ALBERI BINARI DI RICERCA

Costruire un ABR a partire da una sequenza di valori

- insord x sbt

costruisce un nuovo albero binario di ricerca che contiene x

```
let rec buildtree l = match l with
        []  ⟶  Void
  | x::xs  ⟶  insord x (buildtree xs);;
```

INSERIMENTO ORDINATO

```
let rec insord x sbt = match sbt with
    Void -> Node (x, Void, Void)
  | Node (y, lt, rt) when x <= y ->
        Node (y, insord x lt, rt)
  | Node (y, lt, rt) when x > y ->
        Node (y, lt, insord x rt) ;;

insord : 'a -> 'a btree -> 'a btree = <fun>
```

```
let rec buildtree l =
        let rec insord x sbt = ......

in      match l with
        []      ->      Void    |
    x::xs   ->      insord x (buildtree xs);;
```

```
buildtree : 'a list -> 'a btree = <fun>
```

buildtree [3; 5; 1]

= insord 3 (buildtree [5; 1])

= insord 3 (insord 5 (buildtree [1]))

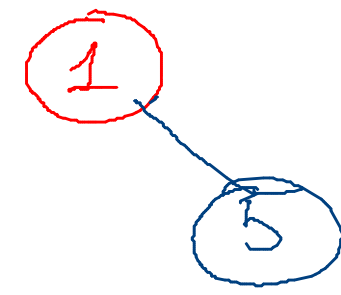
= insord 3 (insord 5 (insord 1 (buildtree [])))

= insord 3 (insord 5 (insord 1 Void))

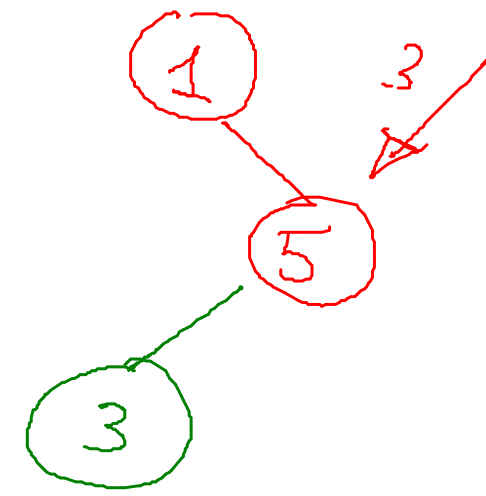
= insord 3 (insord 5 Node (1, Void, Void))

= insord 3 (Node (5, Node (1, Void, Void), Void))

= Node (3, Node (1, Void, Node (5, Void, Void)))



= Node (1, Void, insord 3 Node (5, Void, Void))



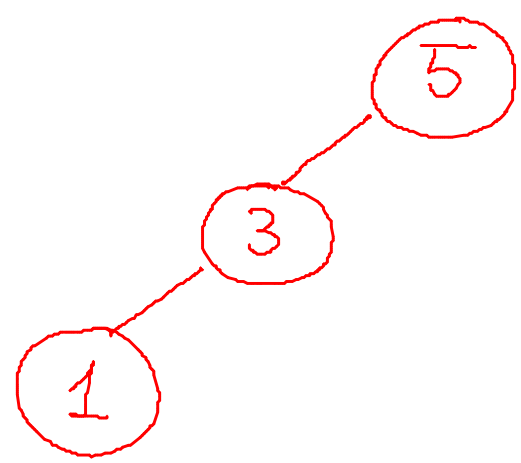
=

Node (1, Void, Node (5, insord 3 Void, Void))

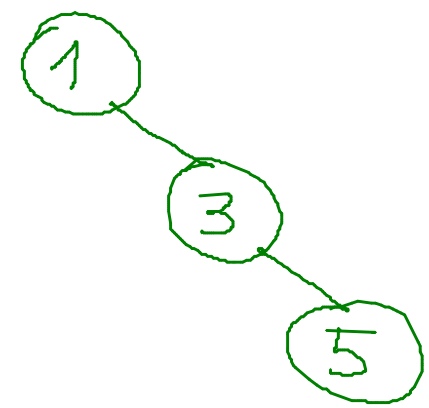
=

Node (1, Void, Node (5, Node (3, Void, Void), Void))

buildtree [1; 3; 5]



buildtree [5; 3; 1]



PARADIGMA IMPERATIVO

Il calcolo avviene attraverso transizioni di STATO

Costrutti linguistici per MODIFICARE lo stato e per guidare (controllare) le modifiche successive dello stato

modifica →

- assegnamento — nome := espressione
- sequenza
- condizionale — if E then C1 else C2 fi
- iterazione — while E do C endw

STATO: insieme di associazioni tra nomi e valori

CALCOLO DEL MCD

$\{ \langle x, A \rangle , \langle y, B \rangle \}$ $\quad A, B > \emptyset$

```
while x ≠ y do
    if x > y then x := x - y;
    else y := y - x;
fi
endw
```

$\{ \langle x , mcd(A,B) \rangle \}$

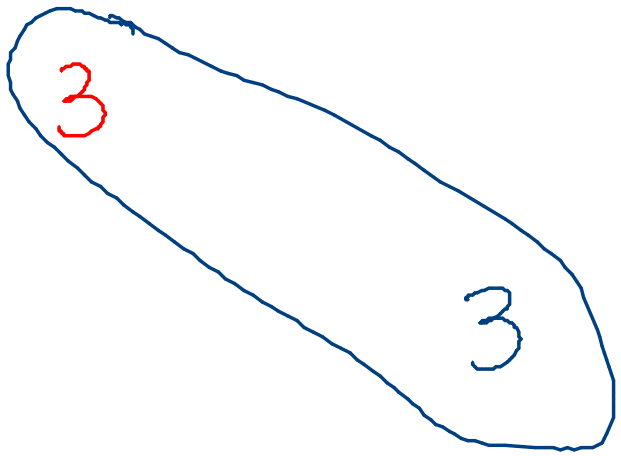
$mcd(x,x) = x$

$mcd(x,y) =$
$\quad mcd(x-y, y)$
$\quad$ se $x > y$

$mcd(x,y) =$
$\quad mcd(x, y-x)$
$\quad$ se $y > x$

x	y
9	15
	6

$y := y - x$

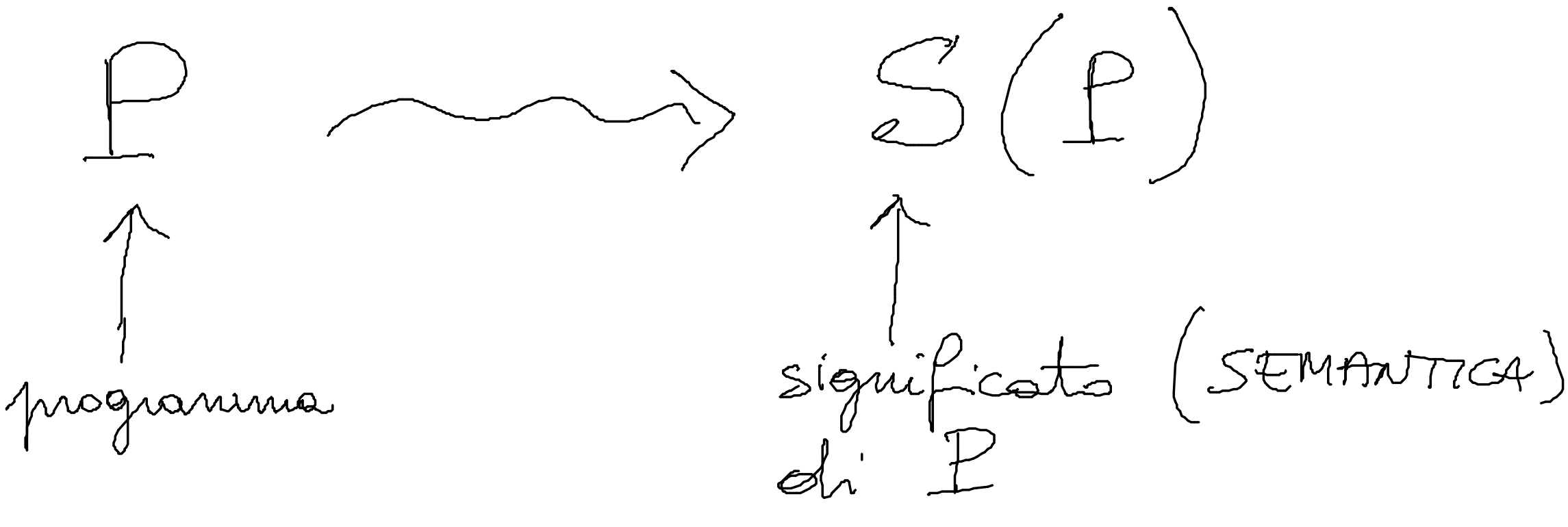


$x := x - y$

$y := y - x$

3 è il $mcd(9,15)$

SEMANTICA DEI PROGRAMMI IMPERATIVI



- Semantica OPERAZIONALE
- Semantica DENOTAZIONALE: il significato di P viene dato attraverso una FUNZIONE (definibile in CAML)

P è il programma che calcola MCD

S(P) sarà una funzione che, a partire da una RAPPRESENTAZIONE di uno stato iniziale $\{\langle x, A\rangle, \langle y, B\rangle\}$ (con $A, B > \emptyset$) calcola un nuovo stato

$$\{\langle x, mcd(A,B)\rangle\}$$

$$f_P : Stati \longrightarrow Stati$$

$$f_P\left(\{\langle x, A\rangle, \langle y, B\rangle\}\right) = \{\langle x, mcd(A,B)\rangle\}$$

MODELLO DELLO STATO

Concetti preliminari:

FRAME $f : A \longrightarrow B$

A e B sono due insiemi (domini) dati

f può essere anche PARZIALE

non definita su alcuni elementi di A

- Estensione di B, $B_\perp$ (B "bottom")

$$f : A \longrightarrow B_\perp$$

$f(a) = b$ $\quad a \in A \quad b \in B$

$f(a) = \perp$ $\quad a \in A$ e non esiste $b \in B$ tale che $f(a) = b$

sta per indefinito (NON DEFINITO)

se $f(a) = \perp$ allora che all'elemento $a \in A$ non è associato alcun elemento $b \in B$

$$B_\perp = B \cup \{\perp\}$$

ESEMPIO

Consideriamo $A = \mathbb{N}$ $B = \{\#, \$\}$

Sia $f : A \to B$ il seguente frame

$f(\emptyset) = \#$

$f(55) = \#$

$f(10) = \$$

è una funzione PARZIALE

L'estensione TOTALE di f è la seguente

$f_\perp : A \to B \cup \{\perp\}$

$f_\perp(x) = \begin{cases} \# & \text{se } x = \emptyset \vee x = 55 \\ \$ & \text{se } x = 10 \\ \perp & \text{altrimenti} \end{cases}$

RAPPRESENTAZIONE TABELLARE dei fonce

$$f : Nomi \longrightarrow \mathbb{N}_{\perp}$$

$$f(x) = \begin{cases} 10 & \text{se } x = \text{pippo} \\ 20 & \text{se } x = \text{pluto} \\ \perp & \text{altrimenti} \end{cases}$$

↳ è una metavariabile che usiamo per rappresentare il "generico" elemento di Nomi

Rappresentazione di f

pippo	10
pluto	20

1) ogni riga corrisponde ad un nome al quale f associa un valore in $\mathbb{N}$

2) l'assenza di una riga per un nome significa $f(x) = \perp$

a	20
b	30
c	10
d	50

$$g(x) = \begin{cases} 20 & \text{se } x = a \\ 30 & \text{se } x = b \\ 10 & \text{se } x = c \\ 50 & \text{se } x = d \\ \perp & \text{altrimenti} \end{cases}$$

FRAME "SPECIALE"

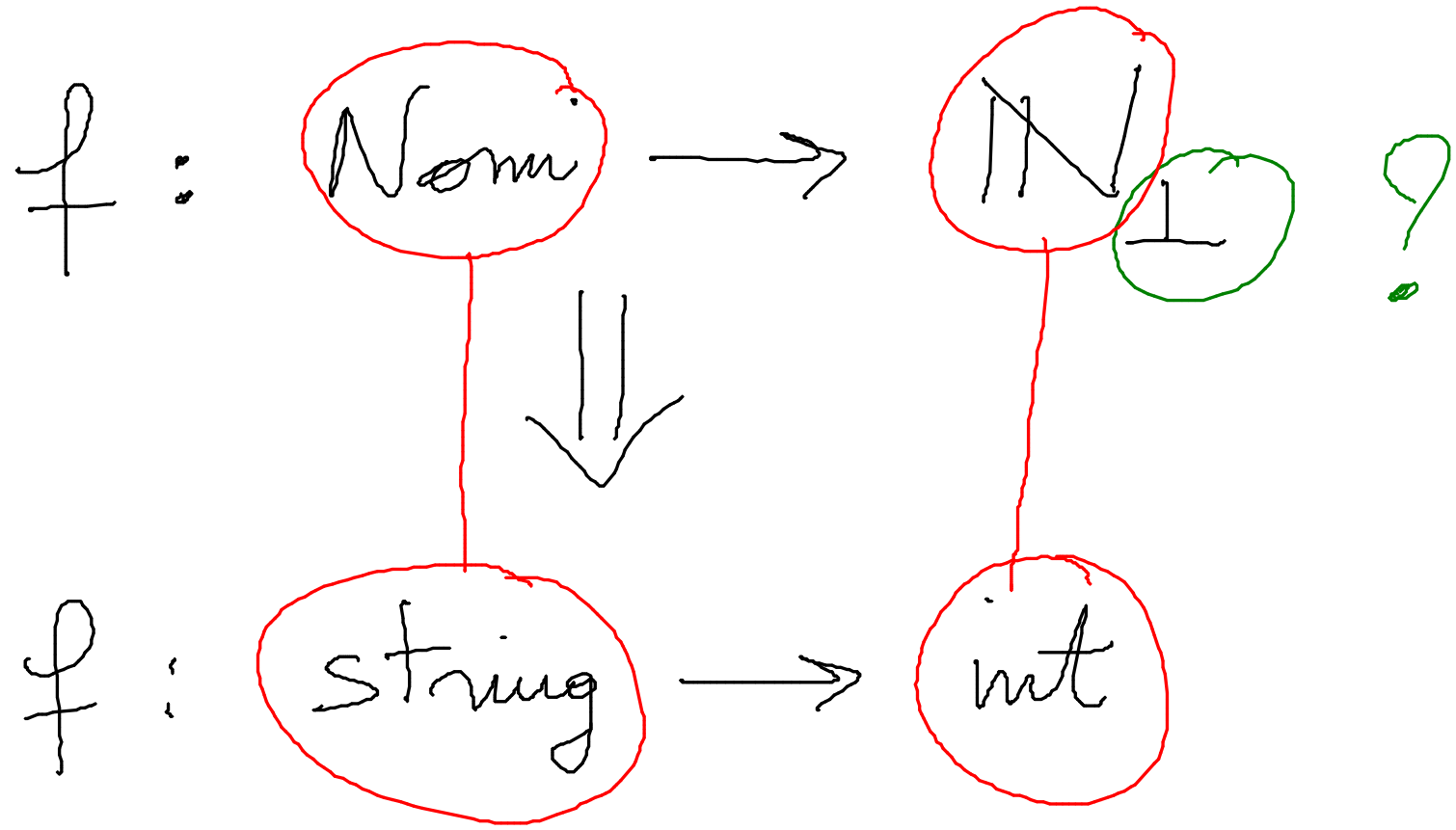
Corrisponde alla tabella priva di righe (vuota) ovunque INDEFINITO, non associa alcun valore ad alcun elemento del dominio

(omega) $\omega : A \to B_\perp$ tale che

$\omega(a) = \perp$ per ogni $a \in A$

RAPPRESENTAZIONE CAML dei frame

f : 'a ⟶ 'b bottom



type 'b bottom = Bottom | Def of 'b

```
# Def 3 ;;
- : int bottom = Def 3.

# Bottom ;;
- : 'a bottom = Bottom

# Def true ;;
- : bool bottom = Def true
```

Cosa è un frame in questa rappresentazione

$f : \ 'a \rightarrow \ 'b \text{ bottom}$

FRAME ω

```
let omega x = Bottom ;;
```

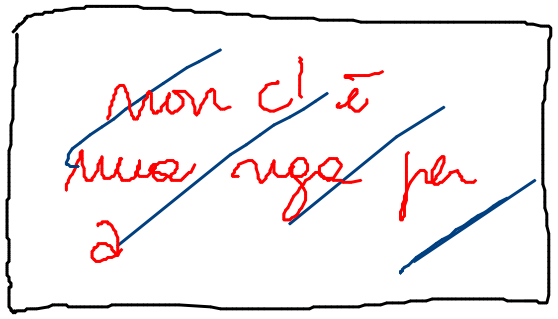
$$\text{omega} : \underbrace{'a}_{x} \longrightarrow \underbrace{'b \text{ bottom}}_{\text{risultato}}$$

OPERAZIONI SU FRAME

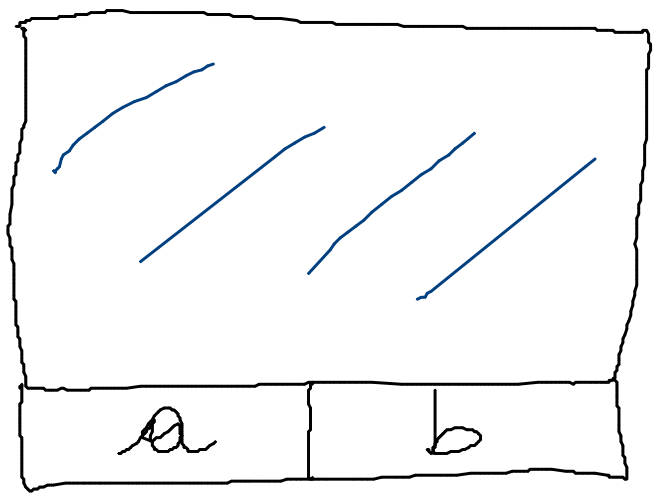
- aggiunta di una ASSOCIAZIONE (aggiunta di una riga nella tabella)
- modifica di una ASSOCIAZIONE (modificare la colonna destra in una particolare riga)
- ricerca del valore b associato ad un determinato elemento $a \in A$

$$f : A \longrightarrow B_\perp$$

AGGIUNTA ASSOCIAZIONE : $f : A \to B_\perp$

f 

- supponiamo che $f(a) = \perp$
- vogliamo costruire un nuovo frame in cui c'è anche la riga | a | b |
dove $b \in B$
- lasciare inalterate tutte le altre righe



frame ottenuto da f aggiungendo l'associazione $\langle a, b \rangle$

Operazione coinvolge 3 oggetti:

- f : il frame di partenza
- $a \in A$ elemento per cui vogliamo aggiungere un'associazione
- $b \in B$ l'oggetto che vogliamo associare ad a

f

x	10
y	20

aggiungere $\langle w, 30 \rangle$

x	10
y	20
w	30

f

$f(w) = \bot$

FORMALMENTE

Dati $f : A \to B_{\perp}$, $a \in A$, $b \in B$

con $f(a) = \perp$, rappresentiamo con

$g = f[b/a]$ aold

il nome ottenuto da f aggiungendo l'associazione $\langle a, b \rangle$

NUOVO

$$g = f\left[\frac{b}{a}\right]^{odd}$$

$$g : A \longrightarrow B_{\perp}$$

$$g(x) = \begin{cases} b & \text{if } x = a \\ f(x) & \text{if } x \neq a \end{cases}$$

f

x	10
y	20

$f[50/W]$ addd $= g$

g

x	10
y	20
W	50

$$g(z) = \begin{cases} \underline{50} & \text{se } \underline{z = W} \\ 10 & \text{se } z = x \\ 20 & \text{se } z = y \\ \underline{1} & \text{altrimenti} \end{cases}$$

$$f(z) = \begin{cases} 10 & \text{se } z = x \\ 20 & \text{se } z = y \\ 1 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

$f\left[\frac{10}{a}\right]$ addol

quale è il valore associato a "pippo" in questa frase?

RISPOSTA TIPICA:

⊥ SBAGLIATA

RISPOSTA GIUSTA:

$f(pippo)$

DEFINIZIONE DI $f\left[\frac{b}{a}\right]^{add}$ IN CAML

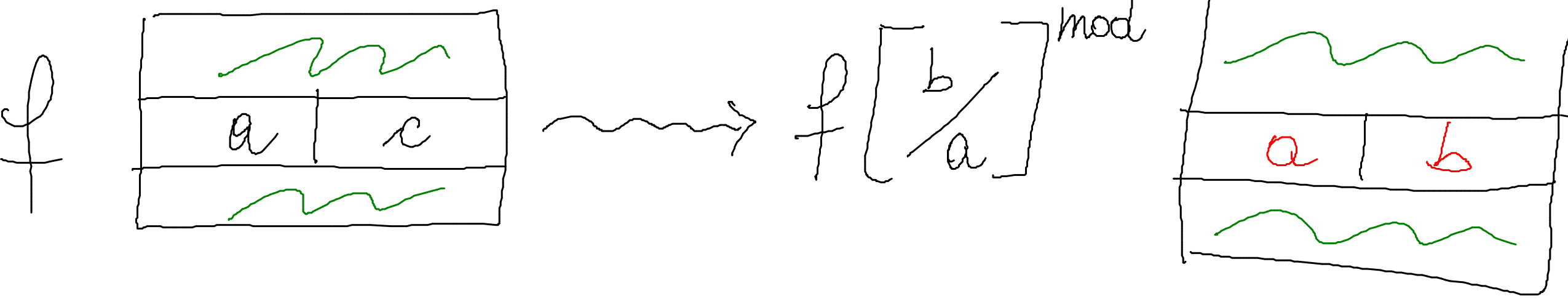
```
let add f a b = match f a with
    Bottom ⟶ let g z = if z=a then b
                       else f z
              in
              g ;;
```

```
add : ('a → 'b bottom) → 'a → 'b → ('a → 'b bottom)
```

MODIFICA DI UNA ASSOCIAZIONE

$f : A \to B_\perp \qquad a \in A \qquad b \in B$

con $f(a) \neq \perp$



Sia $g = f\left[\frac{b}{a}\right]^{mod}$

$$g(x) = \begin{cases} b & \text{se } x = a \\ f(x) & \text{se } x \neq a \end{cases}$$

ipotesi $f(a) \neq 1$

```
let update f a b = match f a with
    z when z <> Bottom ->
        let g y = if y=a then b
                  else f y
        in
        g ;;
```

```
upolate : ('a -> 'b bottom) -> 'a -> 'b -> ('a -> 'b bottom)
```