Esame di Ricerca Operativa del 09/04/2019

(Cognome)	(Nome)	(Numero di Matricola)

Esercizio 1. (a) Risolvere tramite l'algoritmo del simplesso il seguente problema di programmazione lineare:

$$\begin{cases} \max\ 4x_1 - 3x_2 \\ -x_1 + x_2 \leq 1 \\ 2x_1 - x_2 \leq 2 \\ x_1 - 2x_2 \leq 0 \\ -x_1 \leq 0 \\ -x_1 - x_2 \leq 1 \end{cases}$$

	Base	x	y	Indice uscente	Rapporti	Indice entrante
Iterazione 1	{1,4}					
Iterazione 2						
Iterazione 3						
Iterazione 4						

(b) Formulare il problema duale associato al problema definito in (a). Se ne determini una soluzione ottima discutendone l'unicità.

(c) Formulare il problema ausiliario associato al problema duale determinato al punto (b).

Esercizio 2. Tre distributori di carburante ($D1$, $D2$, $D3$) vengono riforniti da due raffinerie ($R1$, $R2$). Il costo di trasporto per ettolitro (hl) di carburante da ciascuna raffineria a ciascun distributore e' indicato nella seguente tabella, insieme alla disponibilità d_i, $i = 1, 2$, delle raffinerie e alle richieste r_j $j = 1, ., 3$, dei distributori.

	$D1$	$D2$	$D3$	d_i
$R1$	18	12	16	300
$R2$	20	10	14	200
r_j	200	150	100	

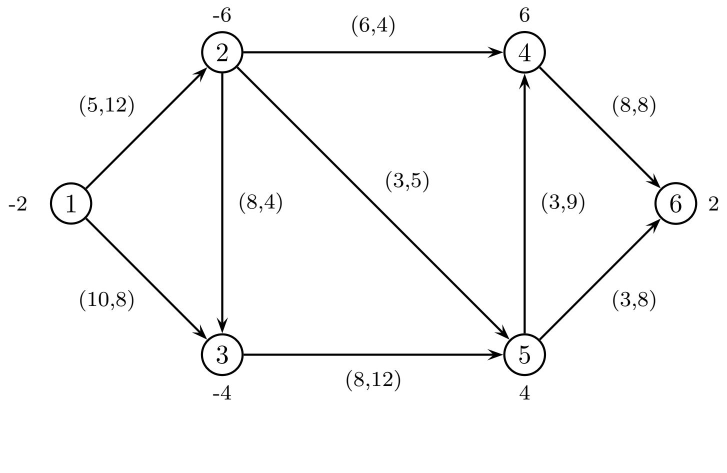
Sapendo che eventuali rimanenze di carburante provocano un aggravio dei costi pari a $10E/hl$ per $R1$ e a $12E/hl$ per $R2$, si formuli un problema di programmazione lineare con l'obbiettivo di minimizzare il costo complessivo di rifornimento del carburante.

variabili decisionali:

modello:

(b) Dimostrare l'esistenza della soluzione ottima del problema formulato al punto (a).

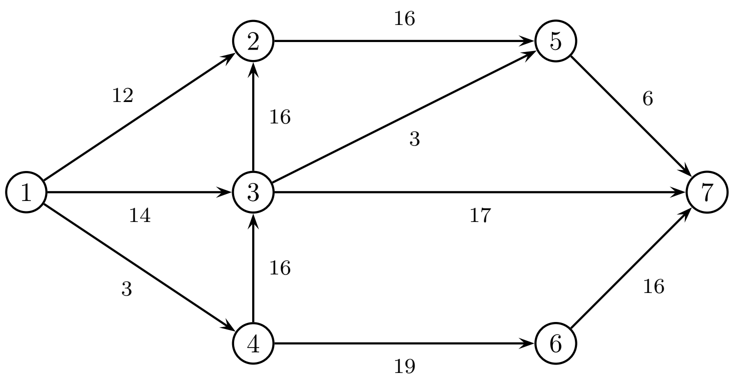
Esercizio 3. (a) Effettuare due iterazioni dell'algoritmo del simplesso su reti per il problema di flusso di costo minimo sulla seguente rete (su ogni nodo é indicato il bilancio e su ogni arco sono indicati, nell'ordine, il costo e la capacità).



	Iterazione 1	Iterazione 2
Archi di T	(1,3) (2,3) (3,5) (4,6) (5,4)	
Archi di U	(2,5)	
x		
π		
Arco entrante		
ϑ^+, ϑ^-		
Arco uscente		

(b) Dire se la regione ammissibile del problema duale associato al problema del flusso di costo minimo definito al punto (a) e' vuota. Giustificare la risposta.

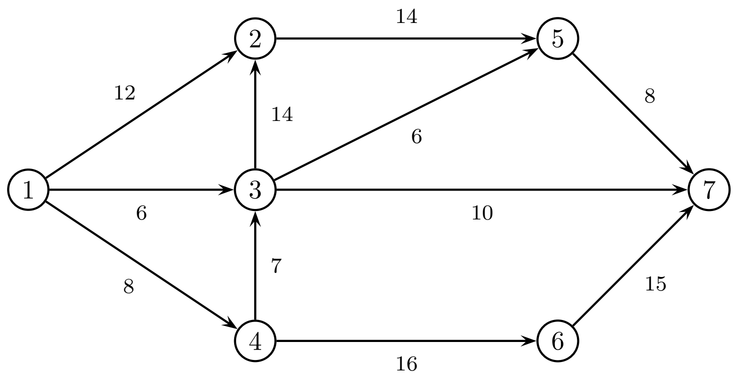
Esercizio 4. (a) Applicare l'algoritmo di Dijkstra per trovare l'albero dei cammini minimi di radice 1 sulla seguente rete.



	iter 1		iter 2		iter 3		iter 4		iter 5		iter 6		iter 7	
	π	p	π	p	π	p	π	p	π	p	π	p	π	p
nodo visitato														
nodo 2														
nodo 3														
nodo 4														
nodo 5														
nodo 6														
nodo 7														
insieme Q														

(b) Nella rete definita al punto (a), si rimpiazzi l'arco (3,5) con l'arco (5,3) assegnandogli un costo generico $k \in \mathbb{R}$. Si dica per quali valori di k il problema della ricerca dell'albero dei cammini minimi di radice 1 ammette soluzione. Giustificare la risposta.

Esercizio 5. (a) Applicare l'algoritmo di Ford-Fulkerson con la procedura di Edmonds-Karp per trovare il flusso massimo tra il nodo 1 ed il nodo 7 sulla seguente rete.



cammino aumentante	δ	x	v

Taglio di capacitá minima: $N_s =$ $N_t =$

(b) Si determini la capacitá del taglio $N_s = \{1, 2, 4, 5\}$, $N_t = \{3, 6, 7\}$ e se ne discuta l'ottimalitá.

SOLUZIONI

Esercizio 1. (a) Risolvere tramite l'algoritmo del simplesso il seguente problema di programmazione lineare:

$$\begin{cases} \max\ 4x_1 - 3x_2 \\ -x_1 + \ x_2 \le 1 \\ 2x_1 - \ x_2 \le 2 \\ \ x_1 - 2x_2 \le 0 \\ -x_1 \qquad \le 0 \\ -x_1 - x_2 \le 1 \end{cases}$$

	Base	x	y	Indice uscente	Rapporti	Indice entrante
Iterazione 1	{1,4}	$(0,1)$	$(-3,0,0,-1,0)$	1	$3,1,2$	3
Iterazione 2	{3,4}	$(0,0)$	$(0,0,\frac{3}{2},-\frac{5}{2},0)$	4	$\frac{4}{3}$	2
Iterazione 3	{2,3}	$(\frac{4}{3},\frac{2}{3})$	$(0,\frac{5}{3},\frac{2}{3},0,0)$			
Iterazione 4						

(b) Formulare il problema duale associato al problema definito in (a). Se ne determini una soluzione ottima discutendone l'unicità.

$$\begin{cases} \min(y_1 + 2y_2 + y_5) \\ -y_1 + 2y_2 + y_3 - y_4 - y_5 = 4 \\ y_1 - y_2 - 2y_3 \qquad - y_5 = -3 \\ y_i \ge 0, i = 1,..,5 \end{cases}$$

La soluzione ottima é $(0,\frac{5}{3},\frac{2}{3},0,0)$ ed é unica essendo la soluzione ottima $(\frac{4}{3},\frac{2}{3})$ del problema in (a) non degenere.

(c) Formulare il problema ausiliario associato al problema duale determinato al punto (b).

$$\begin{cases} \min(\epsilon_1 + \epsilon_2) \\ -y_1 + 2y_2 + y_3 - y_4 - y_5 + \epsilon_1 = 4 \\ -y_1 + y_2 + 2y_3 \qquad + y_5 + \epsilon_2 = 3 \\ y_i \ge 0, i = 1,..,5\ \epsilon_j \ge 0,\ j = 1,2 \end{cases}$$

Esercizio 2.

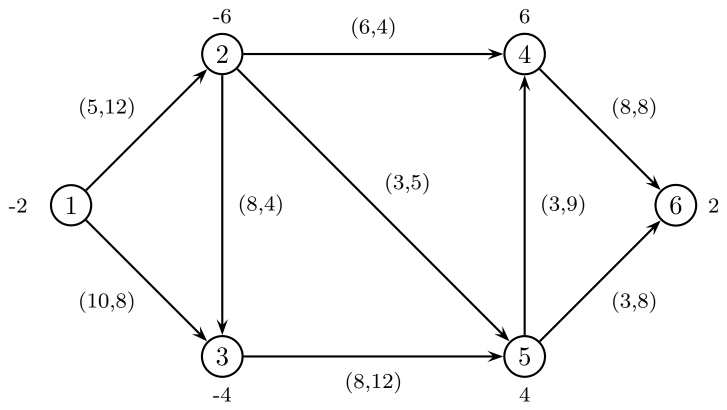
Variabili decisionali:
Sia x_{ij} = la quantitá (in ettolitri) di carburante rifornito dalla raffineria Ri al distributore Dj, $i = 1,2$, $j = 1,2,3$;

Modello:

$$\begin{cases} \min\ [18x_{11} + 12x_{12} + 16x_{13} + 20x_{21} + 10x_{22} + 14x_{23} + 10(300 - x_{11} - x_{12} - x_{13}) + 12(200 - x_{21} - x_{22} - x_{23})] \\ x_{11} + x_{21} = 200 \\ x_{12} + x_{22} = 150 \\ x_{13} + x_{23} = 100 \\ x_{11} + x_{12} + x_{13} \le 300 \\ x_{21} + x_{22} + x_{23} \le 200 \\ x_{ij} \ge 0,\ i = 1,2,\ j = 1,2,3 \end{cases}$$

(b) Dimostrare l'esistenza della soluzione ottima del problema formulato al punto (a).
La soluzione ottima del problema esiste in quanto la regione ammissibile é non vuota e limitata.

Esercizio 3. (a) Effettuare due iterazioni dell'algoritmo del simplesso su reti per il problema di flusso di costo minimo sulla seguente rete (su ogni nodo è indicato il bilancio e su ogni arco sono indicati, nell'ordine, il costo e la capacità).

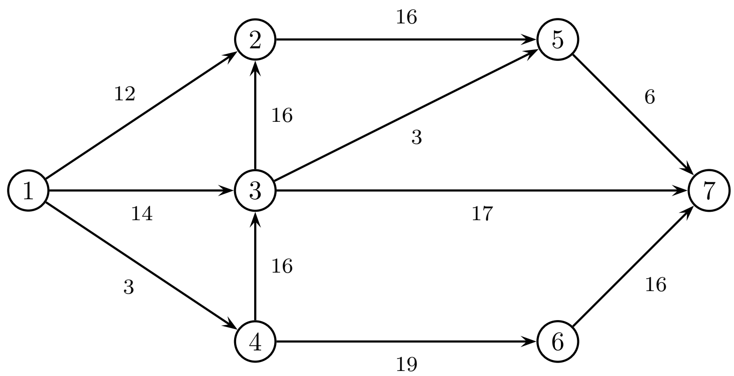


	iterazione 1	iterazione 2
Archi di T	(1,3) (2,3) (3,5) (4,6) (5,4)	(1,3) (2,4) (3,5) (4,6) (5,4)
Archi di U	(2,5)	(2,5)
x	(0, 2, 1, 0, 5, 7, 2, 8, 0)	(0, 2, 0, 1, 5, 6, 2, 7, 0)
π	(0, 2, 10, 21, 18, 29)	(0, 15, 10, 21, 18, 29)
Arco entrante	(2,4)	(1,2)
ϑ^+, ϑ^-	4 , 1	3 , 2
Arco uscente	(2,3)	(1,3)

(b) Dire se la regione ammissibile del problema duale associato al problema del flusso di costo minimo definito al punto (a) e' vuota. Giustificare la risposta.

La regione ammissibile del problema duale associato al problema del flusso di costo minimo definito al punto (a) e' non vuota in quanto il problema del flusso di costo minimo ammette ottimo finito essendo la sua regione ammissibile non vuota e limitata. Il teorema di dualita' forte assicura che anche il problema duale ha ottimo finito e pertanto la regione ammissibile del problema duale é non vuota.

Esercizio 4. a) Applicare l'algoritmo di Dijkstra per trovare l'albero dei cammini minimi di radice 1 sulla seguente rete.

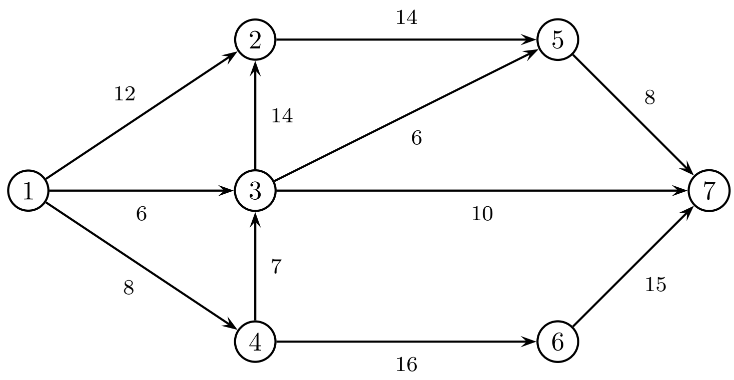


	iter 1		iter 2		iter 3		iter 4		iter 5		iter 6		iter 7	
	π	p	π	p	π	p	π	p	π	p	π	p	π	p
nodo visitato	1		4		2		3		5		6		7	
nodo 2	12	1	12	1	12	1	12	1	12	1	12	1	12	1
nodo 3	14	1	14	1	14	1	14	1	14	1	14	1	14	1
nodo 4	3	1	3	1	3	1	3	1	3	1	3	1	3	1
nodo 5	$+\infty$	-1	$+\infty$	-1	28	2	17	3	17	3	17	3	17	3
nodo 6	$+\infty$	-1	22	4	22	4	22	4	22	4	22	4	22	4
nodo 7	$+\infty$	-1	$+\infty$	-1	$+\infty$	-1	31	3	23	5	23	5	23	5
insieme Q	2, 3, 4		2, 3, 6		3, 5, 6		5, 6, 7		6, 7		7		$\emptyset$	

(b) Nella rete definita al punto (a), si rimpiazzi l'arco (3,5) con l'arco (5,3) assegnandogli un costo generico $k \in \mathbb{R}$. Si dica per quali valori di k il problema della ricerca dell'albero dei cammini minimi di radice 1 ammette soluzione. Giustificare la risposta.

Il problema della ricerca dell'albero dei cammini minimi di radice 1 ammette soluzione ottima per $k \geq -32$. Infatti inserendo l'arco (5,3) si viene a creare il ciclo orientato 3-2-5-3 di costo $32 + k$. Tale costo deve necessariamente essere non negativo, da cui la condizione $k \geq -32$.

Esercizio 5. (a) Applicare l'algoritmo di Ford-Fulkerson (con la procedura di Edmonds-Karp per la ricerca del cammino aumentante) per trovare il flusso massimo tra il nodo 1 ed il nodo 7 sulla seguente rete.



cammino aumentante	δ	x	v
1 - 3 - 7	6	(0, 6, 0, 0, 0, 0, 6, 0, 0, 0, 0)	6
1 - 2 - 5 - 7	8	(8, 6, 0, 8, 0, 0, 6, 0, 0, 8, 0)	14
1 - 4 - 3 - 7	4	(8, 6, 4, 8, 0, 0, 10, 4, 0, 8, 0)	18
1 - 4 - 6 - 7	4	(8, 6, 8, 8, 0, 0, 10, 4, 4, 8, 4)	22

Taglio di capacità minima: $N_s = \{1, 2, 5\}$ $\quad N_t = \{3, 4, 6, 7\}$

(b) Si determini la capacità del taglio $N_s = \{1, 2, 4, 5\}$, $N_t = \{3, 6, 7\}$ e se ne discuta l'ottimalitá.

La capacitá del taglio $N_s = \{1, 2, 4, 5\}$, $N_t = \{3, 6, 7\}$ é: $u_{13} + u_{43} + u_{46} + u_{57} = 37$. Il taglio non é ottimale essendo la sua capacità strettamente maggiore di 22.