Ricorsione

$$f(x) = 2x - 4$$

$$f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$$

$$f(3) = 2$$

$$x = f(x)$$

equazione ricorsiva

$x = f(x)$

le soluzioni sono i

PUNTI FISSI

di f.

$f(x) = 2 \cdot x - 4$

$x = 2 \cdot x - 4$

$x = 4$

$f(4) = 4$

$f(3) = 2$

$$f(x) = x + 1$$

$$f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$$

$$x = f(x)$$

$$x = x + 1 \equiv 0 = 1$$

$$f(x) = x - 1 + 1$$

$$x = f(x) \qquad f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$$

A $\qquad$ $\mathcal{P}_A$ è l'insieme di tutti i sottoinsiemi di A

(parti di A)

A è finito $\qquad$ $\mathcal{P}_A$ è finito

A e infinito $\qquad$ $\mathcal{P}_A$ è infinito

Trasformazioni su insieme
(funzioni su insiemi)

$$T : \underline{\underline{\mathcal{P}_A}} \longrightarrow \underline{\underline{\mathcal{P}_A}}$$

A insieme

$$T : \mathcal{P}_{\mathbb{N}} \to \mathcal{P}_{\mathbb{N}}$$

$$T(X) = \{\emptyset\} \cup \{m \mid m \in \mathbb{N} \wedge \underline{m-2 \in X}\}$$

$$\underline{T(\{\emptyset, 1\}) = \{\emptyset, 2, 3\}}$$

$$m-2 \in \underline{\{\emptyset, 1\}}$$

$$T(X) = \{2,3\} \cup \{n \mid n-1 \in X\}$$

$$T : \mathcal{P}_{\mathbb{N}} \to \mathcal{P}_{\mathbb{N}}$$

$$T(\{0,1\}) = \{2,3,1\}$$

$$T(x) = \mathbb{N} \setminus x$$

$$T : \mathcal{P}_{\mathbb{N}} \to \mathcal{P}_{\mathbb{N}}$$

$$T(\{0,1\}) = \{2,3,4,\ldots\}$$

$$T : \mathcal{P}_{\mathbb{N}} \to \mathcal{P}_{\mathbb{N}}$$

$$T(X) = X \cup \{1\}$$

$$T(\{0,2\}) = \{0,1,2\}$$

$$T(\{0,1\}) = \{0,1\}$$

$$X = T(X)$$

equazione ricorsiva

$$T(X) = \mathbb{N} \setminus X$$

$\Rightarrow$ non ci sono soluzioni per $X = T(X)$ cioè T non ha punti fissi

$$T(X) = X \cup \{1\}$$

$X = T(X)$ eq. ricorsiva

$T(\{1\}) = \{1\}$ $\qquad$ $T(\{3\}) = \{1,3\}$

non è PF

$T(\{0,1\}) = \{0,1\}$

$\vdots$

infatti PF: tutti i sottoinsiemi di $\mathbb{N}$ che contengono 1

$$T(X) = \{0\} \cup \{m \mid m-2 \in X\}$$

$$T : \mathcal{P}_{\mathbb{N}} \to \mathcal{P}_{\mathbb{N}}$$

$$X = T(X)$$

$$T(\{0\}) = \{0,2\}$$

$$T(\{0,1\}) = \{0,2,3\}$$

$$T(\{0,2\}) = \{0,2,4\}$$

$$T(\mathbb{N}) = \{0,2,3,4 \ldots\}$$

$$T(\{1\}) = \{0\}$$

$$T(\{0,2,4,\dots\}) = \{0,2,4,\dots\}$$

l'unico punto fisso è il sottoinsieme di $\mathbb{N}$ con tutti i valori pari.

Teorema di ricorsione

- Quando esiste un PF di una trasformazione
- Qual'è il PF di riferimento.

$T : \wp_A \to \wp_A$

T è monotone $\equiv$

presi $X_1, X_2 \in \wp_A$ con

$X_1 \subseteq X_2$

$\Longrightarrow$

$T(X_1) \subseteq T(X_2)$

$$T : \wp_A \to \wp_A$$

T è continua $\equiv$

presa una catena di insiemi $X_0, X_1, X_2, X_3 \dots X_n \dots$

$$X_0 \subseteq X_1 \subseteq X_2 \subseteq X_3 \subseteq \dots \subseteq X_n \subseteq \dots$$

$$X_i \in \wp_A \implies$$

$$\bigcup_{i \geq 0} T(X_i) = T\left(\bigcup_{i \geq 0} X_i\right)$$

$$T(X) = \begin{cases} \{\} & \text{se } \#X > 2 \\ \{1\} & \text{se } \#X \leq 2 \end{cases}$$

$$T : \mathcal{P}_{\mathbb{N}} \to \mathcal{P}_{\mathbb{N}}$$

$$\#\{0,1,2\} = 3$$

$$T(\{0,3,4\}) = \{\}$$

$$T(\{2\}) = \{1\}$$

$$T(\{0,1,2\}) = \{\}$$

$$T(\{0,1\}) = \{1\}$$

$$\{0,1\} \subseteq \{0,1,2\}$$

$$T(\{0,1\}) \not\subseteq T(\{0,1,2\})$$

$$\shortparallel \qquad\qquad\qquad\qquad \shortparallel$$

$$\{1\} \not\subseteq \{\}$$

$$\underline{\underline{T(X)}} = \begin{cases} \{\} & \text{se } X \text{ è finito} \\ \{1\} & \text{se } X \text{ è infinito} \end{cases}$$

$$T : \mathcal{P}_{\mathbb{N}} \to \mathcal{P}_{\mathbb{N}}$$

$$X_0 \subseteq X_1 \dots \subseteq X_n \subseteq \dots$$

$$X_i = \{0, 1, \dots, i\}$$

$$X_0 = \{0\}$$
$$X_1 = \{0, 1\}$$
$$X_2 = \{0, 1, 2\}$$
$$\vdots$$
infinito

$$\bigcup_{i \geq 0} X_i = \mathbb{N}$$

$$T\left(\bigcup_{i \geq 0} X_i\right) = \{1\}$$

$$\bigcup_{i \geq 0} T(X_i) = \{\}$$

T è monotone? Sì

T è continue? NO

$$T(x) = \begin{cases} \{\} & \text{se } x \text{ è finito} \\ \{1\} & \text{se } x \text{ è infinito} \end{cases}$$

$$X_1 \subseteq X_2$$

$$T(X_1) \subseteq T(X_2)$$

se entrambi X_1 e X_2 sono finiti o entrambi σ-finiti.

$X_1 = \{0,1\} \qquad X_2 = \{0,1,2\}$

$$T(X_1) = \{\ \}$$

$$\subseteq$$

$$T(X_2) = \{\ \}$$

$X_1 = \{0,1\} \qquad X_2 = \mathbb{N}$

$$T(X_1) \subseteq T(X_2)$$

T continue

$$X_0 \subseteq X_1 \subseteq X_2 \ldots$$

$$\bigcup_{i \geq 0} T(X_i) = T\left(\bigcup_{i \geq 0} X_i\right)$$

Continuità e monotonia

Teo

data $T : \mathcal{P}_A \to \mathcal{P}_A$

T continua

$\Rightarrow T$ monotona

dim $X_1 \subseteq X_2$

$A \cup B = B \Rightarrow A \subseteq B$

$T(X_2)$

$=$ { proprietà di $\cup$ }

$T(X_1 \cup X_2)$

$=$ { T continua $T\left(\bigcup_{i \geq 0} X_i\right) = \bigcup_{i \geq 0} T(X_i)$ }

$T(X_1) \cup T(X_2)$

$\equiv \quad T(X_1) \cup T(X_2) = T(X_2)$

$\Rightarrow \quad T(X_1) \subseteq T(X_2)$

<u>Teo</u>

(l'unione di insiemi è continua)

$T : \mathcal{P}_A \to \mathcal{P}_A \qquad Y \in \mathcal{P}_A$

$T(X) = \underline{\underline{X}} \cup \underline{\underline{Y}}$ è continua

$$X_0 \subseteq X_1 \subseteq \dots X_n \subseteq \dots$$

$$T\left(\bigcup_{i \geq 0} X_i\right)$$

= {definizione di T}

$$\left(\bigcup_{i \geq 0} X_i\right) \cup Y$$

= {proprietà $\cup$, $\left(\bigcup_{i \geq 0} X_i\right) \cup Y = \bigcup_{i \geq 0} \left(X_i \cup Y\right)$}

$$\bigcup_{i \geq 0} \left(X_i \cup Y\right)$$

= {def T}

$$\bigcup_{i \geq 0} T(X_i)$$

<u>Teo</u> La composizione di trasformazioni continue è continua

date

$$G : \mathcal{P}_A \to \mathcal{P}_A$$

$$F : \mathcal{P}_A \to \mathcal{P}_A$$

continue $\Longrightarrow$

$F \circ G$ è continua

$$F \circ G(X) = F(G(X))$$

<u>dim</u>

$$X_0 \subseteq X_1 \subseteq \dots X_n \subseteq \dots \qquad X_i \in \wp_A$$

$$F\Big(G\Big(\bigcup_{i \geq 0} X_i\Big)\Big)$$

$$= \{ G \text{ è continua} \}$$

$$F\Big(\bigcup_{i \geq 0} G(X_i)\Big)$$

già una catena

$$G(X_0) \subseteq G(X_1) \subseteq \dots$$

$$= \{ F \text{ è continua, } G \text{ monotona} \}$$

$$\bigcup_{i \geq 0} F(G(x_i))$$

$$F\Big(G\Big(\bigcup_{i \geq 0} x_i\Big)\Big) = \bigcup_{i \geq 0} F(G(x_i))$$

$F \circ G$ è continua

Teorema di ricorsione

dato $T : \wp_A \to \wp_A$

se T è continua allora

1) $I = \bigcup_{i \geq 0} T^i(\{\})$

è un Punto Fisso di T

2) per ogni altro J (PF di T)

$I \subseteq J$ (I è il minimo punto fisso di T)

$$\begin{cases} T^0(\{\}) = \{\} & \left(\text{non applicare la } T\right) \\[2em] T^i(\{\}) = T\left(T^{i-1}(\{\})\right) & i > 0 \end{cases}$$

$$T^i(\{\}) = \underbrace{T(T(\ldots\ldots T}_{i \text{ volte}}(\{\})\ldots))$$

Lemma

$T : \wp_A \to \wp_A$ continue

$$T^i(\{\}) \subseteq T^{i+1}(\{\})$$

dim per induzione

$$\big(P(0) \wedge \forall n.\ P(n) \Rightarrow P(n+1)\big) \Rightarrow \forall n.\ P(n)$$

Caso base $(n=0)$

$$T^0(\{\}) \subseteq T^1(\{\})$$

$T^0(\{\})$

$= \{\text{def}\}$

$\{\}$

$\subseteq \{\, \{\} \subseteq A \,\}$

$T(\{\})$

$\subseteq$

$= \{\text{def}\}$

$T^1(\{\})$

Caso induttivo

$T^n(\{\}) \subseteq T^{n+1}(\{\})$

$\Rightarrow T^{n+1}(\{\}) \subseteq T^{n+2}(\{\})$

$T^{n+1}(\{\})$ $\subseteq$ {T monotono, ip. ind. $T^n(\{\}) \subseteq T^{n+1}(\{\})$}

$= \{def\}$ $\subseteq$

$T(T^n(\{\}))$ $\qquad T(T^{n+1}(\{\}))$

$= \{def\}$ $T^{n+2}(\{\})$

Teorema di ricorsione

$T : \wp_A \to \wp_A$ continua

allora

1) $I = \bigcup_{i \geq 0} T^i(\{\})$

è un punto fisso di T

dim

$$T(I) = I$$

$$= \{\text{def}\}$$

$$T\Big(\bigcup_{i\geq 0} \underline{\underline{T^i(\{\})}}\Big)$$

$$= \{\text{T è continua, } T^i(\{\}) \text{ è una catena}\}$$

$$\bigcup_{i\geq 0} T\big(T^i(\{\})\big)$$

$$= \{\text{def}\}$$

$$\bigcup_{i \geq 0} T^{i+1}(\{\})$$

$= \{\text{calcolo}\}$

$$\bigcup_{i \geq 1} T^{i}(\{\})$$

$= \{\ \{\} \cup A = A\ \}$

$$\{\} \cup \left(\bigcup_{i \geq 1} T^{i}(\{\})\right)$$

$= \{\ T^0(\{\}) = \{\}\ \}$

$$T^0(\{\}) \cup \left(\bigcup_{i \geq 1} T^{i}(\{\})\right)$$

$= \{\text{calcolo}\}$

$$\bigcup_{i \geq 0} T^{i}(\{\})$$

$= \{\text{def } I\}$

$$I$$