Fabrizio Luccio. Appunti di algoritmica

2 Alcune formule utili

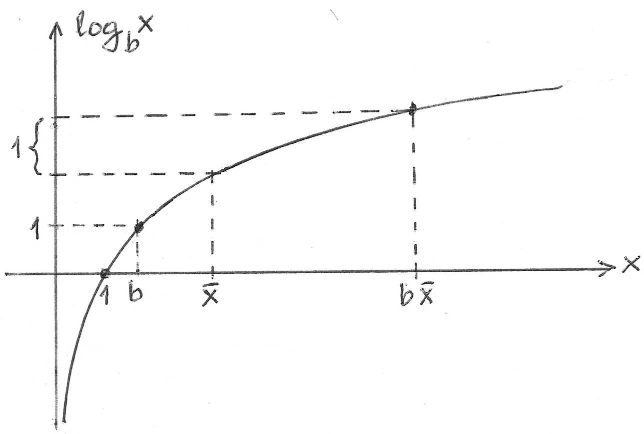
Proprietà della funzione logaritmo

1. $y = \log_b x$. Per definizione y è l'esponente che bisogna dare alla base b per ottenere x, ovvero $b^y = x$.

2. Considereremo basi intere positive, in particolare $b = 2$ e $b = 10$.

3. Dalla definizione 1 risulta con semplici calcoli:
   $\log_b(xy) = \log_b x + \log_b y$; $\log_b(x^y) = y \cdot \log_b x$; $\log_b 1/x = -\log_b x$;
   $\log_b 1 = 0$; $log_b b = 1$; $\log_b(bx) = \log_b x + 1$;
   $\lim_{x\to\infty} \log_b x = \infty$; $\lim_{x\to 0} \log_b x = -\infty$

L'andamento della funzione logaritmo è il seguente:



Per x che tende all'infinito $\log_b x$ tende all'infinito, ma più lentamente di x^e per qualunque esponente $e > 0$ per quanto piccolo (in particolare $0 < e < 1$).

Per cambiare la base di un logaritmo da b ad a si deve moltiplicare per il logaritmo $\log_a b$ tra le basi, cioè:

$$\log_a x = \log_a b \cdot \log_b x.$$

Questa formula è fondamentale. Poiché il termine $\log_a b$ è una costante (cioè è indipendente da x), i logaritmi di x in basi diverse sono proporzionali tra loro. Ciò implica che le basi dei logaritmi non si specificano negli ordini di grandezza perché i diversi logaritmi dello stesso termine differiscono solo per una costante moltiplicativa. Scriveremo quindi O($\log x$) e simili.

Formule aritmetiche

- $\sum_{i=1}^{n} i = \frac{n(n+1)}{2}$ per esempio $1+2+3+4+5 = \frac{5 \cdot 6}{2} = 15$
- $\sum_{i=0}^{n-1} 2^i = 2^n - 1$ per esempio $1+2+4+8+16 = 32-1 = 31$
- $n! \approx \sqrt{2\pi n}(n/e)^n$, ove $e \approx 2,718$ è la base dei logaritmi naturali:

  questa è la *formula di Stirling* che approssima la funzione fattoriale.

  $n!$ è pari al numero di *permutazioni* di n elementi.
- $\left(\begin{array}{c} n \\ k \end{array} \right) = \frac{n!}{k!(n-k)!}$

  questo è il *coefficiente binomiale* che dà il numero di *combinazioni* di n elementi in gruppi di k. Per esempio per $n = 5, k = 2$ le combinazioni dei cinque elementi a, b, c, d, e in gruppi di due sono $5!/(2!3!) = 120/12 = 10$: *ab ac ad ae bc bd be cd ce de*.
- k^n dà il numero di *disposizioni* (con ripetizione) di k elementi in gruppi di n. Per esempio per $k = 2, n = 3$ le disposizioni dei due elementi 0,1 in gruppi di tre sono $2^3 = 8$: 000 001 010 011 100 101 110 111.