$L = \{ a^n b^m \mid n > m \geq 1 \}$ non è regolare

Per assurdo, supponendo L regolare

Sia K la costante del pumping lemma.

Trovare $|z| \geq K$

$z = uvw$

$|uv| \leq K \implies uv^iw \in L$ per ogni $i \geq 0$

$v \neq \varepsilon$

Facciamo vedere che per almeno un i

uv^iw non è del tipo

$a^n b^m$ con $n > m$

$|z| \geq K$ $\qquad a^{\cancel{K-1}\,m}\, b^h$ $\qquad \cancel{k-1} > h \quad m > h$

$z = u\,v\,w$

v è formata da sole b

scegliamo i in modo che

$|v^i| \geq k-1$

$z = u\,v\,w$ con $|uv| \leq k$ $\quad v \neq \varepsilon$

? come facciamo a garantire che v sia fatta da sole b?

non ci riusciamo

$\mathcal{L} = \{ a^n b^m \mid n > m \geq 1 \}$

K la costante del p.l.

$$z = a^k b^{k-1}$$

$$z = \underbrace{a \ldots\ldots a}_{K} \underbrace{b \ldots\ldots b}_{k-1}$$

$z = u \; v \; w$ con $|uv| \leq k$, $v \neq \varepsilon$

uv (e in particolare v)
è fatta di sole a

$u v^0 w = uw \notin \mathcal{L}$ poiché
$uw = a^h b^{k-1}$ con $h \leq k$! assurdo

ESERCIZIO

$$\mathcal{L} = \{ a^n b^m c^k \mid n + m = k \}$$

$n \geq 1, \ m \geq 1$

$$\underbrace{a^n \beta c^n}_{\alpha} \qquad \underbrace{b^m c^m}_{\beta}$$

$$a^n b^m c^m c^n$$

$$S_1 \to a S_1 c \mid a S_2 c$$

$$S_2 \to b S_2 c \mid bc$$

Esercizio Sia $G = \langle \Lambda, V, S, P \rangle$ una grammatica che genera $\mathcal{L}(G)$.

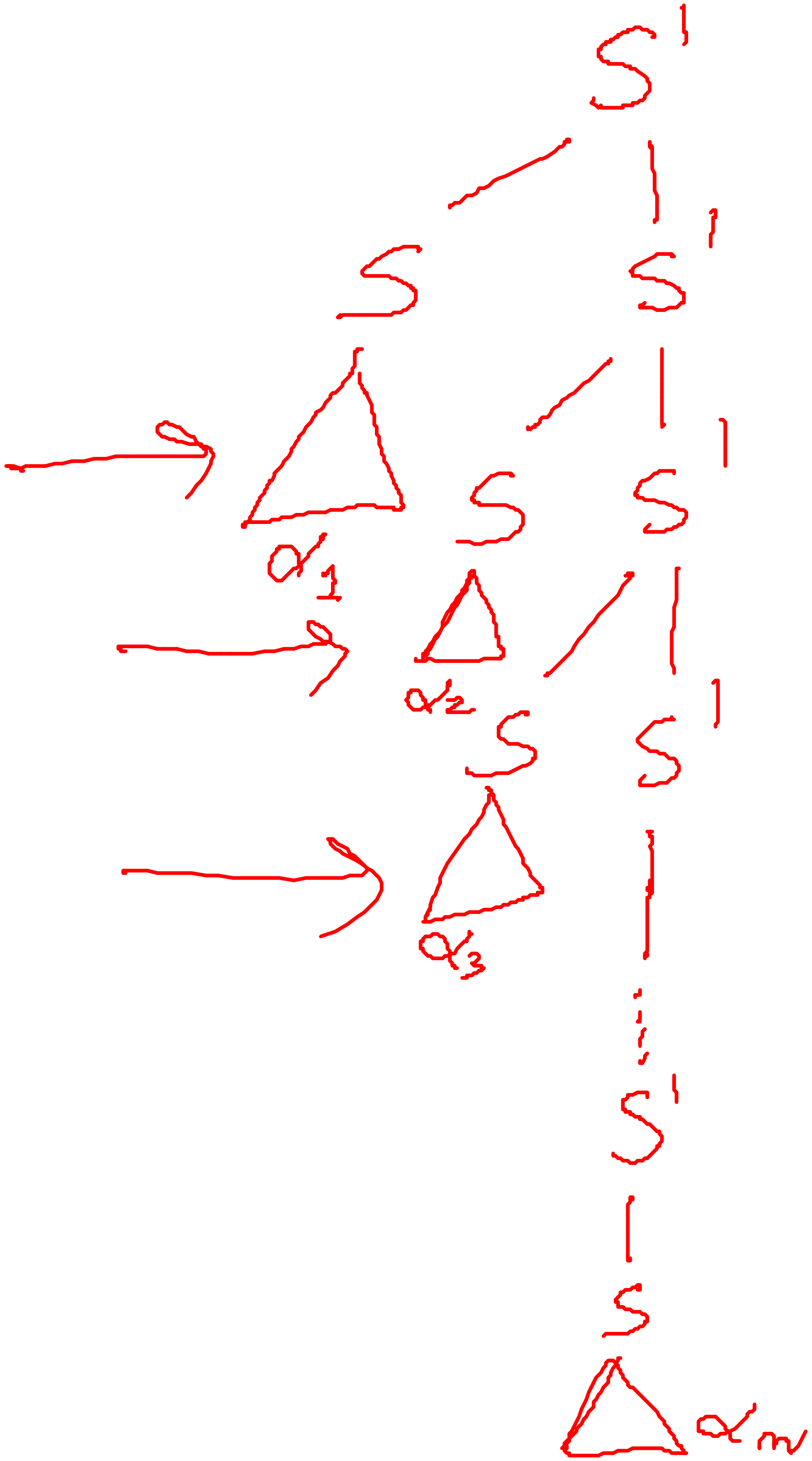
Costruire una grammatica $\widehat{G'}$ che genera il linguaggio

$$\mathcal{L} = \{ \alpha_1 \ldots \alpha_n \mid \alpha_i \in \mathcal{L}(G) \text{ per } i = 1, \ldots, n, \ n \geq 1 \}$$

$$\mathcal{L} = \{ a^n \mid n \geq 1 \} \Rightarrow S' \rightarrow \underline{\underline{S}} \mid \underline{\underline{S}}\,\underline{\underline{S'}}$$

$$S' \rightarrow a \mid aS'$$

con $S' \notin V$



$$G' = \langle \Lambda, V \cup \{S'\}, S', P \cup \{S' \to S, S' \to SS'\} \rangle$$

PARADIGMA RICORSIVO (FUNZIONALE)

Fondamenti teorici della programmazione ricorsiva

Teorema di ricorsione: risultato fondamentale della teoria della calcolabilità

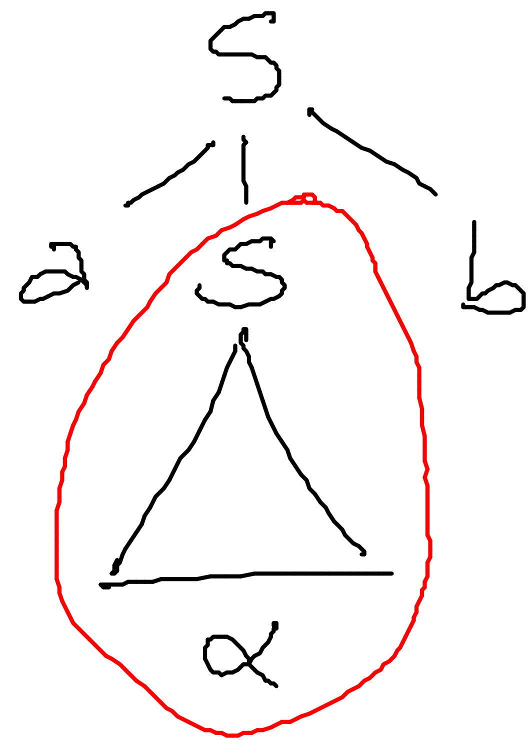
Definizioni ricorsive

$$n! = \begin{cases} 1 & \text{se } n = 0 \\ n * (n-1)! & \text{se } n > 0 \end{cases}$$

$S \to ab \mid aSb$

1) $ab \in \mathcal{L}(S)$

2) se $\alpha \in \mathcal{L}(S)$ allora anche $a\alpha b \in \mathcal{L}(S)$



$$A = \{\emptyset\} \cup \{n \mid n \in \mathbb{N} \wedge n-2 \in A\} \quad A \subseteq \mathbb{N}$$

- $\{\emptyset\} \subseteq A$ $\qquad \emptyset \in A$
- $2 \in A$ poiché $2-2 = \emptyset \in A$
- $4 \in A$ poiché $4-2 = 2 \in A$

$\vdots$

$$X = X \cup \{1\} \qquad X \subseteq \mathbb{N}$$

equazione ricorsiva

- $X_0 = \{\emptyset, 1\}$

  $X_0 \cup \{1\} = \{\emptyset, 1\} \cup \{1\} = \{\emptyset, 1\} = X_0$

- $X_1 = \{1, 7, 8, 45\}$

  $X_1 \cup \{1\} = \{1, 7, 8, 45\} \cup \{1\} = \{1, 7, 8, 45\} = X_1$

- $Y = \{2, 3\} \quad Y \cup \{1\} = \{2, 3\} \cup \{1\} = \{1, 2, 3\} \neq Y$

Il th. di ricorsione ci permette di associare ad una equazione di questo tipo una soluzione canonica, che prenderemo come LA SOLUZIONE

Nel caso precedente è l'insieme

$$\overline{X} = \{1\}$$

Una qualunque altra soluzione di $X = X \cup \{1\}$, chiamandola Y, è tale che

$$\overline{X} \subseteq Y$$

Definizioni ricorsive per definire numeri reali

$$f(x) = 2x - 4$$

$x = f(x)$ è un'equazione di 1° grado

$$x = 2x - 4$$

$$4 = 2x - x$$

$$\boxed{4 = x}$$

$x = 4$ è SOLUZIONE dell'equazione

EQUAZIONI RICORSIVE (SU INSIEMI)

$X = \mathcal{T}(X)$ dove $\mathcal{T} : \mathbb{P}_A \longrightarrow \mathbb{P}_A$

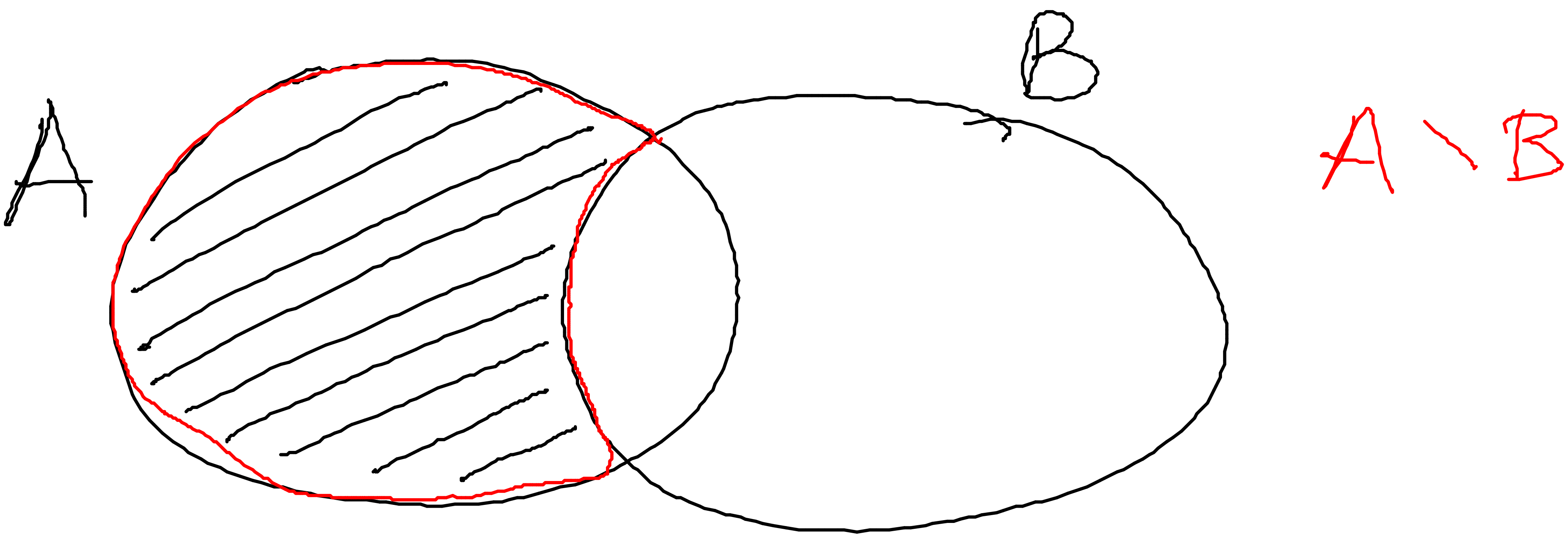
$\mathcal{T}$ è una trasformazione da insiemi a insiemi (presi tra le parti di un insieme dato A)

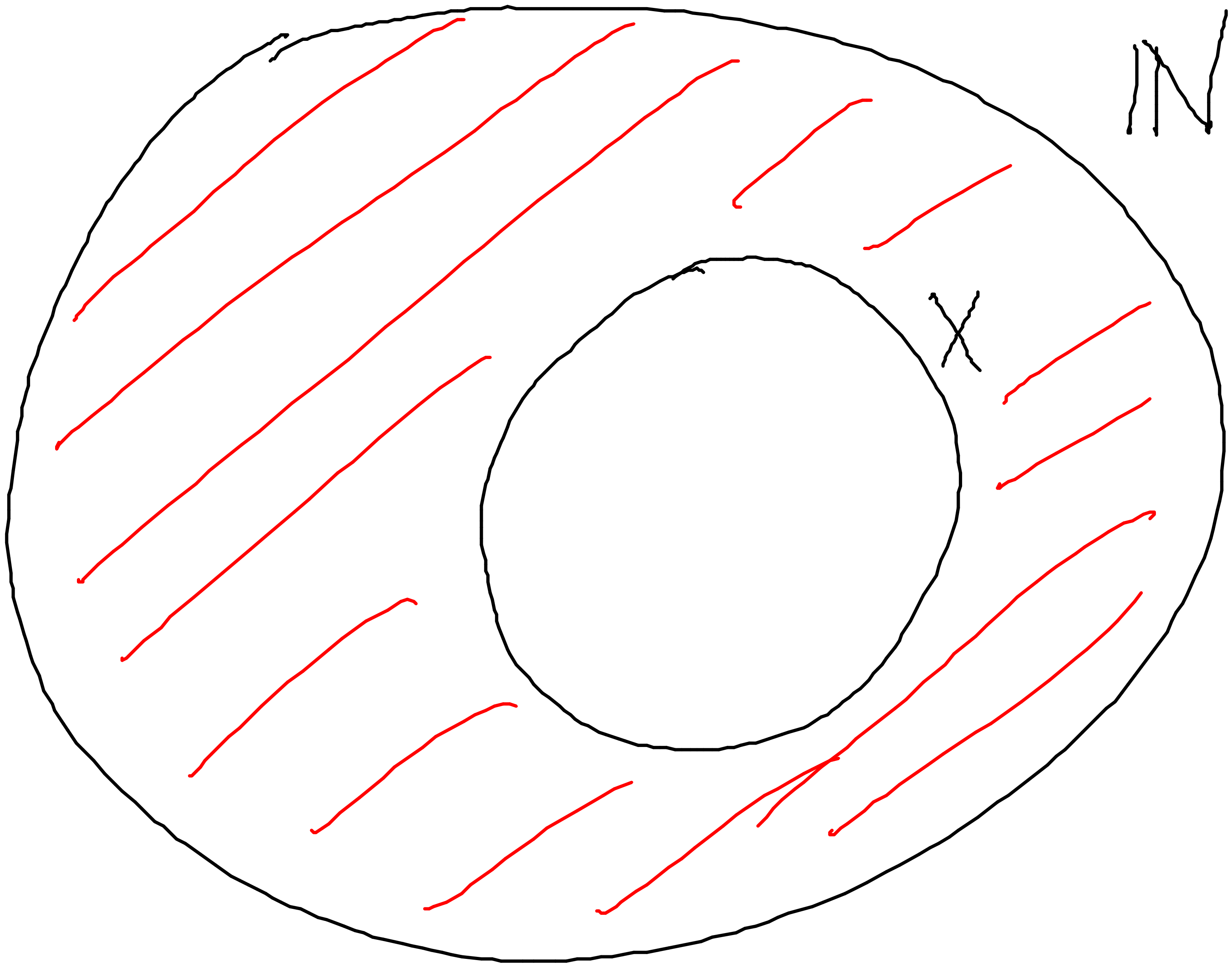
$\mathbb{P}_A$ è l'insieme di tutti i sottoinsiemi di A

$$T : \mathbb{P}_{\mathbb{N}} \to \mathbb{P}_{\mathbb{N}}$$

$$T(X) = \mathbb{N} \setminus X$$

$X \stackrel{?}{=} T(X)$ non ammette soluzioni !!





$X \subseteq \mathbb{N}$

$X \in \mathcal{P}(\mathbb{N})$

$\mathbb{N} \setminus X \neq X$

$$\tau : \mathcal{P}_{\mathbb{N}} \to \mathcal{P}_{\mathbb{N}}$$

$$\tau(X) = X \cup \{1\}$$

$$X = \tau(X)$$

$$X = X \cup \{1\}$$

ammette INFINITE SOLUZIONI: ogni insieme che contiene 1 è soluzione dell'equazione

$$\tau(X) = \{\emptyset\} \cup \{n \mid n \in \mathbb{N} \wedge n-2 \in X\}$$

$X = \tau(X)$ ammette almeno una soluzione

l'insieme $\mathbb{P}$ dei numeri pari

$$\mathbb{P} = \tau(\mathbb{P}) \quad \text{dove}$$

$$\mathbb{P} = \{\emptyset, 2, 4, 6, \dots\}$$

$$X = \{3, 4, 6\}$$

$$\tau(X) = \tau(\{3,4,6\}) = \{\emptyset\} \cup \{n \mid n \in \mathbb{N} \wedge \underline{n-2 \in \{3,4,6\}}\}$$

$$= \{\emptyset\} \cup \{5, 6, 8\} = \{\emptyset, 5, 6, 8\} \neq \{3, 4, 6\}$$

$x = 7$ non è soluzione

di $x = 2x - 4$

$$7 = 2 \cdot 7 - 4 = \underline{\underline{10 \neq 7}}$$

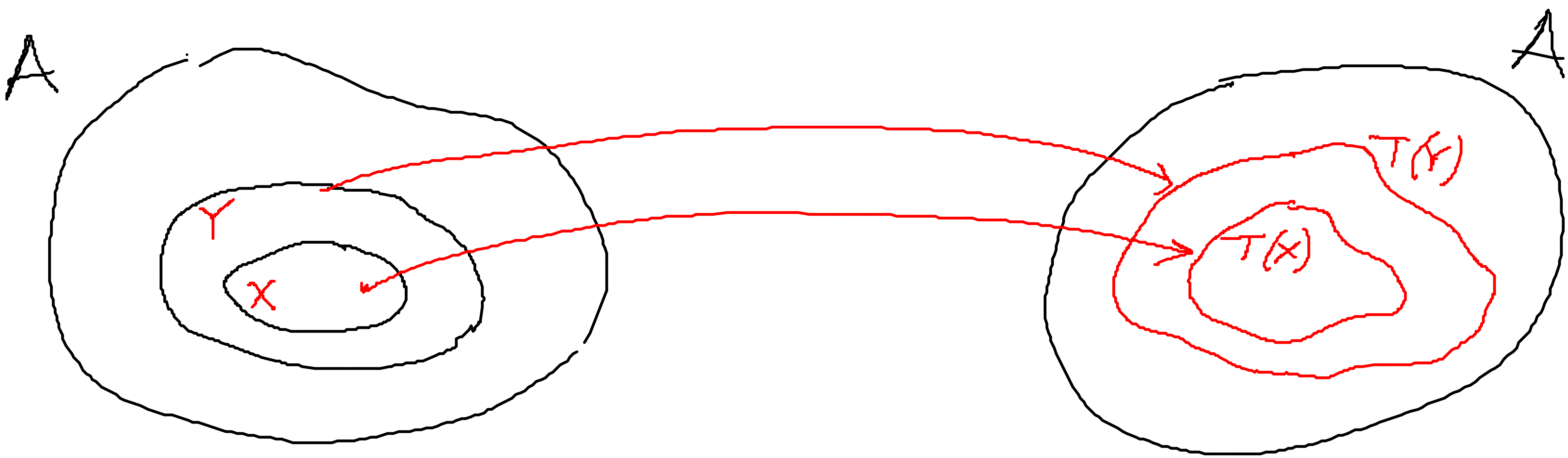
Il th. di ricorsione ci dice sotto quali condizioni su τ

$x = \tau(x)$ ha soluzioni

DEFINIZIONE: monotonia e continuità

Sia $\mathcal{T}: \mathbb{P}_A \to \mathbb{P}_A$ una trasformazione.

(1) $\mathcal{T}$ si dice MONOTÓNA se per ogni $X, Y \in \mathbb{P}_A$ tali che $X \subseteq Y$ allora anche $\mathcal{T}(X) \subseteq \mathcal{T}(Y)$



$T(X) = X \cup \{1\}$ è monotona ?

$$X \subseteq Y$$

giustificazione del passaggio

$$\boxed{T(X)}$$

$$= X \cup \{1\} \quad \{\text{def. di } T\}$$

$$\boxed{\subseteq} \quad \{\boxed{X \subseteq Y},\ X \cup B \subseteq Y \cup B\}$$

$$Y \cup \{1\}$$

$$= \{\text{def. di } T\} \quad \boxed{T(Y)}$$

DEFINIZIONE - continuità

Sia $\tau : \mathbb{P}_A \to \mathbb{P}_A$. τ si dice CONTINUA

se, presa una qualunque sequenza non decrescente di insiemi

$$X_0 \subseteq X_1 \subseteq X_2 \subseteq \dots \subseteq \dots$$

vale

$$\bigcup_{i \geq 0} \tau(X_i) = \tau\left(\bigcup_{i \geq 0} X_i\right)$$

$$\bullet \; \bigcup_{i \geq 0} \mathcal{T}(X_i) =$$

$$\mathcal{T}(X_0) \cup \mathcal{T}(X_1) \cup \mathcal{T}(X_2) \cup \cdots \cup$$

$$\bullet \; \mathcal{T}\Big(\bigcup_{i \geq 0} X_i\Big)$$

$$\mathcal{T}(X_0 \cup X_1 \cup X_2 \cup \cdots \cup)$$

Esempi di trasformazioni e studio di monotonia e continuità.

1) $\tau(X) = X \cup \{1\}$ è monotona

τ è continua?

$$X_0 \subseteq X_1 \subseteq X_2 \subseteq \ldots\ldots$$

$$\bigcup_{i \geq 0} \tau(X_i) = \tau\left(\bigcup_{i \geq 0} X_i\right) \quad ?$$

$$\bigcup_{i \geq 0} \mathcal{T}(X_i)$$

$$= \quad \{ \text{def. di } \mathcal{T} \}$$

$$\bigcup_{i \geq 0} \left(X_i \cup \{1\} \right)$$

$$= \quad \left\{ X_0 \cup \{1\} \cup X_1 \cup \{1\} \cup X_2 \cup \{1\} \ldots\ldots = \overbrace{X_0 \cup X_1 \cup \cdots}^{\bigcup_{i \geq 0} X_i} \cup \{1\} \right\}$$

$$\{1\} \cup \bigcup_{i \geq 0} X_i$$

$$= \quad \{ \text{def. di } \mathcal{T} \}$$

$$\mathcal{T}\left(\bigcup_{i \geq 0} X_i \right)$$

$$\mathcal{C} : \mathbb{P}_{\mathbb{N}} \rightarrow \mathbb{P}_{\mathbb{N}}$$

$$\mathcal{C}(X) = \begin{cases} \{\} & \text{se} \quad \#X \geq 2 \\ X & \quad \#X < 2 \end{cases}$$

$$\mathcal{C}(\{10, 20, 30\}) = \{\}$$

$$\mathcal{C}(\{5\}) = \{5\}$$

$$\mathcal{C}(\{\}) = \{\}$$

- $\mathcal{T}$ è monotone? No!

scelgo X, Y con $X \subseteq Y$ tali che $T(X) \not\subseteq T(Y)$

$$\{1\} \subseteq \{1, 5, 8, 3\}$$

$$\mathcal{T}(\{1\}) = \{1\} \not\subseteq \{\} = \mathcal{T}(\{1, 5, 8, 3\})$$

$$\zeta(X) = \begin{cases} \{\,\} & \text{se } X \text{ è finito} \\ \{2\} & \text{se } X \text{ è infinito} \end{cases}$$

$$\zeta(\{5,8,6\}) = \{\,\}$$

$$\zeta(\mathbb{P}) = \{2\}$$

numeri pari

$$\zeta(\mathbb{N}) = \{2\}$$

$$\zeta(\{\,\}) = \{\,\}$$

$\mathcal{T}$ è monotona ??

- $\boxed{X \subseteq Y}$ se X e Y sono entrambi FINITI

  $\mathcal{T}(X) = \{\} \subseteq \{\} = \mathcal{T}(Y)$

- X finito e Y infinito

  $\mathcal{T}(X) = \{\} \subseteq \{2\} = \mathcal{T}(Y)$

- X infinito e Y infinito

  $\mathcal{T}(X) = \{2\} \subseteq \{2\} = T(Y)$

τ NON è continua

$$X_0 \subseteq X_1 \subseteq \dots \subseteq X_i \subseteq \dots$$
$$\{\emptyset\} \quad \{\emptyset, 1\} \quad \{\emptyset, 1, 2, \dots, i\}$$

ogni elemento della sequenza (infinita) è finito

$$\tau(X_i) = \{\} \quad \text{per ogni } i$$

$$\bigcup_{i \geq 0} \tau(X_i) = \bigcup_{i \geq 0} \{\} = \{\}$$

$$\boxed{\tau\Big(\bigcup_{i \geq 0} X_i\Big) \neq \bigcup_{i \geq 0} \tau(X_i)}$$

$$\bigcup_{i \geq 0} X_i = \{\emptyset\} \cup \{\emptyset, 1\} \cup \dots \cup \{0, 1, 2, \dots, i\} \cup \dots$$
$$= \mathbb{N} \qquad \tau\Big(\bigcup_{i \geq 0} X_i\Big) = \tau(\mathbb{N}) = \{2\}$$