Relazione di precedenza ben fondata

Sia S un insieme, una rel. di precedenza $\sqsubset$ è ben fondata se NON ESISTE UNA SEQUENZA DECRESCENTE INFINITA DI ELEMENTI di S

$$S_0 \sqsupset S_1 \sqsupset S_2 \sqsupset \ldots\ldots \sqsupset S_i \sqsupset S_{i+1} \sqsupset \ldots$$

$\mathbb{N}$ $\quad x \sqsubset y$ se e solo se $x = y-1$ è ben fondata

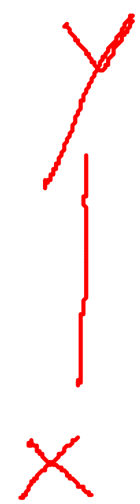
$\quad x < y$ " " $x = y+1$ non è ben fondata

$\mathbb{Z}$ $\quad 8 \sqsupset 7 \sqsupset 6 \sqsupset \ldots \sqsupset 1 \sqsupset 0 \sqsupset -1 \sqsupset -2 \ldots$

Un insieme $(S, \sqsubset)$ è ben fondato se $\sqsubset$ è ben fondata

Rappresentazione grafica di relazioni di precedenza

se $x \sqsubset y$



$\mathbb{N}$ $\quad x-1 \sqsubset x$

n

$|$

$n-1$

$|$

$n-2$

$|$

$\vdots$

2

$|$

1

$|$

0

$\mathbb{Z}$ $\quad x-1 \sqsubset x$

$z \quad (z \in \mathbb{Z}^+)$

$|$

$z-1$

$|$

$z-2$

$\vdots$

$|$

0

$|$

-1

$|$

-2

$|$

$\vdots$

decrescente infinita

$\mathbb{Z}$ $\quad x < y$ il cui diagramma (disegno) è il seguente

$z \in \mathbb{Z}^+ \qquad\qquad z' \in \mathbb{Z}^- \qquad z' \in \mathbb{Z}^-$

$z-1 \qquad\qquad -4 \qquad -4+1=-3 \quad z'+1$

$3 \qquad -3$

$2 \qquad -2$

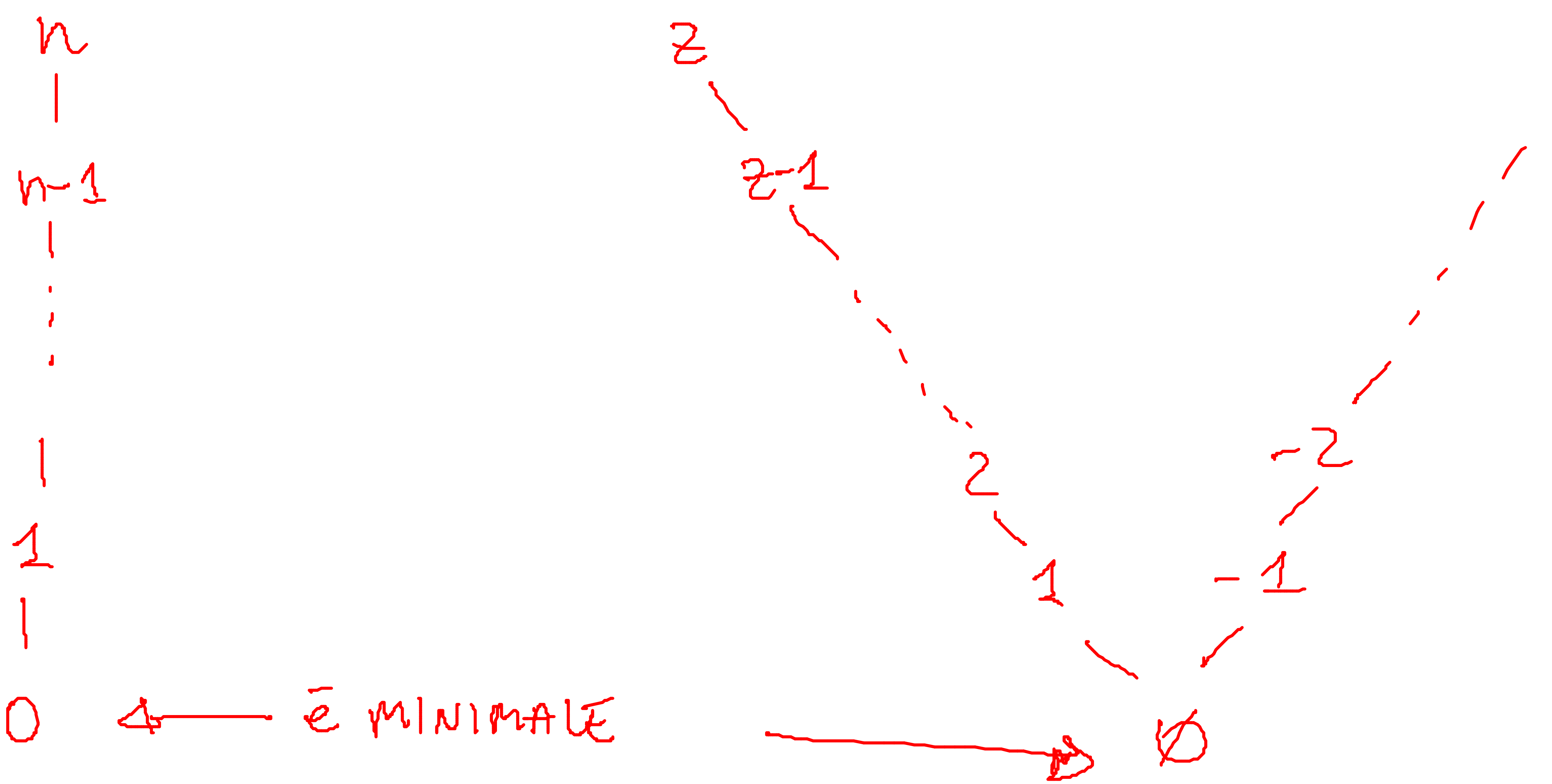
$1 \qquad -1$

0

$<$ è ben fondata

$$\boxed{x < y \longleftrightarrow (y \in \mathbb{Z}^+ \land x = y-1) \lor (y \in \mathbb{Z}^- \land x = y+1)}$$

Data una relazione di precedenza ben fondata $(S, \sqsubset)$ gli elementi di S che NON HANNO PREDECESSORI si dicono <u>MINIMALI</u>



$\mathbb{N}$ $\quad x \ll y \longleftrightarrow y = x + A$

con A costante fissata NON NULLA

$A = 0 + A$ quindi $0 \ll A$

⋮	⋮	⋮		⋮
$3A$	$3A+1$			$3A-1$
$2A$	$2A+1$	$2A+2$		$2A-1$
A	$A+1$	$A+2$		$A-1$
0	1	2	....	

Nella catena che termina col minimale K ci sono tutti e soli i numeri naturali che, divisi per A, danno resto K

$\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ coppie di numeri naturali

$n < m$

$$\begin{array}{c} (n, m) \\ | \\ (n-1, m-1) \\ | \\ \vdots \\ (0, m-n) \end{array}$$

$n \geq m$

$$\begin{array}{c} (n, m) \\ | \\ (n-1, m-1) \\ | \\ \vdots \\ (n-m, 0) \end{array}$$

una qualsiasi coppia del tipo $(0, x)$ o del tipo $(y, 0)$ è minimale.

$$\underset{\mathbb{N}\times\mathbb{N}}{\underset{\in}{(a,b)}} \sqsubset \underset{\mathbb{N}\times\mathbb{N}}{\underset{\in}{(n,m)}} \longleftrightarrow a = n-1 \wedge b = m-1$$

$\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ $\qquad (a,b) \sqsubset (n,m) \iff a = n \wedge b = m-1$

$$\begin{array}{c} (x, y) \\ | \\ (x, y-1) \\ | \\ (x, y-2) \\ | \\ \vdots \\ \underline{(x, 0)} \end{array}$$

è ben fondata

$(0,0)$

$\leftarrow$ elementi minimali

$$
\begin{array}{c}
(x, y) \\
| \\
(x, y-1) \\
| \\
(x, y-2) \\
| \\
\vdots \\
(x, 0) \\
| \\
(x-1, 0) \\
| \\
\vdots \\
(1, 0) \\
| \\
(0, 0)
\end{array}
$$

$$(a,b) \prec (n,m) \iff$$

$$\Big((m \neq 0 \wedge b = \underline{m-1} \wedge a = n) \vee (m = 0 \wedge a = \underline{n-1} \wedge b = 0 \wedge n \neq 0) \Big)$$

$$b = m$$

la coppia $(0,0)$ è minimale

$$(a,b) \not\prec (0,0)$$

$n \neq 0$ $\quad$ $m = 0$

1 solo minimale

CHIUSURA TRANSITIVA DI UNA RELAZIONE

Sia $R \subseteq A \times A$ una relazione su A

La chiusura transitiva di R, che rappresentiamo con R^+, è la più piccola relazione su A che soddisfa le seguenti proprietà:

- se $(a,b) \in R$ allora $(a,b) \in R^+$ $(R \subseteq R^+)$
- se $(a,b) \in R^+$ e $(b,c) \in R^+$ allora anche $(a,c) \in R^+$

$\sqsubset$ relazione di precedenza su A

$\sqsubset^+$ è la più piccola relazione su A tale che

- se $x \sqsubset y$ allora $x \sqsubset^+ y$
- se $x \sqsubset^+ y$ e $y \sqsubset^+ z$ allora $x \sqsubset^+ z$

Diagramma di $\sqsubset$ "rappresenta" anche $\sqsubset^+$

$x_2 \sqsubset^+ x_0$

$x_1 \sqsubset^+ x_0$

$x_2 \sqsubset^+ x_1$

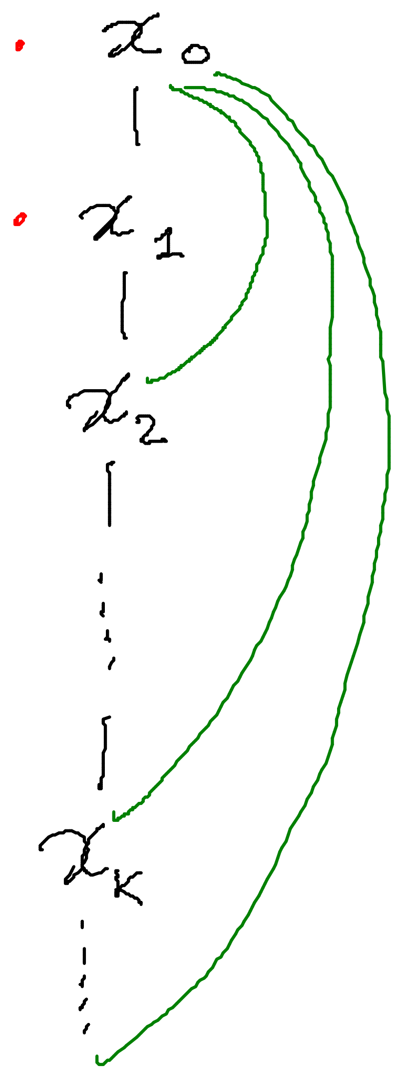


diagramma di $\sqsubset$

la coppia $y \sqsubset^+ z$ quando esiste un "percorso" nel diagramma che da z mi consente di raggiungere y seguendo $|$

$$A = \{a, b, c, d\}$$

$$R = \{(a,a), (b,d), (d,a), (b,c)\}$$

$$R_1 = A \times A \qquad R \subseteq R_1$$

R_1 è TRANSITIVA cioè

se $(x,y) \in R_1$ e $(y,z) \in R_1$

anche $(x,z) \in R_1$

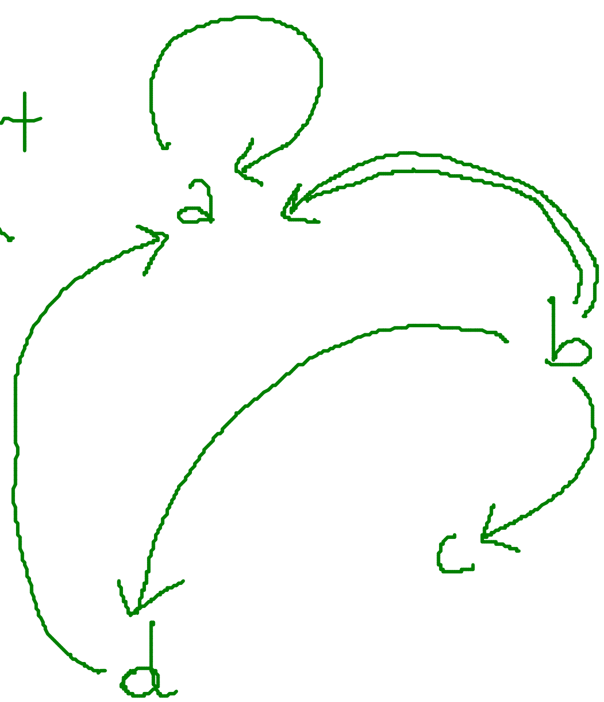
R^+ è la più piccola relazione che contiene R ed è transitiva

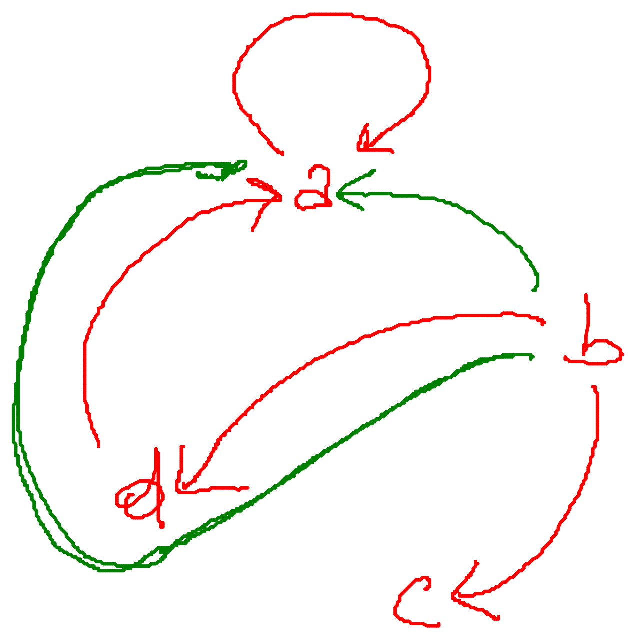
$$\mathbb{R}^+ = \{(a,a),\ (b,d),\ (d,a),\ (b,c),\ (b,a)\}$$

$$A = \{a, b, c, d\}$$

$$\mathbb{R} = \{(a,a),\ (b,d),\ (d,a),\ (b,c)\}$$

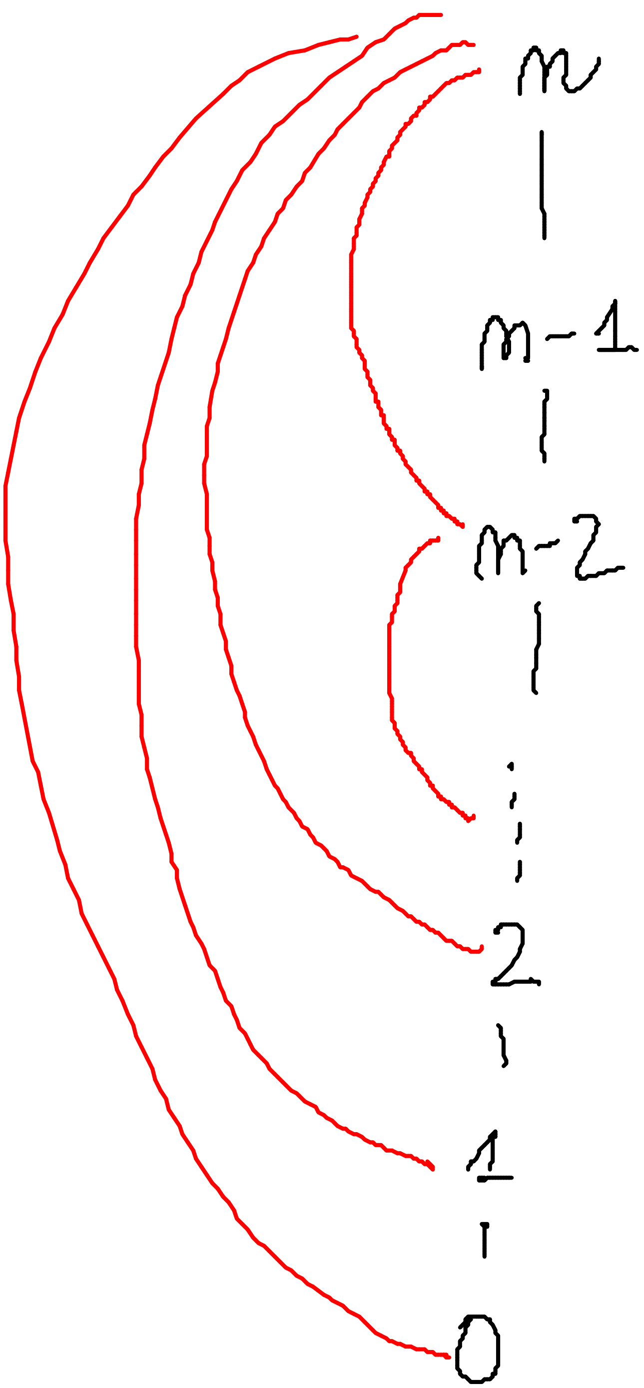
$\mathbb{R}^+$





$\mathbb{R}$

$\mathbb{N}$ $\quad x \sqsubset y$ se e solo se $x = y-1$



$\sqsubset^{+}$ coincide con $<$

$x < y$ se e solo esiste un $k \neq 0$ tale che $y = x + k$

PRINCIPIO DI INDUZIONE BEN FONDATA

Enunciato Sia $(S, \sqsubset)$ ben fondato.

Consideriamo una proprietà $p(x)$ con $x \in S$

- 1) se $p(z)$ vale per TUTTI I MINIMALI rispetto a $\sqsubset$
- 2) se riesco a dimostrare che $p(y)$ vale, con y NON MINIMALE, nell'ipotesi che p vale per tutti i predecessori immediati di y

ALLORA per ogni $x \in S$ vale $p(x)$

PRINCIPIO DI INDUZIONE SU $\mathbb{N}$

- se vale $p(0)$
- se vale $\underbrace{p(x-1) \Longrightarrow p(x)}_{}$

  $p(x)$ è vero nell'ipotesi $p(x-1)$ vera

allora

$$\forall n \in \mathbb{N}.\ p(n)$$

È il principio di INDUZIONE BEN FONDATA rispetto alla relaz. di precedenza

n

$|$

$n-1$ $\longleftarrow$ $p(n-1) \Rightarrow p(n)$

$|$

$\vdots$

$|$

3

$|$

2

$|$

1

$|$

0 $\longleftarrow$ $p(0)$

FORMALIZZAZIONE DEL PRINCIPIO $(S, \sqsubset)$

z arbitrario

Se

$$\left(\forall z \in S. \left(\boxed{\forall y \in S.\ \underline{y \sqsubset z \Rightarrow p(y)}} \right) \Rightarrow p(z) \right)$$

ogni predecessore immediato di z soddisfa p

se z è minimale premessa true

dimostrare direttamente $p(z)$ per z minimale

allora

$$\underline{\left(\forall x \in S.\ p(x) \right)}$$

$$\forall n. \left(0+1+2+\cdots+n = \frac{n\cdot(n+1)}{2} \right)$$

$$\left(\forall n \in \mathbb{N}.\ \sum_{i=0}^{n} i = \frac{n(n+1)}{2} \right)$$

Considero $(\mathbb{N}, \sqsubset)$

$$\begin{array}{c} n \\ | \\ n-1 \\ | \\ \vdots \\ | \\ 2 \\ | \\ 1 \\ | \\ 0 \end{array}$$

$x \sqsubset y \Leftrightarrow$
$x = y-1$

1) dimostro $\sum_{i=0}^{0} i = \frac{0\cdot(0+1)}{2}$
banale

2) dimostro $p(x)$ con x
GENERICO NON MINIMALE
nell'ipotesi

$p(y)$ per ogni $y \sqsubset x$

- $p(x) = \left(\sum_{i=0}^{x} i = \frac{x(x+1)}{2} \right)$
- x non minimale ha esattamente 1 predecessore $x-1$. Quindi devo dimostrare

$p(x)$ nell'ipotesi $p(x-1)$

$$\sum_{i=0}^{x} i = \frac{x(x+1)}{2}$$ scopo della dimostrazione TESI

Nella dimostrazione posso usare l'uguaglianza

$$\sum_{i=0}^{x-1} i = \frac{(x-1)(x-1+1)}{2}$$ || IPOTESI INDUTTIVA

$$\sum_{i=0}^{x} i$$

$$= \{ \text{def. di } \textstyle\sum \}$$

$$x + \sum_{i=0}^{x-1} i$$

$$= \left\{ \text{ipotesi induttiva: } \sum_{i=0}^{x-1} i = \frac{(x-1)\overset{x}{\cancel{(x-1+1)}}}{2} \right\}$$

$$\sum_{i=0}^{x-1} i \qquad \frac{(x-1)\cdot x}{2}$$

$$x + \frac{(x-1)\,x}{2}$$

$$= \{ \text{calcoli} \}$$

$$= \frac{2x + x(x-1)}{2}$$

$$= \frac{x^2 + x}{2}$$

$$= \frac{x(x+1)}{2}$$