(3,\ 0)$	$(0,\ 1,\ 0,\ 0,\ -2,\ 0)$	5	$3,\ 5$	1

Esercizio 4.
a) sol. ottima del rilassamento = $\left(\frac{51}{7}, 0\right)$ $\qquad v_I(P) = 37$
b) sol. ammissibile = $(8, 0)$ $\qquad v_S(P) = 40$
c)
$r = 1 \qquad 6\,x_1 + 7\,x_2 \geq 44$
$r = 3 \qquad 5\,x_1 + 6\,x_2 \geq 37$

Esercizio 5.
a) 2–albero: (1 , 5) (2 , 3) (2 , 4) (3 , 4) (3 , 5) $\qquad v_I(P) = 75$
b) ciclo: 5 – 3 – 4 – 2 – 1 $\qquad v_S(P) = 81$
c)



Il ciclo ottimo è 1–4–2–3–5.

Esercizio 6.

Archi di T	Archi di U	Soluzione di base	Ammissibile (si/no)	Degenere (si/no)
(1,2) (2,4) (2,5) (3,6) (5,6)	(4,3) (4,6)	$x = (7,\ 0,\ 0,\ 25,\ -13,\ 11,\ 7,\ 0,\ 12,\ -17)$	NO	SI
(1,2) (1,4) (3,6) (4,5) (5,6)	(1,3) (4,6)	$\pi = (0,\ 5,\ 18,\ 9,\ 18,\ 25)$	NO	SI

Esercizio 7.

	1° iterazione	2° iterazione
Archi di T	(1,4) (2,5) (3,6) (4,5) (5,6)	(1,3) (2,5) (3,6) (4,5) (5,6)
Archi di U	(1,2) (2,4)	(1,2) (2,4)
x	(7, 0, 0, 8, 4, 4, 0, 2, 0, 2)	(7, 0, 0, 8, 4, 4, 0, 2, 0, 2)
π	(0, 9, 18, 9, 18, 25)	$(0,\ -5,\ 4,\ -5,\ 4,\ 11)$
Arco entrante	(1,3)	(1,2)
ϑ^+, ϑ^-	1 , 0	1 , 2
Arco uscente	(1,4)	(3,6)

Esercizio 8.

a)

	iter 1		iter 2		iter 3		iter 4		iter 5		iter 6		iter 7	
	π	p	π	p	π	p	π	p	π	p	π	p	π	p
nodo visitato	1		2		3		4		6		5		7	
nodo 2	12	1	12	1	12	1	12	1	12	1	12	1	12	1
nodo 3	18	1	18	1	18	1	18	1	18	1	18	1	18	1
nodo 4	$+\infty$	-1	18	2	18	2	18	2	18	2	18	2	18	2
nodo 5	$+\infty$	-1	31	2	22	3	22	3	22	3	22	3	22	3
nodo 6	$+\infty$	-1	$+\infty$	-1	$+\infty$	-1	21	4	21	4	21	4	21	4
nodo 7	$+\infty$	-1	$+\infty$	-1	$+\infty$	-1	$+\infty$	-1	35	6	25	5	25	5
insieme Q	2, 3		3, 4, 5		4, 5		5, 6		5, 7		7		$\emptyset$	

b)

cammino aumentante	δ	x	v
1 - 2 - 5 - 7	8	(8, 0, 0, 8, 0, 0, 0, 8, 0, 0)	8
1 - 3 - 5 - 7	1	(8, 1, 0, 8, 1, 0, 0, 9, 0, 0)	9
1 - 3 - 5 - 2 - 4 - 6 - 7	8	(8, 9, 8, 8, 9, 0, 8, 9, 0, 8)	17

Taglio di capacità minima: $N_s = \{1,3,5\}$ $N_t = \{2,4,6,7\}$