PRINCIPIO DI INDUZIONE BEN FONDATA

$\forall x \in S.\ p(x)$

1) Individuare una relazione b.f. $\sqsubset$ su S
2) Dimostrare che p vale per ogni elemento minimale rispetto a $\sqsubset$ CASO BASE
3) Dimostrare l'asserto CASO INDUTTIVO

$$(\forall y \sqsubset x.\ p(y)) \Rightarrow p(x) \longleftarrow$$

per un generico non minimale x.

IPOTESI INDUTTIVA

Perché è corretto? $(S, \sqsubset)$ ben fondata

Sia $p(x)$ che soddisfa caso base e caso induttivo

Supponiamo per assurdo $\exists x_0 \in S. \neg p(x_0)$

- x_0 non è minimale (p vale su tutti i minimali)
- deve esistere un $x_1 \sqsubset x_0$ per cui vale $\neg p(x_1)$
- x_1 non è minimale
- deve esistere $x_2 \sqsubset x_1$ per cui vale $\neg p(x_2)$

$\vdots$

$x_0 \sqsupset x_1 \sqsupset x_2 \ldots \ldots$ DECR. INFINITA

ASSURDO! $\sqsubset$ è ben fondata

DIMOSTRARE PROP. DI FUNZIONI DEFINITE RICORSIVAMENTE

- la TOTALITÀ delle funzioni che definiamo

$$f : A \longrightarrow B$$

$$\forall \underline{x \in A} . \underline{\exists y \in B} . \underline{y = f(x)}$$

- la CORRETTEZZA delle funzioni che definiamo

Scrivere una funzione ricorsiva tale che

$$\forall x \in \mathbb{N} . \quad \underline{f(x) = 4x + 2}$$

$$f(x) = \begin{cases} 2 & \text{se } x = 0 \\ 4 + f(x-1) & \text{se } x > 0 \end{cases}$$

$f(x) = 4x + 2$

$f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$

$\sqsubset$ ben fondata su $\mathbb{N}$

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N} .\ f(n) = 4n + 2}$$

$x \sqsubset y \equiv \underline{x = y - 1}$

$\forall n \in \mathbb{N} .\ \underline{P(n)}$

Caso base $\emptyset$ è minimale

$f(0)$

$= \{$ def. di f 1° caso $\}$

2

$= \{$ calcolo $\}$

$4 \cdot \emptyset + 2$

Caso induttivo n non minimale $(n \neq 0)$

Ipotesi induttiva: $f(n-1) = 4 \cdot (n-1) + 2$

$f(n)$

$= \{$ def. di f, 2° caso $\}$

$4 + \underline{f(n-1)}$

$= \{$ Ip. induttiva $\}$

$4 + \underline{4(n-1)+2}$

$= \{$ calcolo $\}$

$\cancel{4} + 4n - \cancel{4} + 2$

$= 4n + 2$

$$g(x) = \begin{cases} 10 & \text{se} \quad x = 0 \\ 20 & \text{se} \quad x = 1 \\ g(x-2) & x \neq 0 \wedge x \neq 1 \end{cases} \qquad g : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$$

$$g(x) = \begin{cases} 10 & \text{se} \quad x \text{ è pari} \\ 20 & \text{se} \quad x \text{ è dispari} \end{cases}$$

$$g(4)$$
$$= \{3^\circ \text{ caso def. di } g\}$$
$$g(2)$$
$$= \{3^\circ \text{ caso def. di } g\}$$
$$g(0)$$
$$= \{1^\circ \text{ caso def. di } g\}$$
$$10$$

$$g(7)$$
$$= \{3^\circ \text{ caso def. } g\}$$
$$g(5)$$
$$= \{\ \text{"} \quad \text{"}\ \}$$
$$g(3)$$
$$= \{\ \text{"} \quad \text{"}\ \}$$
$$g(1)$$
$$= \{2^\circ \text{ caso def. di } g\}$$
$$20$$

$$g(x) = \begin{cases} 10 & x = 0 \\ 20 & x = 1 \\ g(x-2) & \text{altr.} \end{cases}$$

$\forall n \in \mathbb{N}.\quad g(n) = 10$ se n è pari

$\phantom{\forall n \in \mathbb{N}.\quad} g(n) = 20$ se n è dispari

$\prec \qquad x \prec y \equiv x = y - 2$

$$\begin{array}{cc} \vdots & \vdots \\ | & | \\ 4 & 5 \\ | & | \\ 2 & 3 \\ | & | \\ 0 & 1 \end{array}$$

è ben fondato

CASO BASE

$g(0) = \{\text{def. } g, 1° \text{ caso}\}\ 10$

$g(1) = \{\text{def. di } g, 2° \text{ caso}\}\ 20$

0 è pari

$0 \bmod 2 = 0$

1 è dispari

$1 \bmod 2 = 1$

CASO INDUTTIVO n non minimale $(n \neq 0 \wedge n \neq 1)$

Ip. induttiva $\big((n-2) \bmod 2 = 0 \Rightarrow g(n-2) = 10\big) \wedge$
$\big((n-2) \bmod 2 = 1 \Rightarrow g(n-2) = 20\big)$

DIM. per casi
1) n pari
2) n dispari

① $g(n)$ $\quad$ $n \bmod 2 = 0$

$= \{3° \text{ caso def. } g\}$

$g(n-2)$

$= \{(n-2) \bmod 2 = n \bmod 2$
Ip. induttiva$\}$

10

② $g(n)$ $\quad$ $n \bmod 2 = 1$

$= \{3° \text{ caso def } g\}$

$g(n-2)$

$= \{(n-2) \bmod 2 = n \bmod 2\}$

20

$$
\begin{aligned}
& g(4) \\
= \; & g(2) \\
= \; & g(0) \\
= \; & 10
\end{aligned}
\qquad
\begin{array}{c}
4 \\ | \\ 2 \\ | \\ 0
\end{array}
\qquad\qquad
\begin{aligned}
& g(7) \\
= \; & g(5) \\
= \; & g(3) \\
= \; & g(1) \\
= \; & 20
\end{aligned}
\qquad
\begin{array}{c}
7 \\ | \\ 5 \\ | \\ 3 \\ | \\ 1
\end{array}
$$

RELAZIONE DI PRECEDENZA INDOTTA DALLA DEFINIZIONE DELLA FUNZIONE.

$$foo(x) = \begin{cases} 1 & \text{se } x = 0 \\ 1 + foo(x+1) & \text{se } x \neq 0 \end{cases}$$

x

$|$

$x+1$

$|$

$x+2$

$|$

$\vdots$

la relazione INDOTTA non è ben fondata

$$foo(x) = \begin{cases} 1 & \text{se } x = 0 \\ \text{indefinita} & \text{se } x \neq 0 \end{cases}$$

$$G_{foo} = \{(0,1)\}$$

foo non è TOTALE

$$f(x) = \begin{cases} 2 & \text{se } x = 0 \\ 4 + f(x-1) & \text{se } x \neq 0 \end{cases}$$

$$\boxed{f(x) = 4 \cdot x + 2}$$

1° caso: CASO BASE – per $x = 0$ so calcolare direttamente il valore di $f(x)$

2° caso: CASO RICORSIVO (f è definita in termini di f)

Supponendo di saper calcolare il valore della funzione per $x-1$, so calcolare il valore della funzione anche per x (aggiungo 4 al valore di $f(x-1)$)

$$n! = \underbrace{1 * 2 * \cdots * (n-1)}_{(n-1)!} * n \qquad\qquad \underline{0! = 1}$$

$$(n-1)! * n$$

$$\text{fatt}(x) = \begin{cases} 1 & \text{se } x = 0 \\ x * \text{fatt}(x-1) & \text{se } x \neq 0 \end{cases}$$

$$\left.\begin{array}{c} n \\ | \\ n-1 \\ | \\ \vdots \\ 2 \\ | \\ 1 \\ | \\ 0 \end{array}\right\} \quad \underline{\text{ben fondata}}$$

$$g : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \to \mathbb{N} \qquad g(n,m) = 2n + m + 1$$

$$g(n,m) = \begin{cases} m+1 & \text{se } n = \emptyset \\ ? \quad \dfrac{g(n-1,m)}{2 + g(n-1,m)} & \text{se } n \neq \emptyset \end{cases}$$

$$\vdots$$

$$(2, m)$$

$$(1, m)$$

$$(0, m)$$

Caso base

$g(0, m)$

$= \{ \text{def. di } g, 1° \text{ caso} \}$

$m + 1$

$= \{ \text{calcolo} \}$

$2 \cdot 0 + m + 1$

infiniti casi minimali

Caso induttivo

(n, m) non minim.

Ip induttiva: $g(n-1, m) = 2(n-1) + m + 1$

$g(n, m) \qquad n \neq 0$

$= \{ 2° \text{ caso def. di } g \}$

$2 + g(n-1, m)$

$= \{ \text{Ip induttiva} \}$

$2 + 2(n-1) + m + 1$

$= \{ \text{calcolo} \}$

$2 + 2n - 2 + m + 1$

$=$

$2n + m + 1$

let rec $g(n, m) = \underline{\text{if}}\ n = 0\ \underline{\text{then}}\ m + 1$

$\underline{\text{else}}\ 2 + \underline{g(n-1, m)}$

NUMERI DI FIBONACCI

0, 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, ...

$$fib(n) = \begin{cases} 0 & \text{se } n = 0 \\ 1 & \text{se } n = 1 \\ fib(n-1) + fib(n-2) & n > 1 \end{cases}$$

$fib(4)$

$= \{3° \text{ caso def. fib}\}$

$fib(3) + fib(2)$

$= \{3° \text{ caso def. fib, 2 volte}\}$

$fib(2) + fib(1) + fib(1) + fib(0)$

$= \{3° \text{ caso def di fib}\}$

$fib(1) + fib(0) + fib(1) + fib(1) + fib(0)$

$= \{1° \text{ caso}, 2° \text{ caso def. fib}\}$

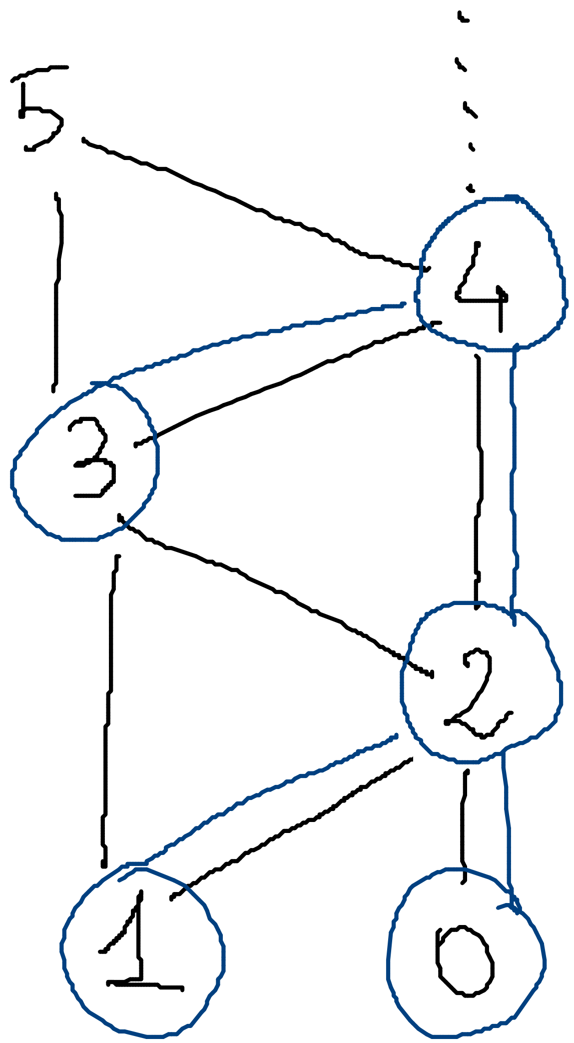
$1 + 0 + 1 + 1 + \emptyset$

$= \{\text{calcolo}\}$

3

Relazione INDOTTA

$$n \prec_{fib} m \equiv m \neq 0 \wedge m \neq 1 \wedge (n = m-1 \vee n = m-2)$$



RELAZIONE DI PRECEDENZA INDOTTA

Sia f una funzione

$$f : A \to B$$

definita RICORSIVAMENTE

La relazione di precedenza INDOTTA su A ($<_f$)

DALLA DEFINIZIONE DI f È DEFINITA COME SEGUE

$x <_f y$ se e solo se la definizione di $f(y)$ utilizza $f(x)$

$$
f(\underline{n, m}) = \begin{cases} \# & \text{se } n = 10 \wedge m = \emptyset \\ \$ & \text{se } n = 10 \wedge m = 82 \\ f(\underline{n-1, m+1}) & \text{altrimenti} \end{cases}
$$

$$
(n', m') \prec_f (n, m) \quad \text{se e solo se}
$$

$$
n' = n - 1 \wedge m' = m + 1 \wedge (n \neq 10 \wedge m \neq \emptyset \wedge m \neq 82)
$$

$$
f(n, m) = \begin{cases} 1 & \text{se } n = 0 \wedge m = \emptyset \\ f(n-1, m+1) & \text{se } n > \emptyset \\ f(n, m-1) + 1 & \text{se } n = \emptyset \wedge m > \emptyset \end{cases}
$$

$$
\forall n, m \in \mathbb{N}.\ f(n, m) = n + m + 1
$$

Disegno di α_f

$$f(n,m) = \begin{cases} 1 & n=0 \\ & m=0 \\ f(n-1,m+1) & n \neq 0 \\ f(n,m-1) & n=0 \\ & m>0 \end{cases}$$

$$\begin{array}{ll}
(n, m) & n \neq 0 \\
(n-1, m+1) & \\
\vdots & \\
\left.\begin{array}{l}
(0, m+n) \\
(0, m+n-1) \\
\vdots \\
(0, 1) \\
(0, 0)
\end{array}\right\} & n = 0
\end{array}$$

Dimostriamo per i.b.f. usando $<_f$

$$\left(\forall n, m.\ f(n,m) = n + m + 1\right)$$

Caso base

$f(0,0)$

$= \{1^\circ \text{ caso def } f\}$

1

$= \{\text{calcolo}\}$

$0 + 0 + 1$

Caso induttivo 1 (n, m) con $n \neq 0$

$f(n,m)$

$= \{2^\circ \text{ caso def. di } f\}$

$f(n-1, m+1)$

$= \{(n-1, m+1) <_f (n,m),\ \text{Ip. ind. } f(n-1, m+1) = n-1+m+1+1\}$

$n - \cancel{1} + m + \cancel{1} + 1$

$= \{\text{calcolo}\}$

$n + m + 1$

Caso induttivo 2 $\quad (n, m) \quad n = 0 \quad m \neq 0$

$$
\begin{aligned}
& f(n, m) \\
= \; & \{ \text{3° caso def. di } f \} \\
& \underline{f(n, m-1)} + 1 \\
= \; & \{ (n, m-1) \prec_f (n, m), \ \text{Ip ind. } f(n, m-1) = n + m - 1 + 1 \} \\
& \underline{n + m - \cancel{1} + \cancel{1}} + 1 \\
= \; & \{ \text{calcolo} \} \\
& n + m + 1
\end{aligned}
$$