LPP 2026/27 (063AA, 9CFU)

Programming Languages

Fabio Gadducci

and Laboratory

Vincenzo Ciancia

04 - Logical Systems

Some exercises
(unification)

Unification

delete

$\mathcal{G} \cup \{t \stackrel{?}{=} t\}$

becomes

$\mathcal{G}$

eliminate

$\mathcal{G} \cup \{x \stackrel{?}{=} t\}$

becomes if $x \in \mathit{vars}(\mathcal{G}) \setminus \mathit{vars}(t)$

$\mathcal{G}[x = t] \cup \{x \stackrel{?}{=} t\}$

swap

$\mathcal{G} \cup \{f(t_1, ..., t_m) \stackrel{?}{=} x\}$

becomes

$\mathcal{G} \cup \{x \stackrel{?}{=} f(t_1, ..., t_m)\}$

decompose

$\mathcal{G} \cup \{f(t_1, ..., t_m) \stackrel{?}{=} f(u_1, ..., u_m)\}$

becomes

$\mathcal{G} \cup \{t_1 \stackrel{?}{=} u_1, ..., t_m \stackrel{?}{=} u_m\}$

occur-check

$\mathcal{G} \cup \{x \stackrel{?}{=} f(t_1, ..., t_m)\}$

fails if $x \in \mathit{vars}(f(t_1, ..., t_m))$

conflict

$\mathcal{G} \cup \{f(t_1, ..., t_m) \stackrel{?}{=} g(u_1, ..., u_h)\}$

fails if $f \neq g$ or $m \neq h$

Exercise

$$\{\mathsf{prod}(\mathsf{s}(x), y, \mathsf{s}(z)) \stackrel{?}{=} \mathsf{prod}(y, z, x)\}$$

Exercise

$$\{\mathsf{prod}(\mathsf{s}(x), y, \mathsf{s}(z)) \stackrel{?}{=} \mathsf{prod}(y, z, x)\}$$

Exercise

$$\{\mathsf{prod}(\mathsf{s}(x), y, \mathsf{s}(z)) \stackrel{?}{=} \mathsf{prod}(y, z, x)\}$$

decompose

Exercise

$$\{\mathsf{prod}(\mathsf{s}(x), y, \mathsf{s}(z)) \stackrel{?}{=} \mathsf{prod}(y, z, x)\}$$

decompose

$$\{\mathsf{s}(x) \stackrel{?}{=} y\ ,\ y \stackrel{?}{=} z\ ,\ \mathsf{s}(z) \stackrel{?}{=} x\}$$

Exercise

$$\{\mathsf{prod}(\mathsf{s}(x), y, \mathsf{s}(z)) \stackrel{?}{=} \mathsf{prod}(y, z, x)\}$$

decompose

$$\{\mathsf{s}(x) \stackrel{?}{=} y \,,\; y \stackrel{?}{=} z \,,\; \mathsf{s}(z) \stackrel{?}{=} x\}$$

swap

Exercise

$$\{\mathsf{prod}(\mathsf{s}(x), y, \mathsf{s}(z)) \stackrel{?}{=} \mathsf{prod}(y, z, x)\}$$

decompose

$$\{\mathsf{s}(x) \stackrel{?}{=} y \,,\; y \stackrel{?}{=} z \,,\; \mathsf{s}(z) \stackrel{?}{=} x\}$$

swap

$$\{y \stackrel{?}{=} \mathsf{s}(x) \,,\; y \stackrel{?}{=} z \,,\; \mathsf{s}(z) \stackrel{?}{=} x\}$$

Exercise

$$\{\mathsf{prod}(\mathsf{s}(x), y, \mathsf{s}(z)) \stackrel{?}{=} \mathsf{prod}(y, z, x)\}$$

decompose

$$\{\mathsf{s}(x) \stackrel{?}{=} y\ ,\ y \stackrel{?}{=} z\ ,\ \mathsf{s}(z) \stackrel{?}{=} x\}$$

swap

$$\{y \stackrel{?}{=} \mathsf{s}(x)\ ,\ y \stackrel{?}{=} z\ ,\ \mathsf{s}(z) \stackrel{?}{=} x\}$$

eliminate

Exercise

$$\{\mathsf{prod}(\mathsf{s}(x), y, \mathsf{s}(z)) \stackrel{?}{=} \mathsf{prod}(y, z, x)\}$$

decompose

$$\{\mathsf{s}(x) \stackrel{?}{=} y\,,\; y \stackrel{?}{=} z\,,\; \mathsf{s}(z) \stackrel{?}{=} x\}$$

swap

$$\{y \stackrel{?}{=} \mathsf{s}(x)\,,\; y \stackrel{?}{=} z\,,\; \mathsf{s}(z) \stackrel{?}{=} x\}$$

eliminate

$$\{y \stackrel{?}{=} \mathsf{s}(x)\,,\; \mathsf{s}(x) \stackrel{?}{=} z\,,\; \mathsf{s}(z) \stackrel{?}{=} x\}$$

Exercise

$$\{\mathsf{prod}(\mathsf{s}(x), y, \mathsf{s}(z)) \stackrel{?}{=} \mathsf{prod}(y, z, x)\}$$

decompose

$$\{\mathsf{s}(x) \stackrel{?}{=} y \,,\, y \stackrel{?}{=} z \,,\, \mathsf{s}(z) \stackrel{?}{=} x\}$$

swap

$$\{y \stackrel{?}{=} \mathsf{s}(x) \,,\, y \stackrel{?}{=} z \,,\, \mathsf{s}(z) \stackrel{?}{=} x\}$$

eliminate

$$\{y \stackrel{?}{=} \mathsf{s}(x) \,,\, \mathsf{s}(x) \stackrel{?}{=} z \,,\, \mathsf{s}(z) \stackrel{?}{=} x\}$$

swap

Exercise

$$\{\mathsf{prod}(\mathsf{s}(x), y, \mathsf{s}(z)) \stackrel{?}{=} \mathsf{prod}(y, z, x)\}$$

decompose

$$\{\mathsf{s}(x) \stackrel{?}{=} y\,,\; y \stackrel{?}{=} z\,,\; \mathsf{s}(z) \stackrel{?}{=} x\}$$

swap

$$\{y \stackrel{?}{=} \mathsf{s}(x)\,,\; y \stackrel{?}{=} z\,,\; \mathsf{s}(z) \stackrel{?}{=} x\}$$

eliminate

$$\{y \stackrel{?}{=} \mathsf{s}(x)\,,\; \mathsf{s}(x) \stackrel{?}{=} z\,,\; \mathsf{s}(z) \stackrel{?}{=} x\}$$

swap

$$\{y \stackrel{?}{=} \mathsf{s}(x)\,,\; z \stackrel{?}{=} \mathsf{s}(x)\,,\; \mathsf{s}(z) \stackrel{?}{=} x\}$$

Exercise

$$\{\mathsf{prod}(\mathsf{s}(x), y, \mathsf{s}(z)) \stackrel{?}{=} \mathsf{prod}(y, z, x)\}$$

decompose

$$\{\mathsf{s}(x) \stackrel{?}{=} y\ ,\ y \stackrel{?}{=} z\ ,\ \mathsf{s}(z) \stackrel{?}{=} x\}$$

swap

$$\{y \stackrel{?}{=} \mathsf{s}(x)\ ,\ y \stackrel{?}{=} z\ ,\ \mathsf{s}(z) \stackrel{?}{=} x\}$$

eliminate

$$\{y \stackrel{?}{=} \mathsf{s}(x)\ ,\ \mathsf{s}(x) \stackrel{?}{=} z\ ,\ \mathsf{s}(z) \stackrel{?}{=} x\}$$

swap

$$\{y \stackrel{?}{=} \mathsf{s}(x)\ ,\ z \stackrel{?}{=} \mathsf{s}(x)\ ,\ \mathsf{s}(z) \stackrel{?}{=} x\}$$

eliminate

Exercise

$$\{\mathsf{prod}(\mathsf{s}(x), y, \mathsf{s}(z)) \stackrel{?}{=} \mathsf{prod}(y, z, x)\}$$

decompose

$$\{\mathsf{s}(x) \stackrel{?}{=} y\,,\; y \stackrel{?}{=} z\,,\; \mathsf{s}(z) \stackrel{?}{=} x\}$$

swap

$$\{y \stackrel{?}{=} \mathsf{s}(x)\,,\; y \stackrel{?}{=} z\,,\; \mathsf{s}(z) \stackrel{?}{=} x\}$$

eliminate

$$\{y \stackrel{?}{=} \mathsf{s}(x)\,,\; \mathsf{s}(x) \stackrel{?}{=} z\,,\; \mathsf{s}(z) \stackrel{?}{=} x\}$$

swap

$$\{y \stackrel{?}{=} \mathsf{s}(x)\,,\; z \stackrel{?}{=} \mathsf{s}(x)\,,\; \mathsf{s}(z) \stackrel{?}{=} x\}$$

eliminate

$$\{y \stackrel{?}{=} \mathsf{s}(x)\,,\; z \stackrel{?}{=} \mathsf{s}(x)\,,\; \mathsf{s}(\mathsf{s}(x)) \stackrel{?}{=} x\}$$

Exercise

$$\{\mathsf{prod}(\mathsf{s}(x), y, \mathsf{s}(z)) \stackrel{?}{=} \mathsf{prod}(y, z, x)\}$$

decompose

$$\{\mathsf{s}(x) \stackrel{?}{=} y \,,\, y \stackrel{?}{=} z \,,\, \mathsf{s}(z) \stackrel{?}{=} x\}$$

swap

$$\{y \stackrel{?}{=} \mathsf{s}(x) \,,\, y \stackrel{?}{=} z \,,\, \mathsf{s}(z) \stackrel{?}{=} x\}$$

eliminate

$$\{y \stackrel{?}{=} \mathsf{s}(x) \,,\, \mathsf{s}(x) \stackrel{?}{=} z \,,\, \mathsf{s}(z) \stackrel{?}{=} x\}$$

swap

$$\{y \stackrel{?}{=} \mathsf{s}(x) \,,\, z \stackrel{?}{=} \mathsf{s}(x) \,,\, \mathsf{s}(z) \stackrel{?}{=} x\}$$

eliminate

$$\{y \stackrel{?}{=} \mathsf{s}(x) \,,\, z \stackrel{?}{=} \mathsf{s}(x) \,,\, \mathsf{s}(\mathsf{s}(x)) \stackrel{?}{=} x\}$$

swap

Exercise

$$\{\mathsf{prod}(\mathsf{s}(x), y, \mathsf{s}(z)) \stackrel{?}{=} \mathsf{prod}(y, z, x)\}$$

decompose

$$\{\mathsf{s}(x) \stackrel{?}{=} y \,,\, y \stackrel{?}{=} z \,,\, \mathsf{s}(z) \stackrel{?}{=} x\}$$

swap

$$\{y \stackrel{?}{=} \mathsf{s}(x) \,,\, y \stackrel{?}{=} z \,,\, \mathsf{s}(z) \stackrel{?}{=} x\}$$

eliminate

$$\{y \stackrel{?}{=} \mathsf{s}(x) \,,\, \mathsf{s}(x) \stackrel{?}{=} z \,,\, \mathsf{s}(z) \stackrel{?}{=} x\}$$

swap

$$\{y \stackrel{?}{=} \mathsf{s}(x) \,,\, z \stackrel{?}{=} \mathsf{s}(x) \,,\, \mathsf{s}(z) \stackrel{?}{=} x\}$$

eliminate

$$\{y \stackrel{?}{=} \mathsf{s}(x) \,,\, z \stackrel{?}{=} \mathsf{s}(x) \,,\, \mathsf{s}(\mathsf{s}(x)) \stackrel{?}{=} x\}$$

swap

$$\{y \stackrel{?}{=} \mathsf{s}(x) \,,\, z \stackrel{?}{=} \mathsf{s}(x) \,,\, x \stackrel{?}{=} \mathsf{s}(\mathsf{s}(x))\}$$

Exercise

$$\{\mathsf{prod}(\mathsf{s}(x), y, \mathsf{s}(z)) \stackrel{?}{=} \mathsf{prod}(y, z, x)\}$$

decompose

$$\{\mathsf{s}(x) \stackrel{?}{=} y \,,\, y \stackrel{?}{=} z \,,\, \mathsf{s}(z) \stackrel{?}{=} x\}$$

swap

$$\{y \stackrel{?}{=} \mathsf{s}(x) \,,\, y \stackrel{?}{=} z \,,\, \mathsf{s}(z) \stackrel{?}{=} x\}$$

eliminate

$$\{y \stackrel{?}{=} \mathsf{s}(x) \,,\, \mathsf{s}(x) \stackrel{?}{=} z \,,\, \mathsf{s}(z) \stackrel{?}{=} x\}$$

swap

$$\{y \stackrel{?}{=} \mathsf{s}(x) \,,\, z \stackrel{?}{=} \mathsf{s}(x) \,,\, \mathsf{s}(z) \stackrel{?}{=} x\}$$

eliminate

$$\{y \stackrel{?}{=} \mathsf{s}(x) \,,\, z \stackrel{?}{=} \mathsf{s}(x) \,,\, \mathsf{s}(\mathsf{s}(x)) \stackrel{?}{=} x\}$$

swap

$$\{y \stackrel{?}{=} \mathsf{s}(x) \,,\, z \stackrel{?}{=} \mathsf{s}(x) \,,\, x \stackrel{?}{=} \mathsf{s}(\mathsf{s}(x))\}$$

occur-check

Exercise

$$\{\mathsf{prod}(\mathsf{s}(x), y, \mathsf{s}(z)) \stackrel{?}{=} \mathsf{prod}(y, z, x)\}$$

decompose

$$\{\mathsf{s}(x) \stackrel{?}{=} y\ ,\ y \stackrel{?}{=} z\ ,\ \mathsf{s}(z) \stackrel{?}{=} x\}$$

swap

$$\{y \stackrel{?}{=} \mathsf{s}(x)\ ,\ y \stackrel{?}{=} z\ ,\ \mathsf{s}(z) \stackrel{?}{=} x\}$$

eliminate

$$\{y \stackrel{?}{=} \mathsf{s}(x)\ ,\ \mathsf{s}(x) \stackrel{?}{=} z\ ,\ \mathsf{s}(z) \stackrel{?}{=} x\}$$

swap

$$\{y \stackrel{?}{=} \mathsf{s}(x)\ ,\ z \stackrel{?}{=} \mathsf{s}(x)\ ,\ \mathsf{s}(z) \stackrel{?}{=} x\}$$

eliminate

$$\{y \stackrel{?}{=} \mathsf{s}(x)\ ,\ z \stackrel{?}{=} \mathsf{s}(x)\ ,\ \mathsf{s}(\mathsf{s}(x)) \stackrel{?}{=} x\}$$

swap

$$\{y \stackrel{?}{=} \mathsf{s}(x)\ ,\ z \stackrel{?}{=} \mathsf{s}(x)\ ,\ x \stackrel{?}{=} \mathsf{s}(\mathsf{s}(x))\}$$

occur-check

Exercise

$$\{\mathsf{pow}(x, \mathsf{s}(y), x) \stackrel{?}{=} \mathsf{pow}(\mathsf{s}(y), z, z)\}$$

Exercise

$$\{\mathsf{pow}(x, \mathsf{s}(y), x) \stackrel{?}{=} \mathsf{pow}(\mathsf{s}(y), z, z)\}$$

Exercise

$$\{\mathsf{pow}(x, \mathsf{s}(y), x) \stackrel{?}{=} \mathsf{pow}(\mathsf{s}(y), z, z)\}$$

decompose

Exercise

$$\{\mathsf{pow}(x, \mathsf{s}(y), x) \stackrel{?}{=} \mathsf{pow}(\mathsf{s}(y), z, z)\}$$

decompose

$$\{x \stackrel{?}{=} \mathsf{s}(y)\ ,\ \mathsf{s}(y) \stackrel{?}{=} z\ ,\ \ x \stackrel{?}{=} z\}$$

Exercise

$$\{\mathsf{pow}(x, \mathsf{s}(y), x) \stackrel{?}{=} \mathsf{pow}(\mathsf{s}(y), z, z)\}$$

decompose

$$\{x \stackrel{?}{=} \mathsf{s}(y)\ ,\ \mathsf{s}(y) \stackrel{?}{=} z\ ,\ \ x \stackrel{?}{=} z\}$$

eliminate

Exercise

$$\{\mathsf{pow}(x, \mathsf{s}(y), x) \stackrel{?}{=} \mathsf{pow}(\mathsf{s}(y), z, z)\}$$

decompose

$$\{x \stackrel{?}{=} \mathsf{s}(y) \,, \mathsf{s}(y) \stackrel{?}{=} z \,, \; x \stackrel{?}{=} z\}$$

eliminate

$$\{x \stackrel{?}{=} \mathsf{s}(y) \,, \mathsf{s}(y) \stackrel{?}{=} z \,, \; \mathsf{s}(y) \stackrel{?}{=} z\}$$

Exercise

$$\{\mathsf{pow}(x, \mathsf{s}(y), x) \stackrel{?}{=} \mathsf{pow}(\mathsf{s}(y), z, z)\}$$

decompose

$$\{x \stackrel{?}{=} \mathsf{s}(y)\,,\ \mathsf{s}(y) \stackrel{?}{=} z\,,\ x \stackrel{?}{=} z\}$$

eliminate

$$\{x \stackrel{?}{=} \mathsf{s}(y)\,,\ \mathsf{s}(y) \stackrel{?}{=} z\,,\ \mathsf{s}(y) \stackrel{?}{=} z\}$$

swap

Exercise

$$\{\mathsf{pow}(x, \mathsf{s}(y), x) \stackrel{?}{=} \mathsf{pow}(\mathsf{s}(y), z, z)\}$$

decompose

$$\{x \stackrel{?}{=} \mathsf{s}(y)\,,\ \mathsf{s}(y) \stackrel{?}{=} z\,,\ x \stackrel{?}{=} z\}$$

eliminate

$$\{x \stackrel{?}{=} \mathsf{s}(y)\,,\ \mathsf{s}(y) \stackrel{?}{=} z\,,\ \mathsf{s}(y) \stackrel{?}{=} z\}$$

swap

$$\{x \stackrel{?}{=} \mathsf{s}(y)\,,\ z \stackrel{?}{=} \mathsf{s}(y)\,,\ \mathsf{s}(y) \stackrel{?}{=} z\}$$

Exercise

$$\{\mathsf{pow}(x, \mathsf{s}(y), x) \stackrel{?}{=} \mathsf{pow}(\mathsf{s}(y), z, z)\}$$

decompose

$$\{x \stackrel{?}{=} \mathsf{s}(y)\ ,\ \mathsf{s}(y) \stackrel{?}{=} z\ ,\ \ x \stackrel{?}{=} z\}$$

eliminate

$$\{x \stackrel{?}{=} \mathsf{s}(y)\ ,\ \mathsf{s}(y) \stackrel{?}{=} z\ ,\ \ \mathsf{s}(y) \stackrel{?}{=} z\}$$

swap

$$\{x \stackrel{?}{=} \mathsf{s}(y)\ ,\ z \stackrel{?}{=} \mathsf{s}(y)\ ,\ \ \mathsf{s}(y) \stackrel{?}{=} z\}$$

eliminate

Exercise

$$\{\mathsf{pow}(x, \mathsf{s}(y), x) \stackrel{?}{=} \mathsf{pow}(\mathsf{s}(y), z, z)\}$$

decompose

$$\{x \stackrel{?}{=} \mathsf{s}(y)\,,\ \mathsf{s}(y) \stackrel{?}{=} z\,,\ x \stackrel{?}{=} z\}$$

eliminate

$$\{x \stackrel{?}{=} \mathsf{s}(y)\,,\ \mathsf{s}(y) \stackrel{?}{=} z\,,\ \mathsf{s}(y) \stackrel{?}{=} z\}$$

swap

$$\{x \stackrel{?}{=} \mathsf{s}(y)\,,\ z \stackrel{?}{=} \mathsf{s}(y)\,,\ \mathsf{s}(y) \stackrel{?}{=} z\}$$

eliminate

$$\{x \stackrel{?}{=} \mathsf{s}(y)\,,\ z \stackrel{?}{=} \mathsf{s}(y)\,,\ \mathsf{s}(y) \stackrel{?}{=} \mathsf{s}(y)\}$$

Exercise

$$\{\mathsf{pow}(x, \mathsf{s}(y), x) \stackrel{?}{=} \mathsf{pow}(\mathsf{s}(y), z, z)\}$$

decompose

$$\{x \stackrel{?}{=} \mathsf{s}(y)\,,\ \mathsf{s}(y) \stackrel{?}{=} z\,,\ \ x \stackrel{?}{=} z\}$$

eliminate

$$\{x \stackrel{?}{=} \mathsf{s}(y)\,,\ \mathsf{s}(y) \stackrel{?}{=} z\,,\ \ \mathsf{s}(y) \stackrel{?}{=} z\}$$

swap

$$\{x \stackrel{?}{=} \mathsf{s}(y)\,,\ z \stackrel{?}{=} \mathsf{s}(y)\,,\ \ \mathsf{s}(y) \stackrel{?}{=} z\}$$

eliminate

$$\{x \stackrel{?}{=} \mathsf{s}(y)\,,\ z \stackrel{?}{=} \mathsf{s}(y)\,,\ \ \mathsf{s}(y) \stackrel{?}{=} \mathsf{s}(y)\}$$

delete

Exercise

$$\{\mathsf{pow}(x, \mathsf{s}(y), x) \stackrel{?}{=} \mathsf{pow}(\mathsf{s}(y), z, z)\}$$

decompose

$$\{x \stackrel{?}{=} \mathsf{s}(y)\,,\ \mathsf{s}(y) \stackrel{?}{=} z\,,\ x \stackrel{?}{=} z\}$$

eliminate

$$\{x \stackrel{?}{=} \mathsf{s}(y)\,,\ \mathsf{s}(y) \stackrel{?}{=} z\,,\ \mathsf{s}(y) \stackrel{?}{=} z\}$$

swap

$$\{x \stackrel{?}{=} \mathsf{s}(y)\,,\ z \stackrel{?}{=} \mathsf{s}(y)\,,\ \mathsf{s}(y) \stackrel{?}{=} z\}$$

eliminate

$$\{x \stackrel{?}{=} \mathsf{s}(y)\,,\ z \stackrel{?}{=} \mathsf{s}(y)\,,\ \mathsf{s}(y) \stackrel{?}{=} \mathsf{s}(y)\}$$

delete

$$\{x \stackrel{?}{=} \mathsf{s}(y)\,,\ z \stackrel{?}{=} \mathsf{s}(y)\}$$

Exercise

$$\{\mathsf{pow}(x, \mathsf{s}(y), x) \stackrel{?}{=} \mathsf{pow}(\mathsf{s}(y), z, z)\}$$

decompose

$$\{x \stackrel{?}{=} \mathsf{s}(y)\,,\ \mathsf{s}(y) \stackrel{?}{=} z\,,\ \ x \stackrel{?}{=} z\}$$

eliminate

$$\{x \stackrel{?}{=} \mathsf{s}(y)\,,\ \mathsf{s}(y) \stackrel{?}{=} z\,,\ \ \mathsf{s}(y) \stackrel{?}{=} z\}$$

swap

$$\{x \stackrel{?}{=} \mathsf{s}(y)\,,\ z \stackrel{?}{=} \mathsf{s}(y)\,,\ \ \mathsf{s}(y) \stackrel{?}{=} z\}$$

eliminate

$$\{x \stackrel{?}{=} \mathsf{s}(y)\,,\ z \stackrel{?}{=} \mathsf{s}(y)\,,\ \ \mathsf{s}(y) \stackrel{?}{=} \mathsf{s}(y)\}$$

delete

$$\{x \stackrel{?}{=} \mathsf{s}(y)\,,\ z \stackrel{?}{=} \mathsf{s}(y)\}$$

$$[x = \mathsf{s}(y)\,,\ z = \mathsf{s}(y)]$$

Exercise

$$\{\mathsf{pow}(x, \mathsf{s}(y), x) \overset{?}{=} \mathsf{pow}(\mathsf{s}(y), z, z)\}$$

decompose

$$\{x \overset{?}{=} \mathsf{s}(y)\,,\ \mathsf{s}(y) \overset{?}{=} z\,,\ x \overset{?}{=} z\}$$

eliminate

$$\{x \overset{?}{=} \mathsf{s}(y)\,,\ \mathsf{s}(y) \overset{?}{=} z\,,\ \mathsf{s}(y) \overset{?}{=} z\}$$

swap

$$\{x \overset{?}{=} \mathsf{s}(y)\,,\ z \overset{?}{=} \mathsf{s}(y)\,,\ \mathsf{s}(y) \overset{?}{=} z\}$$

eliminate

$$\{x \overset{?}{=} \mathsf{s}(y)\,,\ z \overset{?}{=} \mathsf{s}(y)\,,\ \mathsf{s}(y) \overset{?}{=} \mathsf{s}(y)\}$$

delete

$$\{x \overset{?}{=} \mathsf{s}(y)\,,\ z \overset{?}{=} \mathsf{s}(y)\}$$

$$[x = \mathsf{s}(y)\,,\ z = \mathsf{s}(y)]$$

Exercise

$$\{\mathsf{div}(x, \mathsf{s}(y)) \stackrel{?}{=} \mathsf{div}(z, x)\ ,\ \mathsf{div}(y, \mathsf{s}(z)) \stackrel{?}{=} \mathsf{div}(u, \mathsf{s}(u))\}$$

Exercise

$$\{\mathsf{div}(x, \mathsf{s}(y)) \stackrel{?}{=} \mathsf{div}(z, x)\,,\ \mathsf{div}(y, \mathsf{s}(z)) \stackrel{?}{=} \mathsf{div}(u, \mathsf{s}(u))\}$$

Exercise

$$\{\mathsf{div}(x, \mathsf{s}(y)) \stackrel{?}{=} \mathsf{div}(z, x)\,,\ \mathsf{div}(y, \mathsf{s}(z)) \stackrel{?}{=} \mathsf{div}(u, \mathsf{s}(u))\}$$

decompose decompose

Exercise

$$\{\mathsf{div}(x, \mathsf{s}(y)) \stackrel{?}{=} \mathsf{div}(z, x)\,,\ \mathsf{div}(y, \mathsf{s}(z)) \stackrel{?}{=} \mathsf{div}(u, \mathsf{s}(u))\}$$

decompose decompose

$$\{x \stackrel{?}{=} z\,,\ \mathsf{s}(y) \stackrel{?}{=} x\,,\ y \stackrel{?}{=} u\,,\ \mathsf{s}(z) \stackrel{?}{=} \mathsf{s}(u)\}$$

Exercise

$$\{\mathsf{div}(x, \mathsf{s}(y)) \stackrel{?}{=} \mathsf{div}(z, x)\,,\ \mathsf{div}(y, \mathsf{s}(z)) \stackrel{?}{=} \mathsf{div}(u, \mathsf{s}(u))\}$$

decompose decompose

$$\{x \stackrel{?}{=} z\,,\ \mathsf{s}(y) \stackrel{?}{=} x\,,\ y \stackrel{?}{=} u\,,\ \mathsf{s}(z) \stackrel{?}{=} \mathsf{s}(u)\}$$

eliminate

Exercise

$$\{\mathsf{div}(x, \mathsf{s}(y)) \stackrel{?}{=} \mathsf{div}(z, x)\,,\ \mathsf{div}(y, \mathsf{s}(z)) \stackrel{?}{=} \mathsf{div}(u, \mathsf{s}(u))\}$$

decompose decompose

$$\{x \stackrel{?}{=} z\,,\ \mathsf{s}(y) \stackrel{?}{=} x\,,\ y \stackrel{?}{=} u\,,\ \mathsf{s}(z) \stackrel{?}{=} \mathsf{s}(u)\}$$

eliminate

$$\{x \stackrel{?}{=} z\,,\ \mathsf{s}(y) \stackrel{?}{=} z\,,\ y \stackrel{?}{=} u\,,\ \mathsf{s}(z) \stackrel{?}{=} \mathsf{s}(u)\}$$

Exercise

$$\{\mathsf{div}(x, \mathsf{s}(y)) \stackrel{?}{=} \mathsf{div}(z, x)\,,\ \mathsf{div}(y, \mathsf{s}(z)) \stackrel{?}{=} \mathsf{div}(u, \mathsf{s}(u))\}$$

decompose decompose

$$\{x \stackrel{?}{=} z\,,\ \mathsf{s}(y) \stackrel{?}{=} x\,,\ y \stackrel{?}{=} u\,,\ \mathsf{s}(z) \stackrel{?}{=} \mathsf{s}(u)\}$$

eliminate

$$\{x \stackrel{?}{=} z\,,\ \mathsf{s}(y) \stackrel{?}{=} z\,,\ y \stackrel{?}{=} u\,,\ \mathsf{s}(z) \stackrel{?}{=} \mathsf{s}(u)\}$$

swap

Exercise

$$\{\mathsf{div}(x, \mathsf{s}(y)) \stackrel{?}{=} \mathsf{div}(z, x)\,,\ \mathsf{div}(y, \mathsf{s}(z)) \stackrel{?}{=} \mathsf{div}(u, \mathsf{s}(u))\}$$

decompose

decompose

$$\{x \stackrel{?}{=} z\,,\ \mathsf{s}(y) \stackrel{?}{=} x\,,\ y \stackrel{?}{=} u\,,\ \mathsf{s}(z) \stackrel{?}{=} \mathsf{s}(u)\}$$

eliminate

$$\{x \stackrel{?}{=} z\,,\ \mathsf{s}(y) \stackrel{?}{=} z\,,\ y \stackrel{?}{=} u\,,\ \mathsf{s}(z) \stackrel{?}{=} \mathsf{s}(u)\}$$

swap

$$\{x \stackrel{?}{=} z\,,\ z \stackrel{?}{=} \mathsf{s}(y)\,,\ y \stackrel{?}{=} u\,,\ \mathsf{s}(z) \stackrel{?}{=} \mathsf{s}(u)\}$$

Exercise

$$\{\mathsf{div}(x, \mathsf{s}(y)) \stackrel{?}{=} \mathsf{div}(z, x)\,,\ \mathsf{div}(y, \mathsf{s}(z)) \stackrel{?}{=} \mathsf{div}(u, \mathsf{s}(u))\}$$

decompose decompose

$$\{x \stackrel{?}{=} z\,,\ \mathsf{s}(y) \stackrel{?}{=} x\,,\ y \stackrel{?}{=} u\,,\ \mathsf{s}(z) \stackrel{?}{=} \mathsf{s}(u)\}$$

eliminate

$$\{x \stackrel{?}{=} z\,,\ \mathsf{s}(y) \stackrel{?}{=} z\,,\ y \stackrel{?}{=} u\,,\ \mathsf{s}(z) \stackrel{?}{=} \mathsf{s}(u)\}$$

swap

$$\{x \stackrel{?}{=} z\,,\ z \stackrel{?}{=} \mathsf{s}(y)\,,\ y \stackrel{?}{=} u\,,\ \mathsf{s}(z) \stackrel{?}{=} \mathsf{s}(u)\}$$

eliminate

Exercise

$$\{\mathsf{div}(x, \mathsf{s}(y)) \stackrel{?}{=} \mathsf{div}(z, x)\,,\ \mathsf{div}(y, \mathsf{s}(z)) \stackrel{?}{=} \mathsf{div}(u, \mathsf{s}(u))\}$$

decompose

decompose

$$\{x \stackrel{?}{=} z\,,\ \mathsf{s}(y) \stackrel{?}{=} x\,,\ y \stackrel{?}{=} u\,,\ \mathsf{s}(z) \stackrel{?}{=} \mathsf{s}(u)\}$$

eliminate

$$\{x \stackrel{?}{=} z\,,\ \mathsf{s}(y) \stackrel{?}{=} z\,,\ y \stackrel{?}{=} u\,,\ \mathsf{s}(z) \stackrel{?}{=} \mathsf{s}(u)\}$$

swap

$$\{x \stackrel{?}{=} z\,,\ z \stackrel{?}{=} \mathsf{s}(y)\,,\ y \stackrel{?}{=} u\,,\ \mathsf{s}(z) \stackrel{?}{=} \mathsf{s}(u)\}$$

eliminate

$$\{x \stackrel{?}{=} \mathsf{s}(y)\,,\ z \stackrel{?}{=} \mathsf{s}(y)\,,\ y \stackrel{?}{=} u\,,\ \mathsf{s}(\mathsf{s}(y)) \stackrel{?}{=} \mathsf{s}(u)\}$$

Exercise

$$\{\mathsf{div}(x, \mathsf{s}(y)) \stackrel{?}{=} \mathsf{div}(z, x) \,,\, \mathsf{div}(y, \mathsf{s}(z)) \stackrel{?}{=} \mathsf{div}(u, \mathsf{s}(u))\}$$

decompose decompose

$$\{x \stackrel{?}{=} z \,,\, \mathsf{s}(y) \stackrel{?}{=} x \,,\, y \stackrel{?}{=} u \,,\, \mathsf{s}(z) \stackrel{?}{=} \mathsf{s}(u)\}$$

eliminate

$$\{x \stackrel{?}{=} z \,,\, \mathsf{s}(y) \stackrel{?}{=} z \,,\, y \stackrel{?}{=} u \,,\, \mathsf{s}(z) \stackrel{?}{=} \mathsf{s}(u)\}$$

swap

$$\{x \stackrel{?}{=} z \,,\, z \stackrel{?}{=} \mathsf{s}(y) \,,\, y \stackrel{?}{=} u \,,\, \mathsf{s}(z) \stackrel{?}{=} \mathsf{s}(u)\}$$

eliminate

$$\{x \stackrel{?}{=} \mathsf{s}(y) \,,\, z \stackrel{?}{=} \mathsf{s}(y) \,,\, y \stackrel{?}{=} u \,,\, \mathsf{s}(\mathsf{s}(y)) \stackrel{?}{=} \mathsf{s}(u)\}$$

eliminate

Exercise

$$\{\mathsf{div}(x, \mathsf{s}(y)) \stackrel{?}{=} \mathsf{div}(z, x) \,,\, \mathsf{div}(y, \mathsf{s}(z)) \stackrel{?}{=} \mathsf{div}(u, \mathsf{s}(u))\}$$

decompose decompose

$$\{x \stackrel{?}{=} z \,,\, \mathsf{s}(y) \stackrel{?}{=} x \,,\, y \stackrel{?}{=} u \,,\, \mathsf{s}(z) \stackrel{?}{=} \mathsf{s}(u)\}$$

eliminate

$$\{x \stackrel{?}{=} z \,,\, \mathsf{s}(y) \stackrel{?}{=} z \,,\, y \stackrel{?}{=} u \,,\, \mathsf{s}(z) \stackrel{?}{=} \mathsf{s}(u)\}$$

swap

$$\{x \stackrel{?}{=} z \,,\, z \stackrel{?}{=} \mathsf{s}(y) \,,\, y \stackrel{?}{=} u \,,\, \mathsf{s}(z) \stackrel{?}{=} \mathsf{s}(u)\}$$

eliminate

$$\{x \stackrel{?}{=} \mathsf{s}(y) \,,\, z \stackrel{?}{=} \mathsf{s}(y) \,,\, y \stackrel{?}{=} u \,,\, \mathsf{s}(\mathsf{s}(y)) \stackrel{?}{=} \mathsf{s}(u)\}$$

eliminate

$$\{x \stackrel{?}{=} \mathsf{s}(u) \,,\, z \stackrel{?}{=} \mathsf{s}(u) \,,\, y \stackrel{?}{=} u \,,\, \mathsf{s}(\mathsf{s}(u)) \stackrel{?}{=} \mathsf{s}(u)\}$$

Exercise

$$\{\mathsf{div}(x, \mathsf{s}(y)) \stackrel{?}{=} \mathsf{div}(z, x)\ ,\ \mathsf{div}(y, \mathsf{s}(z)) \stackrel{?}{=} \mathsf{div}(u, \mathsf{s}(u))\}$$

decompose decompose

$$\{x \stackrel{?}{=} z\ ,\ \mathsf{s}(y) \stackrel{?}{=} x\ ,\ y \stackrel{?}{=} u\ ,\ \mathsf{s}(z) \stackrel{?}{=} \mathsf{s}(u)\}$$

eliminate

$$\{x \stackrel{?}{=} z\ ,\ \mathsf{s}(y) \stackrel{?}{=} z\ ,\ y \stackrel{?}{=} u\ ,\ \mathsf{s}(z) \stackrel{?}{=} \mathsf{s}(u)\}$$

swap

$$\{x \stackrel{?}{=} z\ ,\ z \stackrel{?}{=} \mathsf{s}(y)\ ,\ y \stackrel{?}{=} u\ ,\ \mathsf{s}(z) \stackrel{?}{=} \mathsf{s}(u)\}$$

eliminate

$$\{x \stackrel{?}{=} \mathsf{s}(y)\ ,\ z \stackrel{?}{=} \mathsf{s}(y)\ ,\ y \stackrel{?}{=} u\ ,\ \mathsf{s}(\mathsf{s}(y)) \stackrel{?}{=} \mathsf{s}(u)\}$$

eliminate

$$\{x \stackrel{?}{=} \mathsf{s}(u)\ ,\ z \stackrel{?}{=} \mathsf{s}(u)\ ,\ y \stackrel{?}{=} u\ ,\ \mathsf{s}(\mathsf{s}(u)) \stackrel{?}{=} \mathsf{s}(u)\}$$

decompose

Exercise

$$\{\mathsf{div}(x, \mathsf{s}(y)) \stackrel{?}{=} \mathsf{div}(z, x)\ ,\ \mathsf{div}(y, \mathsf{s}(z)) \stackrel{?}{=} \mathsf{div}(u, \mathsf{s}(u))\}$$

decompose decompose

$$\{x \stackrel{?}{=} z\ ,\ \mathsf{s}(y) \stackrel{?}{=} x\ ,\ y \stackrel{?}{=} u\ ,\ \mathsf{s}(z) \stackrel{?}{=} \mathsf{s}(u)\}$$

eliminate

$$\{x \stackrel{?}{=} z\ ,\ \mathsf{s}(y) \stackrel{?}{=} z\ ,\ y \stackrel{?}{=} u\ ,\ \mathsf{s}(z) \stackrel{?}{=} \mathsf{s}(u)\}$$

swap

$$\{x \stackrel{?}{=} z\ ,\ z \stackrel{?}{=} \mathsf{s}(y)\ ,\ y \stackrel{?}{=} u\ ,\ \mathsf{s}(z) \stackrel{?}{=} \mathsf{s}(u)\}$$

eliminate

$$\{x \stackrel{?}{=} \mathsf{s}(y)\ ,\ z \stackrel{?}{=} \mathsf{s}(y)\ ,\ y \stackrel{?}{=} u\ ,\ \mathsf{s}(\mathsf{s}(y)) \stackrel{?}{=} \mathsf{s}(u)\}$$

eliminate

$$\{x \stackrel{?}{=} \mathsf{s}(u)\ ,\ z \stackrel{?}{=} \mathsf{s}(u)\ ,\ y \stackrel{?}{=} u\ ,\ \mathsf{s}(\mathsf{s}(u)) \stackrel{?}{=} \mathsf{s}(u)\}$$

decompose

$$\{x \stackrel{?}{=} \mathsf{s}(u)\ ,\ z \stackrel{?}{=} \mathsf{s}(u)\ ,\ y \stackrel{?}{=} u\ ,\ \mathsf{s}(u) \stackrel{?}{=} u\}$$

Exercise

$$\{\mathsf{div}(x, \mathsf{s}(y)) \stackrel{?}{=} \mathsf{div}(z, x),\ \mathsf{div}(y, \mathsf{s}(z)) \stackrel{?}{=} \mathsf{div}(u, \mathsf{s}(u))\}$$

decompose decompose

$$\{x \stackrel{?}{=} z,\ \mathsf{s}(y) \stackrel{?}{=} x,\ y \stackrel{?}{=} u,\ \mathsf{s}(z) \stackrel{?}{=} \mathsf{s}(u)\}$$

eliminate

$$\{x \stackrel{?}{=} z,\ \mathsf{s}(y) \stackrel{?}{=} z,\ y \stackrel{?}{=} u,\ \mathsf{s}(z) \stackrel{?}{=} \mathsf{s}(u)\}$$

swap

$$\{x \stackrel{?}{=} z,\ z \stackrel{?}{=} \mathsf{s}(y),\ y \stackrel{?}{=} u,\ \mathsf{s}(z) \stackrel{?}{=} \mathsf{s}(u)\}$$

eliminate

$$\{x \stackrel{?}{=} \mathsf{s}(y),\ z \stackrel{?}{=} \mathsf{s}(y),\ y \stackrel{?}{=} u,\ \mathsf{s}(\mathsf{s}(y)) \stackrel{?}{=} \mathsf{s}(u)\}$$

eliminate

$$\{x \stackrel{?}{=} \mathsf{s}(u),\ z \stackrel{?}{=} \mathsf{s}(u),\ y \stackrel{?}{=} u,\ \mathsf{s}(\mathsf{s}(u)) \stackrel{?}{=} \mathsf{s}(u)\}$$

decompose

$$\{x \stackrel{?}{=} \mathsf{s}(u),\ z \stackrel{?}{=} \mathsf{s}(u),\ y \stackrel{?}{=} u,\ \mathsf{s}(u) \stackrel{?}{=} u\}$$

swap

Exercise

$$\{\mathsf{div}(x, \mathsf{s}(y)) \stackrel{?}{=} \mathsf{div}(z, x)\,,\ \mathsf{div}(y, \mathsf{s}(z)) \stackrel{?}{=} \mathsf{div}(u, \mathsf{s}(u))\}$$

decompose decompose

$$\{x \stackrel{?}{=} z\,,\ \mathsf{s}(y) \stackrel{?}{=} x\,,\ y \stackrel{?}{=} u\,,\ \mathsf{s}(z) \stackrel{?}{=} \mathsf{s}(u)\}$$

eliminate

$$\{x \stackrel{?}{=} z\,,\ \mathsf{s}(y) \stackrel{?}{=} z\,,\ y \stackrel{?}{=} u\,,\ \mathsf{s}(z) \stackrel{?}{=} \mathsf{s}(u)\}$$

swap

$$\{x \stackrel{?}{=} z\,,\ z \stackrel{?}{=} \mathsf{s}(y)\,,\ y \stackrel{?}{=} u\,,\ \mathsf{s}(z) \stackrel{?}{=} \mathsf{s}(u)\}$$

eliminate

$$\{x \stackrel{?}{=} \mathsf{s}(y)\,,\ z \stackrel{?}{=} \mathsf{s}(y)\,,\ y \stackrel{?}{=} u\,,\ \mathsf{s}(\mathsf{s}(y)) \stackrel{?}{=} \mathsf{s}(u)\}$$

eliminate

$$\{x \stackrel{?}{=} \mathsf{s}(u)\,,\ z \stackrel{?}{=} \mathsf{s}(u)\,,\ y \stackrel{?}{=} u\,,\ \mathsf{s}(\mathsf{s}(u)) \stackrel{?}{=} \mathsf{s}(u)\}$$

decompose

$$\{x \stackrel{?}{=} \mathsf{s}(u)\,,\ z \stackrel{?}{=} \mathsf{s}(u)\,,\ y \stackrel{?}{=} u\,,\ \mathsf{s}(u) \stackrel{?}{=} u\}$$

swap

$$\{x \stackrel{?}{=} \mathsf{s}(u)\,,\ z \stackrel{?}{=} \mathsf{s}(u)\,,\ y \stackrel{?}{=} u\,,\ u \stackrel{?}{=} \mathsf{s}(u)\}$$

Exercise

$$\{\mathsf{div}(x, \mathsf{s}(y)) \overset{?}{=} \mathsf{div}(z, x)\,,\ \mathsf{div}(y, \mathsf{s}(z)) \overset{?}{=} \mathsf{div}(u, \mathsf{s}(u))\}$$

decompose decompose

$$\{x \overset{?}{=} z\,,\ \mathsf{s}(y) \overset{?}{=} x\,,\ y \overset{?}{=} u\,,\ \mathsf{s}(z) \overset{?}{=} \mathsf{s}(u)\}$$

eliminate

$$\{x \overset{?}{=} z\,,\ \mathsf{s}(y) \overset{?}{=} z\,,\ y \overset{?}{=} u\,,\ \mathsf{s}(z) \overset{?}{=} \mathsf{s}(u)\}$$

swap

$$\{x \overset{?}{=} z\,,\ z \overset{?}{=} \mathsf{s}(y)\,,\ y \overset{?}{=} u\,,\ \mathsf{s}(z) \overset{?}{=} \mathsf{s}(u)\}$$

eliminate

$$\{x \overset{?}{=} \mathsf{s}(y)\,,\ z \overset{?}{=} \mathsf{s}(y)\,,\ y \overset{?}{=} u\,,\ \mathsf{s}(\mathsf{s}(y)) \overset{?}{=} \mathsf{s}(u)\}$$

eliminate

$$\{x \overset{?}{=} \mathsf{s}(u)\,,\ z \overset{?}{=} \mathsf{s}(u)\,,\ y \overset{?}{=} u\,,\ \mathsf{s}(\mathsf{s}(u)) \overset{?}{=} \mathsf{s}(u)\}$$

decompose

$$\{x \overset{?}{=} \mathsf{s}(u)\,,\ z \overset{?}{=} \mathsf{s}(u)\,,\ y \overset{?}{=} u\,,\ \mathsf{s}(u) \overset{?}{=} u\}$$

swap

$$\{x \overset{?}{=} \mathsf{s}(u)\,,\ z \overset{?}{=} \mathsf{s}(u)\,,\ y \overset{?}{=} u\,,\ u \overset{?}{=} \mathsf{s}(u)\}$$

occur-check

Exercise

$$\{\mathsf{div}(x, \mathsf{s}(y)) \stackrel{?}{=} \mathsf{div}(z, x)\ ,\ \mathsf{div}(y, \mathsf{s}(z)) \stackrel{?}{=} \mathsf{div}(u, \mathsf{s}(u))\}$$

decompose decompose

$$\{x \stackrel{?}{=} z\ ,\ \mathsf{s}(y) \stackrel{?}{=} x\ ,\ y \stackrel{?}{=} u\ ,\ \mathsf{s}(z) \stackrel{?}{=} \mathsf{s}(u)\}$$

eliminate

$$\{x \stackrel{?}{=} z\ ,\ \mathsf{s}(y) \stackrel{?}{=} z\ ,\ y \stackrel{?}{=} u\ ,\ \mathsf{s}(z) \stackrel{?}{=} \mathsf{s}(u)\}$$

swap

$$\{x \stackrel{?}{=} z\ ,\ z \stackrel{?}{=} \mathsf{s}(y)\ ,\ y \stackrel{?}{=} u\ ,\ \mathsf{s}(z) \stackrel{?}{=} \mathsf{s}(u)\}$$

eliminate

$$\{x \stackrel{?}{=} \mathsf{s}(y)\ ,\ z \stackrel{?}{=} \mathsf{s}(y)\ ,\ y \stackrel{?}{=} u\ ,\ \mathsf{s}(\mathsf{s}(y)) \stackrel{?}{=} \mathsf{s}(u)\}$$

eliminate

$$\{x \stackrel{?}{=} \mathsf{s}(u)\ ,\ z \stackrel{?}{=} \mathsf{s}(u)\ ,\ y \stackrel{?}{=} u\ ,\ \mathsf{s}(\mathsf{s}(u)) \stackrel{?}{=} \mathsf{s}(u)\}$$

decompose

$$\{x \stackrel{?}{=} \mathsf{s}(u)\ ,\ z \stackrel{?}{=} \mathsf{s}(u)\ ,\ y \stackrel{?}{=} u\ ,\ \mathsf{s}(u) \stackrel{?}{=} u\}$$

swap

$$\{x \stackrel{?}{=} \mathsf{s}(u)\ ,\ z \stackrel{?}{=} \mathsf{s}(u)\ ,\ y \stackrel{?}{=} u\ ,\ u \stackrel{?}{=} \mathsf{s}(u)\}$$

occur-check

Inference rules

Inference rules

premises (one, none, many)

$$\frac{p_1 \quad \cdots \quad p_n}{q}$$

conclusion (one)

if the premises are valid,
then the conclusion is also valid

$p_1, \cdots, p_n, q$ are formulas

any variable they contain is universally quantified (implicitly)

a rule instance is obtained by applying some ρ to $p_1, \ldots, p_n, q$

Axioms

no premises

$$\frac{}{q}$$

the conclusion is valid

conclusion (always valid, it is a fact)

Rule instances

$$(prod)\,\frac{\mathsf{E}_0 \longrightarrow n_0 \quad \mathsf{E}_1 \longrightarrow n_1}{\mathsf{E}_0 \otimes \mathsf{E}_1 \longrightarrow n}\ n = n_0 \cdot n_1$$

$$\rho \triangleq [\mathsf{E}_0 = 1, \mathsf{E}_1 = 1 \oplus 2, n_0 = 1, n_1 = 3, n = 3]$$

an instance of (*prod*)

$$(prod)\,\frac{1 \longrightarrow 1 \quad 1 \oplus 2 \longrightarrow 3}{1 \otimes (1 \oplus 2) \longrightarrow 3}\ 3 = 1 \cdot 3$$

Rule instances

$$(prod)\,\frac{\mathsf{E}_0 \longrightarrow n_0 \quad \mathsf{E}_1 \longrightarrow n_1}{\mathsf{E}_0 \otimes \mathsf{E}_1 \longrightarrow n}\; n = n_0 \cdot n_1$$

$\rho \triangleq [\mathsf{E}_0 = 1, \mathsf{E}_1 = 1 \oplus 2, n_0 = 1, n_1 = 3, n = 3]$

an instance of (*prod*)

$$(prod)\,\frac{1 \longrightarrow 1 \quad 1 \oplus 2 \longrightarrow 3}{1 \otimes (1 \oplus 2) \longrightarrow 3}\; 3 = 1 \cdot 3$$

$\rho \triangleq [\mathsf{E}_0 = 1, \mathsf{E}_1 = 1 \oplus 2, n_0 = 3, n_1 = 5, n = 15]$

this is also an instance of (*prod*)!

$$(prod)\,\frac{1 \longrightarrow 3 \quad 1 \oplus 2 \longrightarrow 5}{1 \otimes (1 \oplus 2) \longrightarrow 15}\; 15 = 3 \cdot 5$$

Rule instances

$$(prod)\,\frac{\mathsf{E}_0 \longrightarrow n_0 \quad \mathsf{E}_1 \longrightarrow n_1}{\mathsf{E}_0 \otimes \mathsf{E}_1 \longrightarrow n}\; n = n_0 \cdot n_1$$

$\rho \triangleq [\mathsf{E}_0 = 1, \mathsf{E}_1 = 1 \oplus 2, n_0 = 1, n_1 = 3, n = 3]$

an instance of (*prod*)

$$(prod)\,\frac{1 \longrightarrow 1 \quad 1 \oplus 2 \longrightarrow 3}{1 \otimes (1 \oplus 2) \longrightarrow 3}\; 3 = 1 \cdot 3$$

$\rho \triangleq [\mathsf{E}_0 = 1, \mathsf{E}_1 = 1 \oplus 2, n_0 = 3, n_1 = 5, n = 15]$

this is also an instance of (*prod*)!

$$(prod)\,\frac{1 \longrightarrow 3 \quad 1 \oplus 2 \longrightarrow 5}{1 \otimes (1 \oplus 2) \longrightarrow 15}\; 15 = 3 \cdot 5$$

but it is unlikely that such premises will be valid

More instances

$$(prod)\,\frac{\mathsf{E}_0 \longrightarrow n_0 \qquad \mathsf{E}_1 \longrightarrow n_1}{\mathsf{E}_0 \otimes \mathsf{E}_1 \longrightarrow n}\; n = n_0 \cdot n_1$$

$\rho \triangleq$

an instance of (*prod*)

$$(prod)\,\frac{\mathsf{E} \otimes 2 \longrightarrow k \qquad \mathsf{E} \oplus 1 \longrightarrow 3}{(\mathsf{E} \otimes 2) \otimes (\mathsf{E} \oplus 1) \longrightarrow 3k}$$

variables can be shared

More instances

$$(prod)\,\frac{\mathsf{E}_0 \longrightarrow n_0 \quad \mathsf{E}_1 \longrightarrow n_1}{\mathsf{E}_0 \otimes \mathsf{E}_1 \longrightarrow n}\; n = n_0 \cdot n_1$$

$$\rho \triangleq [\mathsf{E}_0 = \mathsf{E} \otimes 2, \mathsf{E}_1 = \mathsf{E} \oplus 1, n_0 = k, n_1 = 3, n = 3k]$$

an instance of (*prod*)

$$(prod)\,\frac{\mathsf{E} \otimes 2 \longrightarrow k \quad \mathsf{E} \oplus 1 \longrightarrow 3}{(\mathsf{E} \otimes 2) \otimes (\mathsf{E} \oplus 1) \longrightarrow 3k}$$

variables can be shared

Logical System

$$R = \left\{ \frac{}{r}, \frac{p_1 \quad \cdots \quad p_n}{q}, \ldots \right\}$$

A logical system is just a set of axioms and inference rules

if an inference rule contains some variables,
we assume all its instances are in *R*

Derivation

Given a logical system *R*, a derivation in *R*, is written

$d \Vdash_R q$ $\quad d$ derives q (in R)

where

- either $d = (\frac{}{q}) \in R$ is an axiom of R;
- or $d = \left(\frac{d_1, \ldots, d_n}{q}\right)$ for some derivations $d_1 \Vdash_R p_1, \ldots, d_n \Vdash_R p_n$ such that $(\frac{p_1, \ldots, p_n}{q}) \in R$ is an inference rule of R.

a derivation is a proof tree (whose leaves are axioms)

Example

$$R = \left\{ \frac{}{\mathsf{N} \longrightarrow n}, \frac{\mathsf{E}_0 \longrightarrow n_0 \quad \mathsf{E}_1 \longrightarrow n_1}{\mathsf{E}_0 \oplus \mathsf{E}_1 \longrightarrow n_0 + n_1}, \frac{\mathsf{E}_0 \longrightarrow n_0 \quad \mathsf{E}_1 \longrightarrow n_1}{\mathsf{E}_0 \otimes \mathsf{E}_1 \longrightarrow n_0 \cdot n_1} \right\}$$

$$d = \cfrac{\cfrac{\cfrac{}{\mathsf{1} \longrightarrow 1} \quad \cfrac{}{\mathsf{2} \longrightarrow 2}}{(\mathsf{1} \oplus \mathsf{2}) \longrightarrow 3} \quad \cfrac{\cfrac{}{\mathsf{3} \longrightarrow 3} \quad \cfrac{}{\mathsf{4} \longrightarrow 4}}{(\mathsf{3} \oplus \mathsf{4}) \longrightarrow 7}}{(\mathsf{1} \oplus \mathsf{2}) \otimes (\mathsf{3} \oplus \mathsf{4}) \longrightarrow 21}$$

$$d \Vdash_R (\mathsf{1} \oplus \mathsf{2}) \otimes (\mathsf{3} \oplus \mathsf{4}) \longrightarrow 21$$

Example

$$\mathsf{S} ::= \epsilon \mid (\mathsf{S}) \mid \mathsf{S}\ \mathsf{S} \qquad\qquad s \in \mathcal{L}$$

Example

$$\mathsf{S} ::= \epsilon \mid (\mathsf{S}) \mid \mathsf{S}\ \mathsf{S} \qquad\qquad {\color{blue}s} \in \mathcal{L}$$

$$R = \left\{ \frac{}{\epsilon \in \mathcal{L}}, \frac{\mathsf{S} \in \mathcal{L}}{(\mathsf{S}) \in \mathcal{L}}, \frac{\mathsf{S}_0 \in \mathcal{L} \quad \mathsf{S}_1 \in \mathcal{L}}{\mathsf{S}_0\ \mathsf{S}_1 \in \mathcal{L}} \right\}$$

Example

$$\mathsf{S} ::= \epsilon \mid (\ \mathsf{S}\ ) \mid \mathsf{S}\ \mathsf{S} \qquad\qquad {\color{blue}s} \in \mathcal{L}$$

$$R = \left\{ \frac{}{\epsilon \in \mathcal{L}}, \frac{\mathsf{S} \in \mathcal{L}}{(\ \mathsf{S}\ ) \in \mathcal{L}}, \frac{\mathsf{S}_0 \in \mathcal{L} \quad \mathsf{S}_1 \in \mathcal{L}}{\mathsf{S}_0\ \mathsf{S}_1 \in \mathcal{L}} \right\}$$

$$(()(())) \in \mathcal{L}$$

Example

$$\mathsf{S} ::= \epsilon \mid (\mathsf{S}) \mid \mathsf{S}\ \mathsf{S} \qquad\qquad {\color{blue}s} \in \mathcal{L}$$

$$R = \left\{ \frac{}{\epsilon \in \mathcal{L}}, \frac{\mathsf{S} \in \mathcal{L}}{(\mathsf{S}) \in \mathcal{L}}, \frac{\mathsf{S}_0 \in \mathcal{L} \quad \mathsf{S}_1 \in \mathcal{L}}{\mathsf{S}_0\ \mathsf{S}_1 \in \mathcal{L}} \right\}$$

$$\frac{}{(()(())) \in \mathcal{L}}$$

Example

$$\mathsf{S} ::= \epsilon \mid (\ \mathsf{S}\ ) \mid \mathsf{S}\ \mathsf{S} \qquad\qquad {\color{blue}s} \in \mathcal{L}$$

$$R = \left\{ \frac{}{\epsilon \in \mathcal{L}}, \frac{\mathsf{S} \in \mathcal{L}}{(\ \mathsf{S}\ ) \in \mathcal{L}}, \frac{\mathsf{S}_0 \in \mathcal{L} \quad \mathsf{S}_1 \in \mathcal{L}}{\mathsf{S}_0\ \mathsf{S}_1 \in \mathcal{L}} \right\}$$

$$\frac{()(()) \in \mathcal{L}}{(()(())) \in \mathcal{L}}$$

Example

$$\mathsf{S} ::= \epsilon \mid (\mathsf{S}) \mid \mathsf{S}\ \mathsf{S} \qquad\qquad s \in \mathcal{L}$$

$$R = \left\{ \frac{}{\epsilon \in \mathcal{L}}, \frac{\mathsf{S} \in \mathcal{L}}{(\mathsf{S}) \in \mathcal{L}}, \frac{\mathsf{S}_0 \in \mathcal{L} \quad \mathsf{S}_1 \in \mathcal{L}}{\mathsf{S}_0\ \mathsf{S}_1 \in \mathcal{L}} \right\}$$

$$\cfrac{\cfrac{}{()(()) \in \mathcal{L}}}{(()(())) \in \mathcal{L}}$$

Example

$$\mathsf{S} \ ::= \ \epsilon \ \mid \ (\ \mathsf{S}\ ) \ \mid \ \mathsf{S}\ \mathsf{S} \qquad\qquad {\color{blue}s} \in \mathcal{L}$$

$$R = \left\{ \frac{}{\epsilon \in \mathcal{L}}, \frac{\mathsf{S} \in \mathcal{L}}{(\ \mathsf{S}\ ) \in \mathcal{L}}, \frac{\mathsf{S}_0 \in \mathcal{L} \quad \mathsf{S}_1 \in \mathcal{L}}{\mathsf{S}_0\ \mathsf{S}_1 \in \mathcal{L}} \right\}$$

$$\cfrac{\cfrac{() \in \mathcal{L} \qquad\qquad (()) \in \mathcal{L}}{()(()) \in \mathcal{L}}}{(()(())) \in \mathcal{L}}$$

Example

$$\mathsf{S} ::= \epsilon \mid (\mathsf{S}) \mid \mathsf{S}\ \mathsf{S}$$

$\color{blue}{s} \in \mathcal{L}$

$$R = \left\{ \frac{}{\epsilon \in \mathcal{L}}, \frac{\mathsf{S} \in \mathcal{L}}{(\mathsf{S}) \in \mathcal{L}}, \frac{\mathsf{S}_0 \in \mathcal{L} \quad \mathsf{S}_1 \in \mathcal{L}}{\mathsf{S}_0\ \mathsf{S}_1 \in \mathcal{L}} \right\}$$

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{}{() \in \mathcal{L}} \qquad (()) \in \mathcal{L}}{()(()) \in \mathcal{L}}}{(()(())) \in \mathcal{L}}$$

Example

$$\mathsf{S} ::= \epsilon \mid (\mathsf{S}) \mid \mathsf{S}\ \mathsf{S}$$

$\color{blue}{s} \in \mathcal{L}$

$$R = \left\{ \frac{}{\epsilon \in \mathcal{L}}, \frac{\mathsf{S} \in \mathcal{L}}{(\mathsf{S}) \in \mathcal{L}}, \frac{\mathsf{S}_0 \in \mathcal{L} \quad \mathsf{S}_1 \in \mathcal{L}}{\mathsf{S}_0\ \mathsf{S}_1 \in \mathcal{L}} \right\}$$

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\epsilon \in \mathcal{L}}{() \in \mathcal{L}} \qquad (()) \in \mathcal{L}}{()(()) \in \mathcal{L}}}{(()(())) \in \mathcal{L}}$$

Example

$$\mathsf{S} \ ::= \ \epsilon \ | \ (\ \mathsf{S}\ ) \ | \ \mathsf{S}\ \mathsf{S} \qquad\qquad {\color{blue}s} \in \mathcal{L}$$

$$R = \left\{ \frac{}{\epsilon \in \mathcal{L}}, \frac{\mathsf{S} \in \mathcal{L}}{(\ \mathsf{S}\ ) \in \mathcal{L}}, \frac{\mathsf{S}_0 \in \mathcal{L} \quad \mathsf{S}_1 \in \mathcal{L}}{\mathsf{S}_0\ \mathsf{S}_1 \in \mathcal{L}} \right\}$$

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{}{\epsilon \in \mathcal{L}}}{() \in \mathcal{L}} \qquad (()) \in \mathcal{L}}{\dfrac{()(()) \in \mathcal{L}}{(()(())) \in \mathcal{L}}}$$

Example

$$\mathsf{S} ::= \epsilon \mid (\ \mathsf{S}\ ) \mid \mathsf{S}\ \mathsf{S} \qquad\qquad {\color{blue}s} \in \mathcal{L}$$

$$R = \left\{ \frac{}{\epsilon \in \mathcal{L}},\ \frac{\mathsf{S} \in \mathcal{L}}{(\ \mathsf{S}\ ) \in \mathcal{L}},\ \frac{\mathsf{S}_0 \in \mathcal{L} \quad \mathsf{S}_1 \in \mathcal{L}}{\mathsf{S}_0\ \mathsf{S}_1 \in \mathcal{L}} \right\}$$

$$\cfrac{\cfrac{\cfrac{\cfrac{}{\epsilon \in \mathcal{L}}}{() \in \mathcal{L}} \qquad \cfrac{}{(()) \in \mathcal{L}}}{()(()) \in \mathcal{L}}}{(()(())) \in \mathcal{L}}$$

Example

$$\mathsf{S} ::= \epsilon \mid (\ \mathsf{S}\ ) \mid \mathsf{S}\ \mathsf{S} \qquad\qquad {\color{blue}s} \in \mathcal{L}$$

$$R = \left\{ \frac{}{\epsilon \in \mathcal{L}}, \frac{\mathsf{S} \in \mathcal{L}}{(\ \mathsf{S}\ ) \in \mathcal{L}}, \frac{\mathsf{S}_0 \in \mathcal{L} \quad \mathsf{S}_1 \in \mathcal{L}}{\mathsf{S}_0\ \mathsf{S}_1 \in \mathcal{L}} \right\}$$

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{}{\epsilon \in \mathcal{L}}}{() \in \mathcal{L}} \qquad \dfrac{() \in \mathcal{L}}{(()) \in \mathcal{L}}}{()(()) \in \mathcal{L}}}{(()(())) \in \mathcal{L}}$$

Example

$$\mathsf{S} ::= \epsilon \mid (\ \mathsf{S}\ ) \mid \mathsf{S}\ \mathsf{S} \qquad\qquad s \in \mathcal{L}$$

$$R = \left\{ \frac{}{\epsilon \in \mathcal{L}}, \frac{\mathsf{S} \in \mathcal{L}}{(\ \mathsf{S}\ ) \in \mathcal{L}}, \frac{\mathsf{S}_0 \in \mathcal{L} \quad \mathsf{S}_1 \in \mathcal{L}}{\mathsf{S}_0\ \mathsf{S}_1 \in \mathcal{L}} \right\}$$

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{}{\epsilon \in \mathcal{L}}}{() \in \mathcal{L}} \qquad \dfrac{\dfrac{}{() \in \mathcal{L}}}{(()) \in \mathcal{L}}}{()(()) \in \mathcal{L}}}{(()(())) \in \mathcal{L}}$$

Example

$$\mathsf{S} \ ::= \ \epsilon \ \mid \ (\ \mathsf{S}\ ) \ \mid \ \mathsf{S}\ \mathsf{S} \qquad\qquad {\color{blue}s} \in \mathcal{L}$$

$$R = \left\{ \frac{}{\epsilon \in \mathcal{L}}, \frac{\mathsf{S} \in \mathcal{L}}{(\ \mathsf{S}\ ) \in \mathcal{L}}, \frac{\mathsf{S}_0 \in \mathcal{L} \quad \mathsf{S}_1 \in \mathcal{L}}{\mathsf{S}_0\ \mathsf{S}_1 \in \mathcal{L}} \right\}$$

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{}{\epsilon \in \mathcal{L}}}{() \in \mathcal{L}} \qquad \dfrac{\dfrac{\epsilon \in \mathcal{L}}{() \in \mathcal{L}}}{(()) \in \mathcal{L}}}{\dfrac{()(()) \in \mathcal{L}}{(()(())) \in \mathcal{L}}}$$

Example

$$\mathsf{S} ::= \epsilon \mid (\ \mathsf{S}\ ) \mid \mathsf{S}\ \mathsf{S} \qquad\qquad {\color{blue}s} \in \mathcal{L}$$

$$R = \left\{ \frac{}{\epsilon \in \mathcal{L}}, \frac{\mathsf{S} \in \mathcal{L}}{(\ \mathsf{S}\ ) \in \mathcal{L}}, \frac{\mathsf{S}_0 \in \mathcal{L} \quad \mathsf{S}_1 \in \mathcal{L}}{\mathsf{S}_0\ \mathsf{S}_1 \in \mathcal{L}} \right\}$$

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{}{\epsilon \in \mathcal{L}}}{() \in \mathcal{L}} \qquad \dfrac{\dfrac{\dfrac{}{\epsilon \in \mathcal{L}}}{() \in \mathcal{L}}}{(()) \in \mathcal{L}}}{()(()) \in \mathcal{L}}}{(()(())) \in \mathcal{L}}$$

Example

$$\mathsf{S} ::= \epsilon \mid (\ \mathsf{S}\ ) \mid \mathsf{S}\ \mathsf{S} \qquad \textcolor{blue}{s} \in \mathcal{L}$$

$$R = \left\{ \frac{}{\epsilon \in \mathcal{L}}, \frac{\mathsf{S} \in \mathcal{L}}{(\ \mathsf{S}\ ) \in \mathcal{L}}, \frac{\mathsf{S}_0 \in \mathcal{L} \quad \mathsf{S}_1 \in \mathcal{L}}{\mathsf{S}_0\ \mathsf{S}_1 \in \mathcal{L}} \right\}$$

$$d = \cfrac{\cfrac{\cfrac{}{\epsilon \in \mathcal{L}}}{() \in \mathcal{L}} \qquad \cfrac{\cfrac{\cfrac{}{\epsilon \in \mathcal{L}}}{() \in \mathcal{L}}}{(()) \in \mathcal{L}}}{\cfrac{()(()) \in \mathcal{L}}{(()(())) \in \mathcal{L}}}$$

Example

$$\mathsf{S} ::= \epsilon \mid (\ \mathsf{S}\ ) \mid \mathsf{S}\ \mathsf{S} \qquad\qquad \textcolor{blue}{s} \in \mathcal{L}$$

$$R = \left\{ \frac{}{\epsilon \in \mathcal{L}}, \frac{\mathsf{S} \in \mathcal{L}}{(\ \mathsf{S}\ ) \in \mathcal{L}}, \frac{\mathsf{S}_0 \in \mathcal{L} \quad \mathsf{S}_1 \in \mathcal{L}}{\mathsf{S}_0\ \mathsf{S}_1 \in \mathcal{L}} \right\}$$

$$d = \cfrac{\cfrac{\cfrac{}{\epsilon \in \mathcal{L}}}{() \in \mathcal{L}} \qquad \cfrac{\cfrac{\cfrac{}{\epsilon \in \mathcal{L}}}{() \in \mathcal{L}}}{(()) \in \mathcal{L}}}{\cfrac{()(()) \in \mathcal{L}}{(()(())) \in \mathcal{L}}}$$

$$d \Vdash_R (()(())) \in \mathcal{L}$$

Theorems

Given a logical system *R*, a theorem of *R* is written

$$\Vdash_R q \qquad\qquad \exists d.\ d \Vdash_R q$$

where *q* is a formula such that
we can find a derivation for *q* in *R*

Theorems

Given a logical system *R*, a theorem of *R* is written

$\Vdash_R q$ $\qquad \exists d.\ d \Vdash_R q$

where *q* is a formula such that we can find a derivation for *q* in *R*

The set of all theorems of R is denoted by I_R

Theorems

Given a logical system *R*, a theorem of *R* is written

$$\Vdash_R q \qquad\qquad \exists d.\ d \Vdash_R q$$

where *q* is a formula such that we can find a derivation for *q* in *R*

The set of all theorems of R is denoted by I_R

$$I_R \triangleq \{\, q \mid \Vdash_R q \,\}$$

Inline notation

$$d = \cfrac{\cfrac{\overline{1 \longrightarrow 1} \quad \overline{2 \longrightarrow 2}}{(1 \oplus 2) \longrightarrow 3} \qquad \cfrac{\overline{3 \longrightarrow 3} \quad \overline{4 \longrightarrow 4}}{(3 \oplus 4) \longrightarrow 7}}{(1 \oplus 2) \otimes (3 \oplus 4) \longrightarrow 21}$$

$(1 \oplus 2) \otimes (3 \oplus 4) \longrightarrow 21$

goal oriented derivation

Inline notation

$$d = \cfrac{\cfrac{\overline{1 \longrightarrow 1} \quad \overline{2 \longrightarrow 2}}{(1 \oplus 2) \longrightarrow 3} \qquad \cfrac{\overline{3 \longrightarrow 3} \quad \overline{4 \longrightarrow 4}}{(3 \oplus 4) \longrightarrow 7}}{(1 \oplus 2) \otimes (3 \oplus 4) \longrightarrow 21}$$

$$(1 \oplus 2) \otimes (3 \oplus 4) \longrightarrow 21$$

$$\nwarrow \quad (1 \oplus 2) \longrightarrow 3 \,,\; (3 \oplus 4) \longrightarrow 7$$

goal oriented derivation

Inline notation

$$d = \dfrac{\dfrac{\overline{1 \longrightarrow {\color{blue}1}} \quad \overline{2 \longrightarrow {\color{blue}2}}}{(1 \oplus 2) \longrightarrow {\color{blue}3}} \qquad \dfrac{\overline{3 \longrightarrow {\color{blue}3}} \quad \overline{4 \longrightarrow {\color{blue}4}}}{(3 \oplus 4) \longrightarrow {\color{blue}7}}}{(1 \oplus 2) \otimes (3 \oplus 4) \longrightarrow {\color{blue}21}}$$

$$(1 \oplus 2) \otimes (3 \oplus 4) \longrightarrow {\color{blue}21}$$

$$\nwarrow \quad (1 \oplus 2) \longrightarrow {\color{blue}3}\,, \;(3 \oplus 4) \longrightarrow {\color{blue}7}$$

$$\nwarrow \quad 1 \longrightarrow {\color{blue}1}\,, 2 \longrightarrow {\color{blue}2}\,, \;(3 \oplus 4) \longrightarrow {\color{blue}7}$$

goal oriented derivation

Inline notation

$$d = \cfrac{\cfrac{\overline{1 \longrightarrow {\color{blue}1}} \quad \overline{2 \longrightarrow {\color{blue}2}}}{(1 \oplus 2) \longrightarrow {\color{blue}3}} \qquad \cfrac{\overline{3 \longrightarrow {\color{blue}3}} \quad \overline{4 \longrightarrow {\color{blue}4}}}{(3 \oplus 4) \longrightarrow {\color{blue}7}}}{(1 \oplus 2) \otimes (3 \oplus 4) \longrightarrow {\color{blue}21}}$$

$$(1 \oplus 2) \otimes (3 \oplus 4) \longrightarrow {\color{blue}21}$$

$$\nwarrow \quad (1 \oplus 2) \longrightarrow {\color{blue}3}\,,\ (3 \oplus 4) \longrightarrow {\color{blue}7}$$

$$\nwarrow \quad 1 \longrightarrow {\color{blue}1}\,,\ 2 \longrightarrow {\color{blue}2}\,,\ (3 \oplus 4) \longrightarrow {\color{blue}7}$$

$$\nwarrow \quad 2 \longrightarrow {\color{blue}2}\,,\ (3 \oplus 4) \longrightarrow {\color{blue}7}$$

goal oriented derivation

Inline notation

$$d = \cfrac{\cfrac{\overline{1 \longrightarrow \color{blue}{1}} \quad \overline{2 \longrightarrow \color{blue}{2}}}{(1 \oplus 2) \longrightarrow \color{blue}{3}} \qquad \cfrac{\overline{3 \longrightarrow \color{blue}{3}} \quad \overline{4 \longrightarrow \color{blue}{4}}}{(3 \oplus 4) \longrightarrow \color{blue}{7}}}{(1 \oplus 2) \otimes (3 \oplus 4) \longrightarrow \color{blue}{21}}$$

$$(1 \oplus 2) \otimes (3 \oplus 4) \longrightarrow \color{blue}{21}$$
$$\nwarrow \quad (1 \oplus 2) \longrightarrow \color{blue}{3}\,, \ (3 \oplus 4) \longrightarrow \color{blue}{7}$$
$$\nwarrow \quad 1 \longrightarrow \color{blue}{1}\,, 2 \longrightarrow \color{blue}{2}\,, \ (3 \oplus 4) \longrightarrow \color{blue}{7}$$
$$\nwarrow \quad 2 \longrightarrow \color{blue}{2}\,, \ (3 \oplus 4) \longrightarrow \color{blue}{7}$$
$$\nwarrow \quad (3 \oplus 4) \longrightarrow \color{blue}{7}$$

goal oriented derivation

Inline notation

$$d = \dfrac{\dfrac{\overline{1 \longrightarrow 1} \quad \overline{2 \longrightarrow 2}}{(1 \oplus 2) \longrightarrow 3} \qquad \dfrac{\overline{3 \longrightarrow 3} \quad \overline{4 \longrightarrow 4}}{(3 \oplus 4) \longrightarrow 7}}{(1 \oplus 2) \otimes (3 \oplus 4) \longrightarrow 21}$$

$$(1 \oplus 2) \otimes (3 \oplus 4) \longrightarrow 21$$

$$\nwarrow \quad (1 \oplus 2) \longrightarrow 3 \,,\; (3 \oplus 4) \longrightarrow 7$$

$$\nwarrow \quad 1 \longrightarrow 1 \,,\; 2 \longrightarrow 2 \,,\; (3 \oplus 4) \longrightarrow 7$$

$$\nwarrow \quad 2 \longrightarrow 2 \,,\; (3 \oplus 4) \longrightarrow 7$$

$$\nwarrow \quad (3 \oplus 4) \longrightarrow 7$$

$$\nwarrow \quad 3 \longrightarrow 3 \,,\; 4 \longrightarrow 4$$

goal oriented derivation

Inline notation

$$d = \cfrac{\cfrac{\overline{1 \longrightarrow 1} \quad \overline{2 \longrightarrow 2}}{(1 \oplus 2) \longrightarrow 3} \qquad \cfrac{\overline{3 \longrightarrow 3} \quad \overline{4 \longrightarrow 4}}{(3 \oplus 4) \longrightarrow 7}}{(1 \oplus 2) \otimes (3 \oplus 4) \longrightarrow 21}$$

$(1 \oplus 2) \otimes (3 \oplus 4) \longrightarrow 21$

$\nwarrow \quad (1 \oplus 2) \longrightarrow 3 \,,\ (3 \oplus 4) \longrightarrow 7$

$\nwarrow \quad 1 \longrightarrow 1 \,, 2 \longrightarrow 2 \,,\ (3 \oplus 4) \longrightarrow 7$

$\nwarrow \quad 2 \longrightarrow 2 \,,\ (3 \oplus 4) \longrightarrow 7$

$\nwarrow \quad (3 \oplus 4) \longrightarrow 7$

$\nwarrow \quad 3 \longrightarrow 3 \,, 4 \longrightarrow 4 \qquad \nwarrow \quad 4 \longrightarrow 4$

goal oriented derivation

Inline notation

$$d = \dfrac{\dfrac{\dfrac{}{1 \longrightarrow 1} \quad \dfrac{}{2 \longrightarrow 2}}{(1 \oplus 2) \longrightarrow 3} \quad \dfrac{\dfrac{}{3 \longrightarrow 3} \quad \dfrac{}{4 \longrightarrow 4}}{(3 \oplus 4) \longrightarrow 7}}{(1 \oplus 2) \otimes (3 \oplus 4) \longrightarrow 21}$$

$$(1 \oplus 2) \otimes (3 \oplus 4) \longrightarrow 21$$

$$\nwarrow \quad (1 \oplus 2) \longrightarrow 3 \,,\; (3 \oplus 4) \longrightarrow 7$$

$$\nwarrow \quad 1 \longrightarrow 1 \,,\, 2 \longrightarrow 2 \,,\; (3 \oplus 4) \longrightarrow 7$$

$$\nwarrow \quad 2 \longrightarrow 2 \,,\; (3 \oplus 4) \longrightarrow 7$$

$$\nwarrow \quad (3 \oplus 4) \longrightarrow 7$$

$$\nwarrow \quad 3 \longrightarrow 3 \,,\, 4 \longrightarrow 4 \quad \nwarrow \quad 4 \longrightarrow 4 \quad \nwarrow \quad \square$$

goal oriented derivation

Inline notation

$$d = \cfrac{\cfrac{\overline{1 \longrightarrow 1} \quad \overline{2 \longrightarrow 2}}{(1 \oplus 2) \longrightarrow 3} \qquad \cfrac{\overline{3 \longrightarrow 3} \quad \overline{4 \longrightarrow 4}}{(3 \oplus 4) \longrightarrow 7}}{(1 \oplus 2) \otimes (3 \oplus 4) \longrightarrow 21}$$

$$(1 \oplus 2) \otimes (3 \oplus 4) \longrightarrow 21$$

$$\nwarrow \quad (1 \oplus 2) \longrightarrow 3\,,\ (3 \oplus 4) \longrightarrow 7$$

$$\nwarrow \quad 1 \longrightarrow 1\,, 2 \longrightarrow 2\,,\ (3 \oplus 4) \longrightarrow 7$$

$$\nwarrow \quad 2 \longrightarrow 2\,,\ (3 \oplus 4) \longrightarrow 7$$

$$\nwarrow \quad (3 \oplus 4) \longrightarrow 7$$

$$\nwarrow \quad 3 \longrightarrow 3\,, 4 \longrightarrow 4 \quad \nwarrow \quad 4 \longrightarrow 4 \quad \nwarrow \quad \square$$

goal oriented derivation

nothing left to prove

Backtracking

$(1 \oplus 2) \otimes (3 \oplus 4) \longrightarrow {\color{blue}21}$

goal oriented
derivation
(depth-first)

Backtracking

$$(1 \oplus 2) \otimes (3 \oplus 4) \longrightarrow {\color{blue}21}$$

$$\nwarrow \quad (1 \oplus 2) \longrightarrow {\color{red}7}\,,\ (3 \oplus 4) \longrightarrow {\color{red}3}$$

goal oriented derivation (depth-first)

Backtracking

$$(1 \oplus 2) \otimes (3 \oplus 4) \longrightarrow \color{blue}{21}$$

$$\nwarrow \quad (1 \oplus 2) \longrightarrow \color{red}{7}, \; (3 \oplus 4) \longrightarrow \color{red}{3}$$

$$\nwarrow \quad 1 \longrightarrow \color{blue}{1}, \; 2 \longrightarrow \color{red}{6}, \; (3 \oplus 4) \longrightarrow \color{red}{3}$$

goal oriented derivation (depth-first)

Backtracking

$$(1 \oplus 2) \otimes (3 \oplus 4) \longrightarrow 21$$

$$\nwarrow \quad (1 \oplus 2) \longrightarrow 7\,,\ (3 \oplus 4) \longrightarrow 3$$

$$\nwarrow \quad 1 \longrightarrow 1\,,\, 2 \longrightarrow 6\ ,\ (3 \oplus 4) \longrightarrow 3$$

$$\nwarrow \quad 2 \longrightarrow 6\ ,\ (3 \oplus 4) \longrightarrow 3$$

goal oriented derivation (depth-first)

Backtracking

$(1 \oplus 2) \otimes (3 \oplus 4) \longrightarrow 21$

goal oriented derivation (depth-first)

$\nwarrow \quad (1 \oplus 2) \longrightarrow 7\,,\ (3 \oplus 4) \longrightarrow 3$

$\nwarrow \quad 1 \longrightarrow 1\,,\ 2 \longrightarrow 6\,,\ (3 \oplus 4) \longrightarrow 3$

$\nwarrow \quad 2 \longrightarrow 6\,,\ (3 \oplus 4) \longrightarrow 3$

fail! need to backtrack to the last choice and retry

Backtracking

goal oriented derivation (depth-first)

$$(1 \oplus 2) \otimes (3 \oplus 4) \longrightarrow 21$$

$$\nwarrow \quad (1 \oplus 2) \longrightarrow 7, \ (3 \oplus 4) \longrightarrow 3$$

$$\nwarrow \quad 1 \longrightarrow 1, 2 \longrightarrow 6, \ (3 \oplus 4) \longrightarrow 3$$

$$\nwarrow \quad 2 \longrightarrow 6, \ (3 \oplus 4) \longrightarrow 3$$

fail! need to backtrack to the last choice and retry

$$\nwarrow \quad 1 \longrightarrow 2, 2 \longrightarrow 5, \ (3 \oplus 4) \longrightarrow 3$$

Backtracking

goal oriented derivation (depth-first)

$$(1 \oplus 2) \otimes (3 \oplus 4) \longrightarrow 21$$

$$\nwarrow \quad (1 \oplus 2) \longrightarrow 7\,,\ (3 \oplus 4) \longrightarrow 3$$

$$\nwarrow \quad 1 \longrightarrow 1\,, 2 \longrightarrow 6\,,\ (3 \oplus 4) \longrightarrow 3$$

$$\nwarrow \quad 2 \longrightarrow 6\,,\ (3 \oplus 4) \longrightarrow 3$$

fail! need to backtrack to the last choice and retry

$$\nwarrow \quad 1 \longrightarrow 2\,, 2 \longrightarrow 5\,,\ (3 \oplus 4) \longrightarrow 3$$

fail! need to backtrack to the last choice and retry

Backtracking

$(1 \oplus 2) \otimes (3 \oplus 4) \longrightarrow 21$

goal oriented derivation (depth-first)

$\nwarrow \quad (1 \oplus 2) \longrightarrow 7\,,\ (3 \oplus 4) \longrightarrow 3$

$\nwarrow \quad 1 \longrightarrow 1\,, 2 \longrightarrow 6\,,\ (3 \oplus 4) \longrightarrow 3$

$\nwarrow \quad 2 \longrightarrow 6\,,\ (3 \oplus 4) \longrightarrow 3$

fail! need to backtrack to the last choice and retry

$\nwarrow \quad 1 \longrightarrow 2\,, 2 \longrightarrow 5\,,\ (3 \oplus 4) \longrightarrow 3$

fail! need to backtrack to the last choice and retry

...

Backtracking

goal oriented derivation (depth-first)

$(1 \oplus 2) \otimes (3 \oplus 4) \longrightarrow 21$

$\nwarrow \quad (1 \oplus 2) \longrightarrow 7\,,\ (3 \oplus 4) \longrightarrow 3$

$\nwarrow \quad 1 \longrightarrow 1\,,\ 2 \longrightarrow 6\,,\ (3 \oplus 4) \longrightarrow 3$

$\nwarrow \quad 2 \longrightarrow 6\,,\ (3 \oplus 4) \longrightarrow 3$

fail! need to backtrack to the last choice and retry

$\nwarrow \quad 1 \longrightarrow 2\,,\ 2 \longrightarrow 5\,,\ (3 \oplus 4) \longrightarrow 3$

fail! need to backtrack to the last choice and retry

...

alternatively, all possibilities can be explored in parallel (breadth-first vs depth-first)

Logic programming

PROLOG

Prolog is a simple, yet powerful declarative programming language, based on first-order predicate logic

PROgrammation en LOGique

['70] (Univ. Marseilles) A. Colmerauer, P. Roussel, R. Kowalski

(aimed at processing natural (French) language)

PROLOG

Prolog is a simple, yet powerful declarative programming language, based on first-order predicate logic

PROgrammation en LOGique

['70] (Univ. Marseilles) A. Colmerauer, P. Roussel, R. Kowalski (aimed at processing natural (French) language)

```
Every psychiatrist is a person.
Every person he analyzes is sick.
Jacques is a psychiatrist in Marseille.
Is Jacques a person?
Where is Jacques?
Is Jacques sick?

Yes.  In Marseille.
I don't know.
```

```
TOUT PSYCHIATRE EST UNE PERSONNE.
CHAQUE PERSONNE QU'IL ANALYSE, EST MALADE.
JACQUES EST UN PSYCHIATRE A *MARSEILLE.
EST-CE QUE *JACQUES EST UNE PERSONNE?
OU EST *JACQUES?
EST-CE QUE *JACQUES EST MALADE?
OUI. A MARSEILLE. JE NE SAIS PAS.
```

Algorithm

$$\boxed{\text{algorithm} = \text{logic} + \text{control}}$$

what	how
(problem description)	(steps to reach a solution)
Horn clauses	resolution
PROLOG database	PROLOG interpreter

Formulas

$X = \{x, y, ...\}$ a set of variables

$\Sigma = \{\Sigma_n\}_n$ a signature of function symbols $c, f, g, ...$

$\Pi = \{\Pi_n\}_n$ a signature of predicate symbols $p, q, ...$

atomic formula

$a = p(t_1, ..., t_n)$ $\quad p \in \Pi_n$, $\quad t_1, ..., t_n \in T_{\Sigma,X}$

formula

$a_1, ..., a_n$ a possibly empty conjunction of atomic formulas

Example

$X = \{\mathsf{S}, \mathsf{S}_0, \mathsf{S}_1, ...\}$ a set of variables

$\Sigma_0 = \{\epsilon, (,)\}$ a set of constants

$\Sigma_2 = \{\_\ \_\}$ a binary (infix) operator

$\Pi_1 = \{\_ \in \mathcal{L}\}$ a unary predicate symbol

atomic formula $\mathsf{S}) \in \mathcal{L}$

formula $\mathsf{S}) \in \mathcal{L}, \mathsf{SS})) \in \mathcal{L}$

Example

$X = \{\mathsf{N}, \mathsf{E}, \mathsf{E}_0, \mathsf{E}_1, ..., n, n_0, n_1, ...\}$ a set of variables

$\Sigma_0 = \{0, 1, 2, ..., 0, 1, 2, ...\}$ a set of constants

$\Sigma_2 = \{\_ \oplus \_, \_ \otimes \_\}$ a set of binary (infix) operators

$\Pi_2 = \{\_ \longrightarrow \_\}$ a binary (infix) predicate symbol

atomic formula $\mathsf{E} \oplus 2 \longrightarrow 5$

formula $\mathsf{E} \oplus 2 \longrightarrow 5, \mathsf{E} \otimes 7 \longrightarrow n$

Logic programs

Horn clause

an atomic formula (the HEAD) $h \,:\!-\, r\,.$ a formula (the BODY)

Logic programs

Horn clause

an atomic formula (the HEAD) $h \;:\!- \; r\,.$ a formula (the BODY)

$a \;:\!- \; a_1, \ldots, a_n\,.$ analogous to $\dfrac{a_1 \quad \cdots \quad a_n}{a}$

Logic programs

Horn clause

an atomic formula (the HEAD) $h \;:\!-\; r\,.$ a formula (the BODY)

$a \;:\!-\; a_1, \ldots, a_n\,.$ analogous to $\dfrac{a_1 \quad \cdots \quad a_n}{a}$

a set (or list) of Horn clauses

logic program L

$$L = \left\{ \begin{array}{l} \cdots \\ h :\!- r. \\ \cdots \end{array} \right\}$$

Applications

a logic program serves to answer the following question:
given a formula *g* that we want to prove,
what are the valid instances of *g*?

$$?- \quad (1 \oplus 2) \otimes (3 \oplus 4) \longrightarrow n \text{ , } n \oplus \mathsf{E} \longrightarrow 26$$

SLD resolution

Idea: iteratively reduce the initial goal *g* by applying one of the Horn clauses in L to one of the atomic formulas in the goal;

each application computes a most general unifier (mgu), replaces the selected formula with the body of the selected clause and applies the mgu to the new goal

$$\begin{array}{lll} ?-\ g & \nwarrow_{\sigma_1} & g_1 \\ & \nwarrow_{\sigma_2} & g_2 \\ & \nwarrow_{\sigma_3} & \ldots \\ & \nwarrow_{\sigma_m} & \square \end{array}$$

then $g\sigma_1\sigma_2 ... \sigma_m$ is a theorem

Selective Linear Definite clause resolution

Wikipedia
The Free Encyclopedia

Search Wikipedia | Search

The origin of the name "SLD" [edit]

The name "SLD resolution" was given by Maarten van Emden for the unnamed inference rule introduced by Robert Kowalski.[1] Its name is derived from SL resolution,[2] which is both sound and refutation complete for the unrestricted clausal form of logic. "SLD" stands for "SL resolution with Definite clauses".

In both, SL and SLD, "L" stands for the fact that a resolution proof can be restricted to a linear sequence of clauses:

$$C_1, C_2, \cdots, C_l$$

where the "top clause" C_1 is an input clause, and every other clause C_{i+1} is a resolvent one of whose parents is the previous clause C_i. The proof is a refutation if the last clause C_l is the empty clause.

In SLD, all of the clauses in the sequence are goal clauses, and the other parent is an input clause. In SL resolution, the other parent is either an input clause or an ancestor clause earlier in the sequence.

In both SL and SLD, "S" stands for the fact that the only literal resolved upon in any clause C_i is one that is uniquely selected by a selection rule or selection function. In SL resolution, the selected literal is restricted to one which has been most recently introduced into the clause. In the simplest case, such a last-in-first-out selection function can be specified by the order in which literals are written, as in Prolog. However, the selection function in SLD resolution is more general than in SL resolution and in Prolog. There is no restriction on the literal that can be selected.

SLD resolution

$$?\!-\ a_1, \ldots \boxed{a_i} \ldots, a_k$$

L

$\ldots$

$$\boxed{h\ :\!-\ b_1, \ldots, b_n}$$

$\ldots$

repeat the following until no goal is left:

1. select a clause of the goal a_i (e.g., the first);
2. select a Horn clause $h :\!- b_1, \ldots, b_n$ in L whose head unifies with a_i;
3. let σ be a most general unifier $(a_i\sigma = h\sigma)$;
4. replace a_i with $b_1, \ldots, b_n$;
5. apply the computed substitution σ to the goal $(a_1, \ldots, b_1, \ldots, b_n, \ldots, a_k)\sigma$

Pay attention

atomic goals can share variables: the substitution must be applied to all of them to propagate the information

$$(a_1, ..., b_1, ..., b_n, ..., a_k)\sigma$$

$$a_1, ..., (b_1, ..., b_n)\sigma, ..., a_k$$

Pay attention

the same clause can be reused many times:
each time its variables must be renamed (before unification)
with *fresh* identifiers to avoid clashes

repeat the following until no goal is left:

1. select a clause of the goal a_i (e.g., the first);
2. select a Horn clause $h :- b_1, ..., b_n$ in L;
3. let $\rho : X \to X$ rename the variables in $vars(h :- b_1, ..., b_n)$ to fresh ones;
4. $(h :- b_1, ..., b_n)\rho$ is called a *variant* of the original clause;
5. let σ be a most general unifier $(a_i\sigma = (h\rho)\sigma)$;
6. replace a_i with $(b_1, ..., b_n)\rho$;
7. apply the computed substitution σ to the goal $(a_1, ..., (b_1, ..., b_n)\rho, ..., a_k)\sigma$

SLD resolution

L

$\ldots$

h :- $b_1 , \ldots , b_n$.

$\ldots$

?- $a_1 , \ldots , a_i , \ldots , a_k$.

SLD resolution

L

$\dots$

h :- b_1 , … , b_n .

$\dots$

?- a_1 , … , a_i , … , a_k .

(h :- b_1 , … , b_n) ρ

fresh renaming

SLD resolution

L

$\ldots$

h :- b_1 , … , b_n .

$\ldots$

?- a_1 , … , a_i , … , a_k .

(h :- b_1 , … , b_n) ρ

fresh renaming

σ = mgu{ $a_i = h\rho$ } $g = b_1\rho$, … , $b_n\rho$

SLD resolution

L

$\ldots$

h :- $b_1 , \ldots , b_n$.

$\ldots$

?- $a_1 , \ldots , a_i , \ldots , a_k$.

$(h$:- $b_1 , \ldots , b_n) \rho$

fresh renaming

σ = mgu{ $a_i = h\rho$ } $g = b_1\rho , \ldots , b_n\rho$

?- $a_1\sigma , \ldots , g\sigma , \ldots , a_k\sigma$

Pay attention

in the computed substitutions, only the variables that appears in the goal are of some interest to us

$$\sigma : X \to T_{\Sigma,X} \qquad Y \subseteq X$$

$$\sigma_{|Y}(x) \triangleq \begin{cases} \sigma(x) & \text{if } x \in Y \\ x & \text{otherwise} \end{cases}$$

we only record this partial information

$$a_1, \ldots, a_i, \ldots, a_k \ \nwarrow_{\widehat{\sigma}} \ (a_1, \ldots, (b_1, \ldots, b_n)\rho, \ldots, a_k)\sigma$$

$$\widehat{\sigma} \triangleq \sigma_{|vars(a_1,\ldots,a_k)}$$

Computed answer substitution

$$
\begin{array}{llll}
?-\ g & \nwarrow_{\widehat{\sigma}_1} & g_1 \\
 & \nwarrow_{\widehat{\sigma}_2} & g_2 \\
 & \nwarrow_{\widehat{\sigma}_3} & \cdots \\
 & \nwarrow_{\widehat{\sigma}_m} & \square
\end{array}
$$

$$\sigma = \widehat{\sigma}_1 \cdot \widehat{\sigma}_2 \cdot \widehat{\sigma}_3 \cdots \widehat{\sigma}_m$$

is called cas (computed answer substitution)

where

$$t(\sigma_1 \cdot \sigma_2) \triangleq t\sigma_1\sigma_2 = \sigma_2(\sigma_1(t)) = (\sigma_2 \circ \sigma_1)(t)$$

Example

$\Sigma_0 = \{\mathsf{0}, ...\}$ $\Pi_3 = \{\mathsf{sum}, ...\}$

$\Sigma_1 = \{\mathsf{s}, ...\}$

sum as a predicate $\mathsf{sum}(x, y, z)$ means $x + y = z$

L

(a fact)

$\mathsf{sum}(\mathsf{0}, y, y).$

$\mathsf{sum}(\mathsf{s}(x), y, \mathsf{s}(z)) :- \mathsf{sum}(x, y, z).$

in PROLOG each statement ends with dot

SLD resolution

?- sum(s(s(0)) , s(s(0)) , n).

$$L$$

$$\ldots$$

$$\mathsf{sum}(\mathsf{s}(x), y, \mathsf{s}(z)) :- \mathsf{sum}(x, y, z).$$

$$\ldots$$

SLD resolution

L

$\ldots$

$$\mathsf{sum}(\mathsf{s}(x), y, \mathsf{s}(z)) :\!- \mathsf{sum}(x, y, z).$$

$\ldots$

?- sum(s(s(0)) , s(s(0)) , n).

$$\mathsf{sum}(\mathsf{s}(x_1), y_1, \mathsf{s}(z_1)) :\!- \mathsf{sum}(x_1, y_1, z_1).$$

fresh renaming

SLD resolution

L

$\dots$

$\mathsf{sum}(\mathsf{s}(x), y, \mathsf{s}(z)) :\!- \mathsf{sum}(x, y, z).$

$\dots$

?- sum(s(s(0)) , s(s(0)) , n).

$\mathsf{sum}(\mathsf{s}(x_1), y_1, \mathsf{s}(z_1)) :\!- \mathsf{sum}(x_1, y_1, z_1).$

fresh renaming

$\sigma = \mathrm{mgu}\{\, \mathsf{sum}(\mathsf{s}(\mathsf{s}(0)), \mathsf{s}(\mathsf{s}(0)), n) = \mathsf{sum}(\mathsf{s}(x_1), y_1, \mathsf{s}(z_1)) \,\}$ $\quad g = \mathsf{sum}(x_1, y_1, z_1)$

SLD resolution

$$L$$

$$\ldots$$

$$\mathsf{sum}(\mathsf{s}(x), y, \mathsf{s}(z)) :\!- \mathsf{sum}(x, y, z).$$

$$\ldots$$

?- sum(s(s(0)) , s(s(0)) , n).

$$\mathsf{sum}(\mathsf{s}(x_1), y_1, \mathsf{s}(z_1)) :\!- \mathsf{sum}(x_1, y_1, z_1).$$

fresh renaming

σ = mgu$\{ \mathsf{sum}(\mathsf{s}(\mathsf{s}(0)), \mathsf{s}(\mathsf{s}(0)), n) = \mathsf{sum}(\mathsf{s}(x_1), y_1, \mathsf{s}(z_1)) \}$ g = $\mathsf{sum}(x_1, y_1, z_1)$

σ =[x_1=s(0) , y_1=s(s(0)) , n=s(z_1) }

SLD resolution

L

$\ldots$

$\mathsf{sum}(\mathsf{s}(x), y, \mathsf{s}(z)) \mathrel{:-} \mathsf{sum}(x, y, z).$

$\ldots$

?- sum(s(s(0)) , s(s(0)) , n).

$\mathsf{sum}(\mathsf{s}(x_1), y_1, \mathsf{s}(z_1)) \mathrel{:-} \mathsf{sum}(x_1, y_1, z_1).$

fresh renaming

$\sigma = \mathrm{mgu}\{\, \mathsf{sum}(\mathsf{s}(\mathsf{s}(0)), \mathsf{s}(\mathsf{s}(0)), n) = \mathsf{sum}(\mathsf{s}(x_1), y_1, \mathsf{s}(z_1)) \}$ $\quad g = \mathsf{sum}(x_1, y_1, z_1)$

$\sigma = [\, x_1 = \mathsf{s}(0)\ ,\ y_1 = \mathsf{s}(\mathsf{s}(0))\ ,\ n = \mathsf{s}(z_1) \}$

?- sum(s(0) , s(s(0)) , z_1).

2+2=?

our goal $?- \mathsf{sum}(\mathsf{s}(\mathsf{s}(0)), \mathsf{s}(\mathsf{s}(0)), n).$

L

$\mathsf{sum}(0, y, y).$

$\mathsf{sum}(\mathsf{s}(x), y, \mathsf{s}(z)) :- \mathsf{sum}(x, y, z).$

$\mathsf{sum}(\mathsf{s}(\mathsf{s}(0)), \mathsf{s}(\mathsf{s}(0)), n)$

2+2=?

our goal $?-\ \mathsf{sum}(\mathsf{s}(\mathsf{s}(0)), \mathsf{s}(\mathsf{s}(0)), n).$

L

$\mathsf{sum}(0, y, y).$

$\mathsf{sum}(\mathsf{s}(x), y, \mathsf{s}(z)) :-\ \mathsf{sum}(x, y, z).$

$$\{\mathsf{sum}(\mathsf{s}(\mathsf{s}(0)), \mathsf{s}(\mathsf{s}(0)), n) \stackrel{?}{=} \mathsf{sum}(0, y', y')\}$$

$\mathsf{sum}(\mathsf{s}(\mathsf{s}(0)), \mathsf{s}(\mathsf{s}(0)), n)$

2+2=?

our goal $\quad ?- \mathsf{sum}(\mathsf{s}(\mathsf{s}(0)), \mathsf{s}(\mathsf{s}(0)), n).$

L

$\mathsf{sum}(0, y, y).$

$\mathsf{sum}(\mathsf{s}(x), y, \mathsf{s}(z)) :- \mathsf{sum}(x, y, z).$

$\{\mathsf{sum}(\mathsf{s}(\mathsf{s}(0)), \mathsf{s}(\mathsf{s}(0)), n) \stackrel{?}{=} \mathsf{sum}(0, y', y')\}$ fails

$\mathsf{sum}(\mathsf{s}(\mathsf{s}(0)), \mathsf{s}(\mathsf{s}(0)), n)$

2+2=?

our goal $\; ?- \mathsf{sum}(\mathsf{s}(\mathsf{s}(0)), \mathsf{s}(\mathsf{s}(0)), n).$

$$L$$

$\mathsf{sum}(0, y, y).$

$\mathsf{sum}(\mathsf{s}(x), y, \mathsf{s}(z)) :- \mathsf{sum}(x, y, z).$

$$\{\mathsf{sum}(\mathsf{s}(\mathsf{s}(0)), \mathsf{s}(\mathsf{s}(0)), n) \stackrel{?}{=} \mathsf{sum}(0, y', y')\}$$ fails

$$\{\mathsf{sum}(\mathsf{s}(\mathsf{s}(0)), \mathsf{s}(\mathsf{s}(0)), n) \stackrel{?}{=} \mathsf{sum}(\mathsf{s}(x_1), y_1, \mathsf{s}(z_1))\}$$

$$\mathsf{sum}(\mathsf{s}(\mathsf{s}(0)), \mathsf{s}(\mathsf{s}(0)), n)$$

2+2=?

our goal $\quad ?- \mathsf{sum}(\mathsf{s}(\mathsf{s}(0)), \mathsf{s}(\mathsf{s}(0)), n).$

L

$\mathsf{sum}(0, y, y).$

$\mathsf{sum}(\mathsf{s}(x), y, \mathsf{s}(z)) :- \mathsf{sum}(x, y, z).$

$\{\mathsf{sum}(\mathsf{s}(\mathsf{s}(0)), \mathsf{s}(\mathsf{s}(0)), n) \stackrel{?}{=} \mathsf{sum}(0, y', y')\}$ fails

$\{\mathsf{sum}(\mathsf{s}(\mathsf{s}(0)), \mathsf{s}(\mathsf{s}(0)), n) \stackrel{?}{=} \mathsf{sum}(\mathsf{s}(x_1), y_1, \mathsf{s}(z_1))\}$ succeeds

$\mathsf{sum}(\mathsf{s}(\mathsf{s}(0)), \mathsf{s}(\mathsf{s}(0)), n)$

2+2=?

our goal $?\!-\ \mathsf{sum}(\mathsf{s}(\mathsf{s}(0)), \mathsf{s}(\mathsf{s}(0)), n).$

L

$\mathsf{sum}(0, y, y).$

$\mathsf{sum}(\mathsf{s}(x), y, \mathsf{s}(z)) :\!-\ \mathsf{sum}(x, y, z).$

$\{\mathsf{sum}(\mathsf{s}(\mathsf{s}(0)), \mathsf{s}(\mathsf{s}(0)), n) \stackrel{?}{=} \mathsf{sum}(0, y', y')\}$ fails

$\{\mathsf{sum}(\mathsf{s}(\mathsf{s}(0)), \mathsf{s}(\mathsf{s}(0)), n) \stackrel{?}{=} \mathsf{sum}(\mathsf{s}(x_1), y_1, \mathsf{s}(z_1))\}$ succeeds

$$\sigma_1 = [x_1 = \mathsf{s}(0)\ ,\ y_1 = \mathsf{s}(\mathsf{s}(0))\ ,\ n = \mathsf{s}(z_1)]$$

$\mathsf{sum}(\mathsf{s}(\mathsf{s}(0)), \mathsf{s}(\mathsf{s}(0)), n)$

2+2=?

our goal $?-\ \mathsf{sum}(\mathsf{s}(\mathsf{s}(0)), \mathsf{s}(\mathsf{s}(0)), n).$

L

$\mathsf{sum}(0, y, y).$

$\mathsf{sum}(\mathsf{s}(x), y, \mathsf{s}(z)) :-\ \mathsf{sum}(x, y, z).$

$\{\mathsf{sum}(\mathsf{s}(\mathsf{s}(0)), \mathsf{s}(\mathsf{s}(0)), n) \stackrel{?}{=} \mathsf{sum}(0, y', y')\}$ fails

$\{\mathsf{sum}(\mathsf{s}(\mathsf{s}(0)), \mathsf{s}(\mathsf{s}(0)), n) \stackrel{?}{=} \mathsf{sum}(\mathsf{s}(x_1), y_1, \mathsf{s}(z_1))\}$ succeeds

$$\sigma_1 = [x_1 = \mathsf{s}(0)\ ,\ y_1 = \mathsf{s}(\mathsf{s}(0))\ ,\ n = \mathsf{s}(z_1)]$$

$$\widehat{\sigma}_1 = [n = \mathsf{s}(z_1)]$$

$\mathsf{sum}(\mathsf{s}(\mathsf{s}(0)), \mathsf{s}(\mathsf{s}(0)), n)$

2+2=?

our goal $?- \mathsf{sum}(\mathsf{s}(\mathsf{s}(0)), \mathsf{s}(\mathsf{s}(0)), n).$

L

$\mathsf{sum}(0, y, y).$

$\mathsf{sum}(\mathsf{s}(x), y, \mathsf{s}(z)) :- \mathsf{sum}(x, y, z).$

$\{\mathsf{sum}(\mathsf{s}(\mathsf{s}(0)), \mathsf{s}(\mathsf{s}(0)), n) \stackrel{?}{=} \mathsf{sum}(0, y', y')\}$ fails

$\{\mathsf{sum}(\mathsf{s}(\mathsf{s}(0)), \mathsf{s}(\mathsf{s}(0)), n) \stackrel{?}{=} \mathsf{sum}(\mathsf{s}(x_1), y_1, \mathsf{s}(z_1))\}$ succeeds

$$\sigma_1 = [x_1 = \mathsf{s}(0)\ ,\ y_1 = \mathsf{s}(\mathsf{s}(0))\ ,\ n = \mathsf{s}(z_1)]$$

$$\widehat{\sigma}_1 = [n = \mathsf{s}(z_1)]$$

$\widehat{\sigma}_1 = [n = \mathsf{s}(z_1)]$

$$\mathsf{sum}(\mathsf{s}(\mathsf{s}(0)), \mathsf{s}(\mathsf{s}(0)), n) \ \nwarrow_{\widehat{\sigma}_1} \ (\,\mathsf{sum}(x_1, y_1, z_1)\,)\sigma_1$$

2+2=?

our goal $?-\ \mathsf{sum}(\mathsf{s}(\mathsf{s}(0)), \mathsf{s}(\mathsf{s}(0)), n).$

L

$\mathsf{sum}(0, y, y).$

$\mathsf{sum}(\mathsf{s}(x), y, \mathsf{s}(z)) :- \mathsf{sum}(x, y, z).$

$\{\mathsf{sum}(\mathsf{s}(\mathsf{s}(0)), \mathsf{s}(\mathsf{s}(0)), n) \stackrel{?}{=} \mathsf{sum}(0, y', y')\}$ fails

$\{\mathsf{sum}(\mathsf{s}(\mathsf{s}(0)), \mathsf{s}(\mathsf{s}(0)), n) \stackrel{?}{=} \mathsf{sum}(\mathsf{s}(x_1), y_1, \mathsf{s}(z_1))\}$ succeeds

$$\sigma_1 = [x_1 = \mathsf{s}(0)\ ,\ y_1 = \mathsf{s}(\mathsf{s}(0))\ ,\ n = \mathsf{s}(z_1)]$$

$$\widehat{\sigma}_1 = [n = \mathsf{s}(z_1)]$$

$\widehat{\sigma}_1 = [n = \mathsf{s}(z_1)]$

$$\mathsf{sum}(\mathsf{s}(\mathsf{s}(0)), \mathsf{s}(\mathsf{s}(0)), n) \ \nwarrow_{\widehat{\sigma}_1}\ (\ \mathsf{sum}(x_1, y_1, z_1)\ )\sigma_1$$

$$= \mathsf{sum}(\mathsf{s}(0), \mathsf{s}(\mathsf{s}(0)), z_1)$$

1+2=?

our new goal

$$\mathsf{sum}(\mathsf{s}(0), \mathsf{s}(\mathsf{s}(0)), z_1).$$

L

$\mathsf{sum}(0, y, y).$

$\mathsf{sum}(\mathsf{s}(x), y, \mathsf{s}(z)) :- \mathsf{sum}(x, y, z).$

$\widehat{\sigma}_1 = [n = \mathsf{s}(z_1)]$

$$\mathsf{sum}(\mathsf{s}(\mathsf{s}(0)), \mathsf{s}(\mathsf{s}(0)), n) \quad \nwarrow_{\widehat{\sigma}_1} \quad \mathsf{sum}(\mathsf{s}(0), \mathsf{s}(\mathsf{s}(0)), z_1)$$

1+2=?

our new goal

$$\mathsf{sum}(\mathsf{s}(0), \mathsf{s}(\mathsf{s}(0)), z_1).$$

L

$\mathsf{sum}(0, y, y).$

$\mathsf{sum}(\mathsf{s}(x), y, \mathsf{s}(z)) :\!-\ \mathsf{sum}(x, y, z).$

$$\{\mathsf{sum}(\mathsf{s}(0), \mathsf{s}(\mathsf{s}(0)), z_1) \stackrel{?}{=} \mathsf{sum}(0, y', y')\}$$

$\widehat{\sigma}_1 = [n = \mathsf{s}(z_1)]$

$$\mathsf{sum}(\mathsf{s}(\mathsf{s}(0)), \mathsf{s}(\mathsf{s}(0)), n) \ \nwarrow_{\widehat{\sigma}_1}\ \mathsf{sum}(\mathsf{s}(0), \mathsf{s}(\mathsf{s}(0)), z_1)$$

1+2=?

our new goal

$$\mathsf{sum}(\mathsf{s}(0), \mathsf{s}(\mathsf{s}(0)), z_1).$$

L

$\mathsf{sum}(0, y, y).$

$\mathsf{sum}(\mathsf{s}(x), y, \mathsf{s}(z)) :- \mathsf{sum}(x, y, z).$

$$\{\mathsf{sum}(\mathsf{s}(0), \mathsf{s}(\mathsf{s}(0)), z_1) \stackrel{?}{=} \mathsf{sum}(0, y', y')\}$$

fails

$\widehat{\sigma}_1 = [n = \mathsf{s}(z_1)]$

$$\mathsf{sum}(\mathsf{s}(\mathsf{s}(0)), \mathsf{s}(\mathsf{s}(0)), n) \nwarrow_{\widehat{\sigma}_1} \mathsf{sum}(\mathsf{s}(0), \mathsf{s}(\mathsf{s}(0)), z_1)$$

1+2=?

our new goal

$$\mathsf{sum}(\mathsf{s}(0), \mathsf{s}(\mathsf{s}(0)), z_1).$$

L

$\mathsf{sum}(0, y, y).$

$\mathsf{sum}(\mathsf{s}(x), y, \mathsf{s}(z)) :- \mathsf{sum}(x, y, z).$

$$\{\mathsf{sum}(\mathsf{s}(0), \mathsf{s}(\mathsf{s}(0)), z_1) \stackrel{?}{=} \mathsf{sum}(0, y', y')\}$$

fails

$$\{\mathsf{sum}(\mathsf{s}(0), \mathsf{s}(\mathsf{s}(0)), z_1) \stackrel{?}{=} \mathsf{sum}(\mathsf{s}(x_2), y_2, \mathsf{s}(z_2))\}$$

$\widehat{\sigma}_1 = [n = \mathsf{s}(z_1)]$

$$\mathsf{sum}(\mathsf{s}(\mathsf{s}(0)), \mathsf{s}(\mathsf{s}(0)), n) \quad \nwarrow_{\widehat{\sigma}_1} \quad \mathsf{sum}(\mathsf{s}(0), \mathsf{s}(\mathsf{s}(0)), z_1)$$

1+2=?

our new goal

$$\mathsf{sum}(\mathsf{s}(0), \mathsf{s}(\mathsf{s}(0)), z_1).$$

L

$\mathsf{sum}(0, y, y).$

$\mathsf{sum}(\mathsf{s}(x), y, \mathsf{s}(z)) :- \mathsf{sum}(x, y, z).$

$$\{\mathsf{sum}(\mathsf{s}(0), \mathsf{s}(\mathsf{s}(0)), z_1) \stackrel{?}{=} \mathsf{sum}(0, y', y')\}$$ fails

$$\{\mathsf{sum}(\mathsf{s}(0), \mathsf{s}(\mathsf{s}(0)), z_1) \stackrel{?}{=} \mathsf{sum}(\mathsf{s}(x_2), y_2, \mathsf{s}(z_2))\}$$ succeeds

$\widehat{\sigma}_1 = [n = \mathsf{s}(z_1)]$

$$\mathsf{sum}(\mathsf{s}(\mathsf{s}(0)), \mathsf{s}(\mathsf{s}(0)), n) \;\nwarrow_{\widehat{\sigma}_1}\; \mathsf{sum}(\mathsf{s}(0), \mathsf{s}(\mathsf{s}(0)), z_1)$$

1+2=?

our new goal

$$\mathsf{sum}(\mathsf{s}(0), \mathsf{s}(\mathsf{s}(0)), z_1).$$

L

$\mathsf{sum}(0, y, y).$

$\mathsf{sum}(\mathsf{s}(x), y, \mathsf{s}(z)) :\!-\ \mathsf{sum}(x, y, z).$

$$\{\mathsf{sum}(\mathsf{s}(0), \mathsf{s}(\mathsf{s}(0)), z_1) \stackrel{?}{=} \mathsf{sum}(0, y', y')\}$$

fails

$$\{\mathsf{sum}(\mathsf{s}(0), \mathsf{s}(\mathsf{s}(0)), z_1) \stackrel{?}{=} \mathsf{sum}(\mathsf{s}(x_2), y_2, \mathsf{s}(z_2))\}$$

succeeds

$$\sigma_2 = [x_2 = 0\ ,\ y_2 = \mathsf{s}(\mathsf{s}(0))\ ,\ z_1 = \mathsf{s}(z_2)]$$

$\widehat{\sigma}_1 = [n = \mathsf{s}(z_1)]$

$$\mathsf{sum}(\mathsf{s}(\mathsf{s}(0)), \mathsf{s}(\mathsf{s}(0)), n) \ \nwarrow_{\widehat{\sigma}_1}\ \mathsf{sum}(\mathsf{s}(0), \mathsf{s}(\mathsf{s}(0)), z_1)$$

1+2=?

our new goal

$$\mathsf{sum}(\mathsf{s}(0), \mathsf{s}(\mathsf{s}(0)), z_1).$$

L

$\mathsf{sum}(0, y, y).$

$\mathsf{sum}(\mathsf{s}(x), y, \mathsf{s}(z)) :\!-\ \mathsf{sum}(x, y, z).$

$$\{\mathsf{sum}(\mathsf{s}(0), \mathsf{s}(\mathsf{s}(0)), z_1) \stackrel{?}{=} \mathsf{sum}(0, y', y')\}$$ fails

$$\{\mathsf{sum}(\mathsf{s}(0), \mathsf{s}(\mathsf{s}(0)), z_1) \stackrel{?}{=} \mathsf{sum}(\mathsf{s}(x_2), y_2, \mathsf{s}(z_2))\}$$ succeeds

$$\sigma_2 = [x_2 = 0\,,\ y_2 = \mathsf{s}(\mathsf{s}(0))\,,\ z_1 = \mathsf{s}(z_2)]$$

$$\widehat{\sigma}_2 = [z_1 = \mathsf{s}(z_2)]$$

$\widehat{\sigma}_1 = [n = \mathsf{s}(z_1)]$

$$\mathsf{sum}(\mathsf{s}(\mathsf{s}(0)), \mathsf{s}(\mathsf{s}(0)), n) \ \nwarrow_{\widehat{\sigma}_1}\ \mathsf{sum}(\mathsf{s}(0), \mathsf{s}(\mathsf{s}(0)), z_1)$$

1+2=?

our new goal

$$\mathsf{sum}(\mathsf{s}(0), \mathsf{s}(\mathsf{s}(0)), z_1).$$

L

$\mathsf{sum}(0, y, y).$

$\mathsf{sum}(\mathsf{s}(x), y, \mathsf{s}(z)) :- \mathsf{sum}(x, y, z).$

$$\{\mathsf{sum}(\mathsf{s}(0), \mathsf{s}(\mathsf{s}(0)), z_1) \stackrel{?}{=} \mathsf{sum}(0, y', y')\}$$

fails

$$\{\mathsf{sum}(\mathsf{s}(0), \mathsf{s}(\mathsf{s}(0)), z_1) \stackrel{?}{=} \mathsf{sum}(\mathsf{s}(x_2), y_2, \mathsf{s}(z_2))\}$$

succeeds

$$\sigma_2 = [x_2 = 0\,,\; y_2 = \mathsf{s}(\mathsf{s}(0))\,,\; z_1 = \mathsf{s}(z_2)]$$

$$\widehat{\sigma}_2 = [z_1 = \mathsf{s}(z_2)]$$

$\widehat{\sigma}_1 = [n = \mathsf{s}(z_1)]$

$\widehat{\sigma}_2 = [z_1 = \mathsf{s}(z_2)]$

$$\mathsf{sum}(\mathsf{s}(\mathsf{s}(0)), \mathsf{s}(\mathsf{s}(0)), n) \;\nwarrow_{\widehat{\sigma}_1}\; \mathsf{sum}(\mathsf{s}(0), \mathsf{s}(\mathsf{s}(0)), z_1)$$

$$\nwarrow_{\widehat{\sigma}_2}\; (\,\mathsf{sum}(x_2, y_2, z_2)\,)\sigma_2$$

1+2=?

our new goal

$$\mathsf{sum}(\mathsf{s}(0), \mathsf{s}(\mathsf{s}(0)), z_1).$$

L

$\mathsf{sum}(0, y, y).$

$\mathsf{sum}(\mathsf{s}(x), y, \mathsf{s}(z)) :\!- \mathsf{sum}(x, y, z).$

$$\{\mathsf{sum}(\mathsf{s}(0), \mathsf{s}(\mathsf{s}(0)), z_1) \stackrel{?}{=} \mathsf{sum}(0, y', y')\}$$

fails

$$\{\mathsf{sum}(\mathsf{s}(0), \mathsf{s}(\mathsf{s}(0)), z_1) \stackrel{?}{=} \mathsf{sum}(\mathsf{s}(x_2), y_2, \mathsf{s}(z_2))\}$$

succeeds

$$\sigma_2 = [x_2 = 0\ ,\ y_2 = \mathsf{s}(\mathsf{s}(0))\ ,\ z_1 = \mathsf{s}(z_2)]$$

$$\widehat{\sigma}_2 = [z_1 = \mathsf{s}(z_2)]$$

$\widehat{\sigma}_1 = [n = \mathsf{s}(z_1)]$

$\widehat{\sigma}_2 = [z_1 = \mathsf{s}(z_2)]$

$$\mathsf{sum}(\mathsf{s}(\mathsf{s}(0)), \mathsf{s}(\mathsf{s}(0)), n) \ \nwarrow_{\widehat{\sigma}_1}\ \mathsf{sum}(\mathsf{s}(0), \mathsf{s}(\mathsf{s}(0)), z_1)$$

$$\nwarrow_{\widehat{\sigma}_2}\ (\,\mathsf{sum}(x_2, y_2, z_2)\,)\sigma_2$$

$$= \mathsf{sum}(0, \mathsf{s}(\mathsf{s}(0)), z_2)$$

0+2=?

our new goal

$$\mathsf{sum}(0, \mathsf{s}(\mathsf{s}(0)), z_2).$$

L

$\mathsf{sum}(0, y, y).$

$\mathsf{sum}(\mathsf{s}(x), y, \mathsf{s}(z)) :- \mathsf{sum}(x, y, z).$

$\widehat{\sigma}_1 = [n = \mathsf{s}(z_1)]$

$\widehat{\sigma}_2 = [z_1 = \mathsf{s}(z_2)]$

$$\mathsf{sum}(\mathsf{s}(\mathsf{s}(0)), \mathsf{s}(\mathsf{s}(0)), n) \quad \nwarrow_{\widehat{\sigma}_1} \quad \mathsf{sum}(\mathsf{s}(0), \mathsf{s}(\mathsf{s}(0)), z_1)$$

$$\nwarrow_{\widehat{\sigma}_2} \quad \mathsf{sum}(0, \mathsf{s}(\mathsf{s}(0)), z_2)$$

0+2=?

our new goal

$$\mathsf{sum}(0, \mathsf{s}(\mathsf{s}(0)), z_2).$$

L

$\mathsf{sum}(0, y, y).$

$\mathsf{sum}(\mathsf{s}(x), y, \mathsf{s}(z)) :- \mathsf{sum}(x, y, z).$

$$\{\mathsf{sum}(0, \mathsf{s}(\mathsf{s}(0)), z_2) \stackrel{?}{=} \mathsf{sum}(0, y_3, y_3)\}$$

$\widehat{\sigma}_1 = [n = \mathsf{s}(z_1)]$

$\widehat{\sigma}_2 = [z_1 = \mathsf{s}(z_2)]$

$$\mathsf{sum}(\mathsf{s}(\mathsf{s}(0)), \mathsf{s}(\mathsf{s}(0)), n) \ \nwarrow_{\widehat{\sigma}_1} \ \mathsf{sum}(\mathsf{s}(0), \mathsf{s}(\mathsf{s}(0)), z_1)$$

$$\nwarrow_{\widehat{\sigma}_2} \ \mathsf{sum}(0, \mathsf{s}(\mathsf{s}(0)), z_2)$$

0+2=?

our new goal

$$\mathsf{sum}(0, \mathsf{s}(\mathsf{s}(0)), z_2).$$

L

$\mathsf{sum}(0, y, y).$

$\mathsf{sum}(\mathsf{s}(x), y, \mathsf{s}(z)) :- \mathsf{sum}(x, y, z).$

$$\{\mathsf{sum}(0, \mathsf{s}(\mathsf{s}(0)), z_2) \stackrel{?}{=} \mathsf{sum}(0, y_3, y_3)\}$$

succeeds

$$\mathsf{sum}(\mathsf{s}(\mathsf{s}(0)), \mathsf{s}(\mathsf{s}(0)), n) \nwarrow_{\widehat{\sigma}_1} \mathsf{sum}(\mathsf{s}(0), \mathsf{s}(\mathsf{s}(0)), z_1)$$

$$\nwarrow_{\widehat{\sigma}_2} \mathsf{sum}(0, \mathsf{s}(\mathsf{s}(0)), z_2)$$

$\widehat{\sigma}_1 = [n = \mathsf{s}(z_1)]$

$\widehat{\sigma}_2 = [z_1 = \mathsf{s}(z_2)]$

0+2=?

our new goal

$$\mathsf{sum}(0, \mathsf{s}(\mathsf{s}(0)), z_2).$$

L

$\mathsf{sum}(0, y, y).$

$\mathsf{sum}(\mathsf{s}(x), y, \mathsf{s}(z)) :\!-\ \mathsf{sum}(x, y, z).$

$$\{\mathsf{sum}(0, \mathsf{s}(\mathsf{s}(0)), z_2) \stackrel{?}{=} \mathsf{sum}(0, y_3, y_3)\}$$

succeeds

$$\sigma_3 = [y_3 = \mathsf{s}(\mathsf{s}(0))\,,\ z_2 = \mathsf{s}(\mathsf{s}(0))]$$

$\mathsf{sum}(\mathsf{s}(\mathsf{s}(0)), \mathsf{s}(\mathsf{s}(0)), n) \ \nwarrow_{\widehat{\sigma}_1}\ \mathsf{sum}(\mathsf{s}(0), \mathsf{s}(\mathsf{s}(0)), z_1)$

$\nwarrow_{\widehat{\sigma}_2}\ \mathsf{sum}(0, \mathsf{s}(\mathsf{s}(0)), z_2)$

$\widehat{\sigma}_1 = [n = \mathsf{s}(z_1)]$

$\widehat{\sigma}_2 = [z_1 = \mathsf{s}(z_2)]$

0+2=?

our new goal

$$\mathsf{sum}(0, \mathsf{s}(\mathsf{s}(0)), z_2).$$

L

$\mathsf{sum}(0, y, y).$

$\mathsf{sum}(\mathsf{s}(x), y, \mathsf{s}(z)) :- \mathsf{sum}(x, y, z).$

$$\{\mathsf{sum}(0, \mathsf{s}(\mathsf{s}(0)), z_2) \stackrel{?}{=} \mathsf{sum}(0, y_3, y_3)\}$$

succeeds

$$\sigma_3 = [y_3 = \mathsf{s}(\mathsf{s}(0))\ ,\ z_2 = \mathsf{s}(\mathsf{s}(0))]$$

$$\widehat{\sigma}_3 = [z_2 = \mathsf{s}(\mathsf{s}(0))]$$

$$\mathsf{sum}(\mathsf{s}(\mathsf{s}(0)), \mathsf{s}(\mathsf{s}(0)), n) \quad \nwarrow_{\widehat{\sigma}_1} \quad \mathsf{sum}(\mathsf{s}(0), \mathsf{s}(\mathsf{s}(0)), z_1)$$

$$\nwarrow_{\widehat{\sigma}_2} \quad \mathsf{sum}(0, \mathsf{s}(\mathsf{s}(0)), z_2)$$

$\widehat{\sigma}_1 = [n = \mathsf{s}(z_1)]$

$\widehat{\sigma}_2 = [z_1 = \mathsf{s}(z_2)]$

0+2=?

our new goal

$$\mathsf{sum}(0, \mathsf{s}(\mathsf{s}(0)), z_2).$$

L

$\mathsf{sum}(0, y, y).$

$\mathsf{sum}(\mathsf{s}(x), y, \mathsf{s}(z)) :- \mathsf{sum}(x, y, z).$

$$\{\mathsf{sum}(0, \mathsf{s}(\mathsf{s}(0)), z_2) \stackrel{?}{=} \mathsf{sum}(0, y_3, y_3)\}$$

succeeds

$$\sigma_3 = [y_3 = \mathsf{s}(\mathsf{s}(0))\ ,\ z_2 = \mathsf{s}(\mathsf{s}(0))]$$

$$\widehat{\sigma}_3 = [z_2 = \mathsf{s}(\mathsf{s}(0))]$$

$$\mathsf{sum}(\mathsf{s}(\mathsf{s}(0)), \mathsf{s}(\mathsf{s}(0)), n) \ \nwarrow_{\widehat{\sigma}_1}\ \mathsf{sum}(\mathsf{s}(0), \mathsf{s}(\mathsf{s}(0)), z_1)$$

$$\nwarrow_{\widehat{\sigma}_2}\ \mathsf{sum}(0, \mathsf{s}(\mathsf{s}(0)), z_2)$$

$$\nwarrow_{\widehat{\sigma}_3}\ \square$$

$\widehat{\sigma}_1 = [n = \mathsf{s}(z_1)]$

$\widehat{\sigma}_2 = [z_1 = \mathsf{s}(z_2)]$

$\widehat{\sigma}_3 = [z_2 = \mathsf{s}(\mathsf{s}(0))]$

0+2=?

our new goal

$$\mathsf{sum}(0, \mathsf{s}(\mathsf{s}(0)), z_2).$$

L

$\mathsf{sum}(0, y, y).$

$\mathsf{sum}(\mathsf{s}(x), y, \mathsf{s}(z)) :- \mathsf{sum}(x, y, z).$

$$\{\mathsf{sum}(0, \mathsf{s}(\mathsf{s}(0)), z_2) \stackrel{?}{=} \mathsf{sum}(0, y_3, y_3)\}$$

succeeds

$$\sigma_3 = [y_3 = \mathsf{s}(\mathsf{s}(0))\,,\; z_2 = \mathsf{s}(\mathsf{s}(0))]$$

$$\widehat{\sigma}_3 = [z_2 = \mathsf{s}(\mathsf{s}(0))]$$

$$\mathsf{sum}(\mathsf{s}(\mathsf{s}(0)), \mathsf{s}(\mathsf{s}(0)), n) \xleftarrow{\widehat{\sigma}_1} \mathsf{sum}(\mathsf{s}(0), \mathsf{s}(\mathsf{s}(0)), z_1) \xleftarrow{\widehat{\sigma}_2} \mathsf{sum}(0, \mathsf{s}(\mathsf{s}(0)), z_2) \xleftarrow{\widehat{\sigma}_3} \square$$

$\widehat{\sigma}_1 = [n = \mathsf{s}(z_1)]$

$\widehat{\sigma}_2 = [z_1 = \mathsf{s}(z_2)]$

$\widehat{\sigma}_3 = [z_2 = \mathsf{s}(\mathsf{s}(0))]$

$$\widehat{\sigma}_1 \cdot \widehat{\sigma}_2 \cdot \widehat{\sigma}_3 = [n = \mathsf{s}(\mathsf{s}(\mathsf{s}(\mathsf{s}(0))))]$$

0+2=?

L

$\mathsf{sum}(0, y, y).$

$\mathsf{sum}(\mathsf{s}(x), y, \mathsf{s}(z)) :- \mathsf{sum}(x, y, z).$

our new goal

$$\mathsf{sum}(0, \mathsf{s}(\mathsf{s}(0)), z_2).$$

$$\{\mathsf{sum}(0, \mathsf{s}(\mathsf{s}(0)), z_2) \stackrel{?}{=} \mathsf{sum}(0, y_3, y_3)\}$$

succeeds

$$\sigma_3 = [y_3 = \mathsf{s}(\mathsf{s}(0))\ ,\ z_2 = \mathsf{s}(\mathsf{s}(0))]$$

$$\widehat{\sigma}_3 = [z_2 = \mathsf{s}(\mathsf{s}(0))]$$

$$\mathsf{sum}(\mathsf{s}(\mathsf{s}(0)), \mathsf{s}(\mathsf{s}(0)), n) \ \nwarrow_{\widehat{\sigma}_1} \ \mathsf{sum}(\mathsf{s}(0), \mathsf{s}(\mathsf{s}(0)), z_1)$$

$$\nwarrow_{\widehat{\sigma}_2} \ \mathsf{sum}(0, \mathsf{s}(\mathsf{s}(0)), z_2)$$

$$\nwarrow_{\widehat{\sigma}_3} \ \square$$

$\widehat{\sigma}_1 = [n = \mathsf{s}(z_1)]$

$\widehat{\sigma}_2 = [z_1 = \mathsf{s}(z_2)]$

$\widehat{\sigma}_3 = [z_2 = \mathsf{s}(\mathsf{s}(0))]$

$$\widehat{\sigma}_1 \cdot \widehat{\sigma}_2 \cdot \widehat{\sigma}_3 = [n = \mathsf{s}(\mathsf{s}(\mathsf{s}(\mathsf{s}(0))))]$$

$2 + 2 = 4$!

1+n=3?

our goal $\quad ?\!-\mathsf{sum}(\mathsf{s}(0), n, \mathsf{s}(\mathsf{s}(\mathsf{s}(0)))).$

L

$\mathsf{sum}(0, y, y).$

$\mathsf{sum}(\mathsf{s}(x), y, \mathsf{s}(z)) :\!- \mathsf{sum}(x, y, z).$

$\mathsf{sum}(\mathsf{s}(0), n, \mathsf{s}(\mathsf{s}(\mathsf{s}(0))))$

1+n=3?

L

$\mathsf{sum}(0, y, y).$

$\mathsf{sum}(\mathsf{s}(x), y, \mathsf{s}(z)) :- \mathsf{sum}(x, y, z).$

our goal $?- \mathsf{sum}(\mathsf{s}(0), n, \mathsf{s}(\mathsf{s}(\mathsf{s}(0)))).$

$$\{\mathsf{sum}(\mathsf{s}(0), n, \mathsf{s}(\mathsf{s}(\mathsf{s}(0)))) \stackrel{?}{=} \mathsf{sum}(0, y', y')\}$$

$$\mathsf{sum}(\mathsf{s}(0), n, \mathsf{s}(\mathsf{s}(\mathsf{s}(0))))$$

1+n=3?

our goal $?- \mathsf{sum}(\mathsf{s}(0), n, \mathsf{s}(\mathsf{s}(\mathsf{s}(0)))).$

L

$\mathsf{sum}(0, y, y).$

$\mathsf{sum}(\mathsf{s}(x), y, \mathsf{s}(z)) :- \mathsf{sum}(x, y, z).$

$\{\mathsf{sum}(\mathsf{s}(0), n, \mathsf{s}(\mathsf{s}(\mathsf{s}(0)))) \stackrel{?}{=} \mathsf{sum}(0, y', y')\}$ fails

$\mathsf{sum}(\mathsf{s}(0), n, \mathsf{s}(\mathsf{s}(\mathsf{s}(0))))$

1+n=3?

our goal $\quad ?\!-\ \mathsf{sum}(\mathsf{s}(0), n, \mathsf{s}(\mathsf{s}(\mathsf{s}(0)))).$

L

$\mathsf{sum}(0, y, y).$

$\mathsf{sum}(\mathsf{s}(x), y, \mathsf{s}(z)) :\!-\ \mathsf{sum}(x, y, z).$

$\{\mathsf{sum}(\mathsf{s}(0), n, \mathsf{s}(\mathsf{s}(\mathsf{s}(0)))) \stackrel{?}{=} \mathsf{sum}(0, y', y')\}$ fails

$\{\mathsf{sum}(\mathsf{s}(0), n, \mathsf{s}(\mathsf{s}(\mathsf{s}(0)))) \stackrel{?}{=} \mathsf{sum}(\mathsf{s}(x_1), y_1, \mathsf{s}(z_1))\}$

$\mathsf{sum}(\mathsf{s}(0), n, \mathsf{s}(\mathsf{s}(\mathsf{s}(0))))$

1+n=3?

our goal $\quad ?-\ \mathsf{sum}(\mathsf{s}(0), n, \mathsf{s}(\mathsf{s}(\mathsf{s}(0)))).$

L

$\mathsf{sum}(0, y, y).$

$\mathsf{sum}(\mathsf{s}(x), y, \mathsf{s}(z)) :-\ \mathsf{sum}(x, y, z).$

$\{\mathsf{sum}(\mathsf{s}(0), n, \mathsf{s}(\mathsf{s}(\mathsf{s}(0)))) \stackrel{?}{=} \mathsf{sum}(0, y', y')\}$ fails

$\{\mathsf{sum}(\mathsf{s}(0), n, \mathsf{s}(\mathsf{s}(\mathsf{s}(0)))) \stackrel{?}{=} \mathsf{sum}(\mathsf{s}(x_1), y_1, \mathsf{s}(z_1))\}$ succeeds

$\mathsf{sum}(\mathsf{s}(0), n, \mathsf{s}(\mathsf{s}(\mathsf{s}(0))))$

1+n=3?

our goal $?- \mathsf{sum}(\mathsf{s}(0), n, \mathsf{s}(\mathsf{s}(\mathsf{s}(0)))).$

L

$\mathsf{sum}(0, y, y).$

$\mathsf{sum}(\mathsf{s}(x), y, \mathsf{s}(z)) :- \mathsf{sum}(x, y, z).$

$\{\mathsf{sum}(\mathsf{s}(0), n, \mathsf{s}(\mathsf{s}(\mathsf{s}(0)))) \stackrel{?}{=} \mathsf{sum}(0, y', y')\}$ fails

$\{\mathsf{sum}(\mathsf{s}(0), n, \mathsf{s}(\mathsf{s}(\mathsf{s}(0)))) \stackrel{?}{=} \mathsf{sum}(\mathsf{s}(x_1), y_1, \mathsf{s}(z_1))\}$ succeeds

$$\sigma_1 = [x_1 = 0\,,\ y_1 = n\,,\ z_1 = \mathsf{s}(\mathsf{s}(0))]$$

$\mathsf{sum}(\mathsf{s}(0), n, \mathsf{s}(\mathsf{s}(\mathsf{s}(0))))$

1+n=3?

our goal $?- \mathsf{sum}(\mathsf{s}(0), n, \mathsf{s}(\mathsf{s}(\mathsf{s}(0)))).$

L

$\mathsf{sum}(0, y, y).$

$\mathsf{sum}(\mathsf{s}(x), y, \mathsf{s}(z)) :- \mathsf{sum}(x, y, z).$

$\{\mathsf{sum}(\mathsf{s}(0), n, \mathsf{s}(\mathsf{s}(\mathsf{s}(0)))) \stackrel{?}{=} \mathsf{sum}(0, y', y')\}$ fails

$\{\mathsf{sum}(\mathsf{s}(0), n, \mathsf{s}(\mathsf{s}(\mathsf{s}(0)))) \stackrel{?}{=} \mathsf{sum}(\mathsf{s}(x_1), y_1, \mathsf{s}(z_1))\}$ succeeds

$$\sigma_1 = [x_1 = 0\,,\ y_1 = n\,,\ z_1 = \mathsf{s}(\mathsf{s}(0))]$$

$$\widehat{\sigma}_1 = [\ ]$$

$\mathsf{sum}(\mathsf{s}(0), n, \mathsf{s}(\mathsf{s}(\mathsf{s}(0))))$

1+n=3?

L

$\mathsf{sum}(0, y, y).$

$\mathsf{sum}(\mathsf{s}(x), y, \mathsf{s}(z)) :\!- \mathsf{sum}(x, y, z).$

our goal $\quad ?\!- \mathsf{sum}(\mathsf{s}(0), n, \mathsf{s}(\mathsf{s}(\mathsf{s}(0)))).$

$\{\mathsf{sum}(\mathsf{s}(0), n, \mathsf{s}(\mathsf{s}(\mathsf{s}(0)))) \stackrel{?}{=} \mathsf{sum}(0, y', y')\}$ fails

$\{\mathsf{sum}(\mathsf{s}(0), n, \mathsf{s}(\mathsf{s}(\mathsf{s}(0)))) \stackrel{?}{=} \mathsf{sum}(\mathsf{s}(x_1), y_1, \mathsf{s}(z_1))\}$ succeeds

$$\sigma_1 = [x_1 = 0\,,\ y_1 = n\,,\ z_1 = \mathsf{s}(\mathsf{s}(0))]$$

$$\widehat{\sigma}_1 = [\,]$$

$\widehat{\sigma}_1 = [\,]$

$$\mathsf{sum}(\mathsf{s}(0), n, \mathsf{s}(\mathsf{s}(\mathsf{s}(0)))) \ \nwarrow_{\widehat{\sigma}_1} \ (\,\mathsf{sum}(x_1, y_1, z_1)\,)\sigma_1$$

1+n=3?

our goal $?- \mathsf{sum}(\mathsf{s}(0), n, \mathsf{s}(\mathsf{s}(\mathsf{s}(0)))).$

L

$\mathsf{sum}(0, y, y).$

$\mathsf{sum}(\mathsf{s}(x), y, \mathsf{s}(z)) :- \mathsf{sum}(x, y, z).$

$\{\mathsf{sum}(\mathsf{s}(0), n, \mathsf{s}(\mathsf{s}(\mathsf{s}(0)))) \stackrel{?}{=} \mathsf{sum}(0, y', y')\}$ fails

$\{\mathsf{sum}(\mathsf{s}(0), n, \mathsf{s}(\mathsf{s}(\mathsf{s}(0)))) \stackrel{?}{=} \mathsf{sum}(\mathsf{s}(x_1), y_1, \mathsf{s}(z_1))\}$ succeeds

$$\sigma_1 = [x_1 = 0\,,\ y_1 = n\,,\ z_1 = \mathsf{s}(\mathsf{s}(0))]$$

$$\widehat{\sigma}_1 = [\ ]$$

$\widehat{\sigma}_1 = [\ ]$

$$\mathsf{sum}(\mathsf{s}(0), n, \mathsf{s}(\mathsf{s}(\mathsf{s}(0)))) \ \nwarrow_{\widehat{\sigma}_1} \ (\,\mathsf{sum}(x_1, y_1, z_1)\,)\sigma_1$$

$$= \mathsf{sum}(0, n, \mathsf{s}(\mathsf{s}(0)))$$

0+n=2?

our new goal

$$\mathsf{sum}(0, n, \mathsf{s}(\mathsf{s}(0)))$$

L

$\mathsf{sum}(0, y, y).$

$\mathsf{sum}(\mathsf{s}(x), y, \mathsf{s}(z)) \mathrel{:-} \mathsf{sum}(x, y, z).$

$\widehat{\sigma}_1 = [\,]$

$$\mathsf{sum}(\mathsf{s}(0), n, \mathsf{s}(\mathsf{s}(\mathsf{s}(0)))) \quad \nwarrow \widehat{\sigma}_1 \quad \mathsf{sum}(0, n, \mathsf{s}(\mathsf{s}(0)))$$

0+n=2?

our new goal

$$\mathsf{sum}(0, n, \mathsf{s}(\mathsf{s}(0)))$$

L

$\mathsf{sum}(0, y, y).$

$\mathsf{sum}(\mathsf{s}(x), y, \mathsf{s}(z)) :- \mathsf{sum}(x, y, z).$

$$\{\mathsf{sum}(0, n, \mathsf{s}(\mathsf{s}(0))) \stackrel{?}{=} \mathsf{sum}(0, y_2, y_2)\}$$

$\widehat{\sigma}_1 = [\,]$

$$\mathsf{sum}(\mathsf{s}(0), n, \mathsf{s}(\mathsf{s}(\mathsf{s}(0)))) \quad \nwarrow_{\widehat{\sigma}_1} \quad \mathsf{sum}(0, n, \mathsf{s}(\mathsf{s}(0)))$$

0+n=2?

our new goal

$$\mathsf{sum}(0, n, \mathsf{s}(\mathsf{s}(0)))$$

L

$\mathsf{sum}(0, y, y).$

$\mathsf{sum}(\mathsf{s}(x), y, \mathsf{s}(z)) :\!- \mathsf{sum}(x, y, z).$

$$\{\mathsf{sum}(0, n, \mathsf{s}(\mathsf{s}(0))) \stackrel{?}{=} \mathsf{sum}(0, y_2, y_2)\}$$

succeeds

$\widehat{\sigma}_1 = [\,]$

$$\mathsf{sum}(\mathsf{s}(0), n, \mathsf{s}(\mathsf{s}(\mathsf{s}(0)))) \;\nwarrow_{\widehat{\sigma}_1}\; \mathsf{sum}(0, n, \mathsf{s}(\mathsf{s}(0)))$$

0+n=2?

our new goal

$$\mathsf{sum}(0, n, \mathsf{s}(\mathsf{s}(0)))$$

L

$\mathsf{sum}(0, y, y).$

$\mathsf{sum}(\mathsf{s}(x), y, \mathsf{s}(z)) :\!- \mathsf{sum}(x, y, z).$

$$\{\mathsf{sum}(0, n, \mathsf{s}(\mathsf{s}(0))) \stackrel{?}{=} \mathsf{sum}(0, y_2, y_2)\}$$

succeeds

$$\sigma_2 = [y_2 = \mathsf{s}(\mathsf{s}(0))\ ,\ n = \mathsf{s}(\mathsf{s}(0))]$$

$\widehat{\sigma}_1 = [\,]$

$$\mathsf{sum}(\mathsf{s}(0), n, \mathsf{s}(\mathsf{s}(\mathsf{s}(0)))) \ \nwarrow_{\widehat{\sigma}_1}\ \mathsf{sum}(0, n, \mathsf{s}(\mathsf{s}(0)))$$

0+n=2?

our new goal

$$\mathsf{sum}(0, n, \mathsf{s}(\mathsf{s}(0)))$$

L

$\mathsf{sum}(0, y, y).$

$\mathsf{sum}(\mathsf{s}(x), y, \mathsf{s}(z)) :\!- \mathsf{sum}(x, y, z).$

$$\{\mathsf{sum}(0, n, \mathsf{s}(\mathsf{s}(0))) \stackrel{?}{=} \mathsf{sum}(0, y_2, y_2)\}$$

succeeds

$$\sigma_2 = [y_2 = \mathsf{s}(\mathsf{s}(0))\ ,\ n = \mathsf{s}(\mathsf{s}(0))]$$

$$\widehat{\sigma}_2 = [n = \mathsf{s}(\mathsf{s}(0))]$$

$\widehat{\sigma}_1 = [\,]$

$$\mathsf{sum}(\mathsf{s}(0), n, \mathsf{s}(\mathsf{s}(\mathsf{s}(0)))) \quad \nwarrow_{\widehat{\sigma}_1} \quad \mathsf{sum}(0, n, \mathsf{s}(\mathsf{s}(0)))$$

0+n=2?

our new goal

$$\mathsf{sum}(0, n, \mathsf{s}(\mathsf{s}(0)))$$

L

$\mathsf{sum}(0, y, y).$

$\mathsf{sum}(\mathsf{s}(x), y, \mathsf{s}(z)) :- \mathsf{sum}(x, y, z).$

$$\{\mathsf{sum}(0, n, \mathsf{s}(\mathsf{s}(0))) \stackrel{?}{=} \mathsf{sum}(0, y_2, y_2)\}$$

succeeds

$$\sigma_2 = [y_2 = \mathsf{s}(\mathsf{s}(0)) \,,\; n = \mathsf{s}(\mathsf{s}(0))]$$

$$\widehat{\sigma}_2 = [n = \mathsf{s}(\mathsf{s}(0))]$$

$$\mathsf{sum}(\mathsf{s}(0), n, \mathsf{s}(\mathsf{s}(\mathsf{s}(0)))) \;\nwarrow_{\widehat{\sigma}_1}\; \mathsf{sum}(0, n, \mathsf{s}(\mathsf{s}(0)))$$

$$\nwarrow_{\widehat{\sigma}_2}\; \square$$

$\widehat{\sigma}_1 = [\,]$

$\widehat{\sigma}_2 = [n = \mathsf{s}(\mathsf{s}(0))]$

0+n=2?

our new goal

$$\mathsf{sum}(0, n, \mathsf{s}(\mathsf{s}(0)))$$

L

$\mathsf{sum}(0, y, y).$

$\mathsf{sum}(\mathsf{s}(x), y, \mathsf{s}(z)) :- \mathsf{sum}(x, y, z).$

$$\{\mathsf{sum}(0, n, \mathsf{s}(\mathsf{s}(0))) \stackrel{?}{=} \mathsf{sum}(0, y_2, y_2)\}$$

succeeds

$$\sigma_2 = [y_2 = \mathsf{s}(\mathsf{s}(0)) \;, \; n = \mathsf{s}(\mathsf{s}(0))]$$

$$\widehat{\sigma}_2 = [n = \mathsf{s}(\mathsf{s}(0))]$$

$\widehat{\sigma}_1 = [\;]$

$\widehat{\sigma}_2 = [n = \mathsf{s}(\mathsf{s}(0))]$

$$\mathsf{sum}(\mathsf{s}(0), n, \mathsf{s}(\mathsf{s}(\mathsf{s}(0)))) \;\nwarrow_{\widehat{\sigma}_1}\; \mathsf{sum}(0, n, \mathsf{s}(\mathsf{s}(0)))$$

$$\nwarrow_{\widehat{\sigma}_2}\; \square$$

$$\widehat{\sigma}_1 \cdot \widehat{\sigma}_2 = [n = \mathsf{s}(\mathsf{s}(0))]$$

0+n=2?

our new goal

$$\mathsf{sum}(0, n, \mathsf{s}(\mathsf{s}(0)))$$

L

$\mathsf{sum}(0, y, y).$

$\mathsf{sum}(\mathsf{s}(x), y, \mathsf{s}(z)) :\!-\ \mathsf{sum}(x, y, z).$

$$\{\mathsf{sum}(0, n, \mathsf{s}(\mathsf{s}(0))) \stackrel{?}{=} \mathsf{sum}(0, y_2, y_2)\}$$

succeeds

$$\sigma_2 = [y_2 = \mathsf{s}(\mathsf{s}(0))\ ,\ n = \mathsf{s}(\mathsf{s}(0))]$$

$$\widehat{\sigma}_2 = [n = \mathsf{s}(\mathsf{s}(0))]$$

$\widehat{\sigma}_1 = [\,]$

$\widehat{\sigma}_2 = [n = \mathsf{s}(\mathsf{s}(0))]$

$$\mathsf{sum}(\mathsf{s}(0), n, \mathsf{s}(\mathsf{s}(\mathsf{s}(0)))) \ \nwarrow_{\widehat{\sigma}_1}\ \mathsf{sum}(0, n, \mathsf{s}(\mathsf{s}(0)))$$

$$\nwarrow_{\widehat{\sigma}_2}\ \square$$

$$(1 + n = 3) \Rightarrow n = 2\ !$$

$$\widehat{\sigma}_1 \cdot \widehat{\sigma}_2 = [n = \mathsf{s}(\mathsf{s}(0))]$$

Jumping creatures

Assuming that:

1. All jumping creatures are green
2. All small jumping creatures are Martians
3. All green Martians are intelligent
4. Ngtrks is small and green
5. Pgvdrk is a jumping Martian

Who is intelligent?

Jumping creatures

Assuming that:

1. All jumping creatures are green
2. All small jumping creatures are Martians
3. All green Martians are intelligent
4. Ngtrks is small and green
5. Pgvdrk is a jumping Martian

Who is intelligent?

```
green(X) :- jumping(X) .
martian(X) :- small(X) , jumping(X) .
intelligent(X) :- green(X) , martian(X) .
small(ngtrks) .
green(ngtrks) .
jumping(pgvdrk) .
martian(pgvdrk).
```

Jumping creatures

Assuming that:

1. All jumping creatures are green
2. All small jumping creatures are Martians
3. All green Martians are intelligent
4. Ngtrks is small and green
5. Pgvdrk is a jumping Martian

Who is intelligent?

```
green(X) :- jumping(X) .
martian(X) :- small(X) , jumping(X) .
intelligent(X) :- green(X) , martian(X) .
small(ngtrks) .
green(ngtrks) .
jumping(pgvdrk) .
martian(pgvdrk).
```

$?-$ intelligent(W).

Jumping creatures

Assuming that:

1. All jumping creatures are green
2. All small jumping creatures are Martians
3. All green Martians are intelligent
4. Ngtrks is small and green
5. Pgvdrk is a jumping Martian

Who is intelligent?

```
green(X) :- jumping(X) .
martian(X) :- small(X) , jumping(X) .
intelligent(X) :- green(X) , martian(X) .
small(ngtrks) .
green(ngtrks) .
jumping(pgvdrk) .
martian(pgvdrk).
```

$?-$ intelligent(W).

intelligent(W)

Jumping creatures

Assuming that:

1. All jumping creatures are green
2. All small jumping creatures are Martians
3. All green Martians are intelligent
4. Ngtrks is small and green
5. Pgvdrk is a jumping Martian

Who is intelligent?

```
green(X) :- jumping(X) .
martian(X) :- small(X) , jumping(X) .
intelligent(X) :- green(X) , martian(X) .
small(ngtrks) .
green(ngtrks) .
jumping(pgvdrk) .
martian(pgvdrk).
```

$?-$ intelligent(W).

intelligent(W)

$\nwarrow$ green(W) , martian(W)

Jumping creatures

Assuming that:

1. All jumping creatures are green
2. All small jumping creatures are Martians
3. All green Martians are intelligent
4. Ngtrks is small and green
5. Pgvdrk is a jumping Martian

Who is intelligent?

```
green(X) :- jumping(X) .
martian(X) :- small(X) , jumping(X) .
intelligent(X) :- green(X) , martian(X) .
small(ngtrks) .
green(ngtrks) .
jumping(pgvdrk) .
martian(pgvdrk).
```

$?-$ intelligent(W).

intelligent(W)

$\nwarrow$ green(W) , martian(W)

$\nwarrow$ jumping(W) , martian(W)

Jumping creatures

Assuming that:

1. All jumping creatures are green
2. All small jumping creatures are Martians
3. All green Martians are intelligent
4. Ngtrks is small and green
5. Pgvdrk is a jumping Martian

Who is intelligent?

```
green(X) :- jumping(X) .
martian(X) :- small(X) , jumping(X) .
intelligent(X) :- green(X) , martian(X) .
small(ngtrks) .
green(ngtrks) .
jumping(pgvdrk) .
martian(pgvdrk).
```

$?-$ intelligent(W).

intelligent(W)

$\nwarrow$ green(W) , martian(W)

$\nwarrow$ jumping(W) , martian(W)

$[W = \text{pgvdrk}]$

Jumping creatures

Assuming that:

1. All jumping creatures are green
2. All small jumping creatures are Martians
3. All green Martians are intelligent
4. Ngtrks is small and green
5. Pgvdrk is a jumping Martian

Who is intelligent?

```
green(X) :- jumping(X) .
martian(X) :- small(X) , jumping(X) .
intelligent(X) :- green(X) , martian(X) .
small(ngtrks) .
green(ngtrks) .
jumping(pgvdrk) .
martian(pgvdrk).
```

$?-$ intelligent(W).

intelligent(W)

$\nwarrow$ green(W) , martian(W)

$\nwarrow$ jumping(W) , martian(W)

$\nwarrow$ martian(pgvdrk)

$[W = \text{pgvdrk}]$

Jumping creatures

Assuming that:

1. All jumping creatures are green
2. All small jumping creatures are Martians
3. All green Martians are intelligent
4. Ngtrks is small and green
5. Pgvdrk is a jumping Martian

Who is intelligent?

```
green(X) :- jumping(X) .
martian(X) :- small(X) , jumping(X) .
intelligent(X) :- green(X) , martian(X) .
small(ngtrks) .
green(ngtrks) .
jumping(pgvdrk) .
martian(pgvdrk).
```

$?-$ intelligent(W).

intelligent(W)

$\nwarrow$ green(W) , martian(W)

$\nwarrow$ jumping(W) , martian(W)

$\nwarrow$ martian(pgvdrk)

$\nwarrow$ $\square$ $\qquad$ [W = pgvdrk]

Jumping creatures

Assuming that:

1. All jumping creatures are green
2. All small jumping creatures are Martians
3. All green Martians are intelligent
4. Ngtrks is small and green
5. Pgvdrk is a jumping Martian

Who is intelligent?

```
green(X) :- jumping(X) .
martian(X) :- small(X) , jumping(X) .
intelligent(X) :- green(X) , martian(X) .
small(ngtrks) .
green(ngtrks) .
jumping(pgvdrk) .
martian(pgvdrk).
```

$?-$ intelligent(W).

intelligent(W)

$\nwarrow$ green(W) , martian(W)

$\nwarrow$ jumping(W) , martian(W)

$\nwarrow$ martian(pgvdrk)

$\nwarrow$ $\square$ $\quad$ [W = pgvdrk]

intelligent(W)

Jumping creatures

Assuming that:

1. All jumping creatures are green
2. All small jumping creatures are Martians
3. All green Martians are intelligent
4. Ngtrks is small and green
5. Pgvdrk is a jumping Martian

Who is intelligent?

```
green(X) :- jumping(X) .
martian(X) :- small(X) , jumping(X) .
intelligent(X) :- green(X) , martian(X) .
small(ngtrks) .
green(ngtrks) .
jumping(pgvdrk) .
martian(pgvdrk).
```

$?-$ intelligent(W).

intelligent(W)

$\nwarrow$ green(W), martian(W)

$\nwarrow$ jumping(W), martian(W)

$\nwarrow$ martian(pgvdrk)

$\nwarrow$ $\square$ [W = pgvdrk]

intelligent(W)

$\nwarrow$ green(W), martian(W)

Jumping creatures

Assuming that:

1. All jumping creatures are green
2. All small jumping creatures are Martians
3. All green Martians are intelligent
4. Ngtrks is small and green
5. Pgvdrk is a jumping Martian

Who is intelligent?

```
green(X) :- jumping(X) .
martian(X) :- small(X) , jumping(X) .
intelligent(X) :- green(X) , martian(X) .
small(ngtrks) .
green(ngtrks) .
jumping(pgvdrk) .
martian(pgvdrk).
```

$?-$ intelligent(W).

intelligent(W)

$\nwarrow$ green(W) , martian(W)

$\nwarrow$ jumping(W) , martian(W)

$\nwarrow$ martian(pgvdrk)

$\nwarrow$ $\square$ [W = pgvdrk]

intelligent(W)

$\nwarrow$ green(W) , martian(W)

$\nwarrow$ martian(ngtrks)

[W = ngtrks]

Jumping creatures

Assuming that:

1. All jumping creatures are green
2. All small jumping creatures are Martians
3. All green Martians are intelligent
4. Ngtrks is small and green
5. Pgvdrk is a jumping Martian

Who is intelligent?

```
green(X) :- jumping(X) .
martian(X) :- small(X) , jumping(X) .
intelligent(X) :- green(X) , martian(X) .
small(ngtrks) .
green(ngtrks) .
jumping(pgvdrk) .
martian(pgvdrk).
```

$?-$ intelligent(W).

intelligent(W)

$\nwarrow$ green(W) , martian(W)

$\nwarrow$ jumping(W) , martian(W)

$\nwarrow$ martian(pgvdrk)

$\nwarrow \square$ $[W = \text{pgvdrk}]$

intelligent(W)

$\nwarrow$ green(W) , martian(W)

$\nwarrow$ martian(ngtrks)

$\nwarrow$ small(ngtrks) , jumping(ngtrks)

$[W = \text{ngtrks}]$

Jumping creatures

Assuming that:

1. All jumping creatures are green
2. All small jumping creatures are Martians
3. All green Martians are intelligent
4. Ngtrks is small and green
5. Pgvdrk is a jumping Martian

Who is intelligent?

```
green(X) :- jumping(X) .
martian(X) :- small(X) , jumping(X) .
intelligent(X) :- green(X) , martian(X) .
small(ngtrks) .
green(ngtrks) .
jumping(pgvdrk) .
martian(pgvdrk).
```

$?-$ intelligent(W).

intelligent(W)

$\nwarrow$ green(W) , martian(W)

$\nwarrow$ jumping(W) , martian(W)

$\nwarrow$ martian(pgvdrk)

$\nwarrow$ $\square$ [W = pgvdrk]

intelligent(W)

$\nwarrow$ green(W) , martian(W)

$\nwarrow$ martian(ngtrks)

$\nwarrow$ small(ngtrks) , jumping(ngtrks)

$\nwarrow$ jumping(ngtrks) [W = ngtrks]

Jumping creatures

Assuming that:

1. All jumping creatures are green
2. All small jumping creatures are Martians
3. All green Martians are intelligent
4. Ngtrks is small and green
5. Pgvdrk is a jumping Martian

Who is intelligent?

```
green(X) :- jumping(X) .
martian(X) :- small(X) , jumping(X) .
intelligent(X) :- green(X) , martian(X) .
small(ngtrks) .
green(ngtrks) .
jumping(pgvdrk) .
martian(pgvdrk).
```

$?-$ intelligent(W).

intelligent(W)
$\leftarrow$ green(W) , martian(W)
$\leftarrow$ jumping(W) , martian(W)
$\leftarrow$ martian(pgvdrk)
$\leftarrow \square$ $[W = \text{pgvdrk}]$

intelligent(W)
$\leftarrow$ green(W) , martian(W)
$\leftarrow$ martian(ngtrks)
$\leftarrow$ small(ngtrks) , jumping(ngtrks)
$\leftarrow$ jumping(ngtrks) $[W = \text{ngtrks}]$
fail!

Some exercises
(logic programming)

$$\mathsf{sum}(x, \mathsf{s}(0), \mathsf{s}(\mathsf{s}(0)))$$

```
sum(0,y,y) .
sum(s(x),y,s(z)) :- sum(x,y,z) .
```

$$\mathsf{sum}(x, \mathsf{s}(0), \mathsf{s}(\mathsf{s}(0)))$$

```
sum(0,y,y) .
sum(s(x),y,s(z)) :- sum(x,y,z) .
```

$$\mathsf{sum}(x, \mathsf{s}(0), \mathsf{s}(\mathsf{s}(0))) \qquad \sigma_1 = [x = \mathsf{s}(x_1), y_1 = \mathsf{s}(0), z_1 = \mathsf{s}(0)]$$

```
sum(0,y,y) .
sum(s(x),y,s(z)) :- sum(x,y,z) .
```

$$\mathsf{sum}(x, \mathsf{s}(0), \mathsf{s}(\mathsf{s}(0))) \qquad \sigma_1 = [x = \mathsf{s}(x_1), y_1 = \mathsf{s}(0), z_1 = \mathsf{s}(0)]$$

```
sum(0,y,y) .
sum(s(x),y,s(z)) :- sum(x,y,z) .
```

$\mathsf{sum}(x, \mathsf{s}(0), \mathsf{s}(\mathsf{s}(0)))$ $\qquad \sigma_1 = [\boxed{x = \mathsf{s}(x_1)}, y_1 = \mathsf{s}(0), z_1 = \mathsf{s}(0)]$

$\nwarrow_{\widehat{\sigma}_1} \mathsf{sum}(x_1, \mathsf{s}(0), \mathsf{s}(0))$

```
sum(0,y,y) .
sum(s(x),y,s(z)) :- sum(x,y,z) .
```

$$\mathsf{sum}(x, \mathsf{s}(0), \mathsf{s}(\mathsf{s}(0))) \qquad \sigma_1 = [x = \mathsf{s}(x_1), y_1 = \mathsf{s}(0), z_1 = \mathsf{s}(0)]$$

$$\nwarrow_{\widehat{\sigma}_1} \mathsf{sum}(x_1, \mathsf{s}(0), \mathsf{s}(0)) \qquad \sigma_2 = [x_1 = 0, y_2 = \mathsf{s}(0)]$$

```
sum(0,y,y) .
sum(s(x),y,s(z)) :- sum(x,y,z) .
```

$\mathsf{sum}(x, \mathsf{s}(0), \mathsf{s}(\mathsf{s}(0))) \qquad \sigma_1 = [x = \mathsf{s}(x_1), y_1 = \mathsf{s}(0), z_1 = \mathsf{s}(0)]$

$\nwarrow_{\widehat{\sigma}_1} \mathsf{sum}(x_1, \mathsf{s}(0), \mathsf{s}(0)) \qquad \sigma_2 = [x_1 = 0, y_2 = \mathsf{s}(0)]$

```
sum(0,y,y) .
sum(s(x),y,s(z)) :- sum(x,y,z) .
```

$$\mathsf{sum}(x, \mathsf{s}(0), \mathsf{s}(\mathsf{s}(0))) \qquad \sigma_1 = [x = \mathsf{s}(x_1), y_1 = \mathsf{s}(0), z_1 = \mathsf{s}(0)]$$

$$\nwarrow_{\widehat{\sigma}_1} \mathsf{sum}(x_1, \mathsf{s}(0), \mathsf{s}(0)) \qquad \sigma_2 = [x_1 = 0, y_2 = \mathsf{s}(0)]$$

$$\nwarrow_{\widehat{\sigma}_2} \square$$

```
sum(0,y,y) .
sum(s(x),y,s(z)) :- sum(x,y,z) .
```

$$\mathsf{sum}(x, \mathsf{s}(0), \mathsf{s}(\mathsf{s}(0))) \qquad \sigma_1 = [x = \mathsf{s}(x_1), y_1 = \mathsf{s}(0), z_1 = \mathsf{s}(0)]$$

$$\nwarrow_{\widehat{\sigma}_1} \mathsf{sum}(x_1, \mathsf{s}(0), \mathsf{s}(0)) \qquad \sigma_2 = [x_1 = 0, y_2 = \mathsf{s}(0)]$$

$$\nwarrow_{\widehat{\sigma}_2} \square \qquad x = \mathsf{s}(0)$$

```
sum(0,y,y) .
sum(s(x),y,s(z)) :- sum(x,y,z) .
```

$\mathsf{sum}(x, \mathsf{s}(0), \mathsf{s}(\mathsf{s}(0)))$ $\qquad \sigma_1 = [x = \mathsf{s}(x_1), y_1 = \mathsf{s}(0), z_1 = \mathsf{s}(0)]$

$\nwarrow_{\widehat{\sigma}_1} \mathsf{sum}(x_1, \mathsf{s}(0), \mathsf{s}(0))$ $\qquad \sigma_2 = [x_1 = 0, y_2 = \mathsf{s}(0)]$

$\nwarrow_{\widehat{\sigma}_2} \square$

$$x = \mathsf{s}(0)$$

Alternatively:

```
sum(0,y,y) .
sum(s(x),y,s(z)) :- sum(x,y,z) .
```

$\mathsf{sum}(x, \mathsf{s}(0), \mathsf{s}(\mathsf{s}(0)))$ $\qquad \sigma_1 = [\boxed{x = \mathsf{s}(x_1)}, y_1 = \mathsf{s}(0), z_1 = \mathsf{s}(0)]$

$\nwarrow_{\widehat{\sigma}_1} \mathsf{sum}(x_1, \mathsf{s}(0), \mathsf{s}(0))$

Alternatively:

```
sum(0,y,y) .
sum(s(x),y,s(z)) :- sum(x,y,z) .
```

$\mathsf{sum}(x, \mathsf{s}(0), \mathsf{s}(\mathsf{s}(0)))$ $\qquad \sigma_1 = [x = \mathsf{s}(x_1), y_1 = \mathsf{s}(0), z_1 = \mathsf{s}(0)]$

$\nwarrow_{\widehat{\sigma}_1} \mathsf{sum}(x_1, \mathsf{s}(0), \mathsf{s}(0))$

Alternatively: $\qquad \sigma_2 = [x_1 = \mathsf{s}(x_2), y_2 = \mathsf{s}(0), z_2 = 0]$

```
sum(0,y,y) .
sum(s(x),y,s(z)) :- sum(x,y,z) .
```

$\mathsf{sum}(x, \mathsf{s}(0), \mathsf{s}(\mathsf{s}(0)))$ $\qquad \sigma_1 = [\boxed{x = \mathsf{s}(x_1)}, y_1 = \mathsf{s}(0), z_1 = \mathsf{s}(0)]$

$\nwarrow_{\widehat{\sigma}_1} \mathsf{sum}(x_1, \mathsf{s}(0), \mathsf{s}(0))$

Alternatively: $\qquad \sigma_2 = [\boxed{x_1 = \mathsf{s}(x_2)}, y_2 = \mathsf{s}(0), z_2 = 0]$

```
sum(0,y,y) .
sum(s(x),y,s(z)) :- sum(x,y,z) .
```

$\mathsf{sum}(x, \mathsf{s}(0), \mathsf{s}(\mathsf{s}(0)))$ $\qquad \sigma_1 = [x = \mathsf{s}(x_1), y_1 = \mathsf{s}(0), z_1 = \mathsf{s}(0)]$

$\nwarrow_{\widehat{\sigma}_1} \mathsf{sum}(x_1, \mathsf{s}(0), \mathsf{s}(0))$

Alternatively: $\qquad \sigma_2 = [x_1 = \mathsf{s}(x_2), y_2 = \mathsf{s}(0), z_2 = 0]$

$\nwarrow_{\widehat{\sigma}_2} \mathsf{sum}(x_2, \mathsf{s}(0), 0)$

```
sum(0,y,y) .
sum(s(x),y,s(z)) :- sum(x,y,z) .
```

$\mathsf{sum}(x, \mathsf{s}(0), \mathsf{s}(\mathsf{s}(0)))$ $\qquad \sigma_1 = [x = \mathsf{s}(x_1), y_1 = \mathsf{s}(0), z_1 = \mathsf{s}(0)]$

$\nwarrow_{\widehat{\sigma}_1} \mathsf{sum}(x_1, \mathsf{s}(0), \mathsf{s}(0))$

Alternatively: $\qquad \sigma_2 = [x_1 = \mathsf{s}(x_2), y_2 = \mathsf{s}(0), z_2 = 0]$

$\nwarrow_{\widehat{\sigma}_2} \mathsf{sum}(x_2, \mathsf{s}(0), 0)$

Fail!

[**Ex. 1**] Let $\Sigma_0 = \{0\}$ and $\Sigma_1 = \{\mathsf{s}\}$. Extend the logic program that defines the predicate $\mathsf{sum} \in \Pi_3$ (seen in classroom) to define:

1. a predicate $\mathsf{prod} \in \Pi_3$ for computing the product of two numbers;

2. a predicate $\mathsf{pow} \in \Pi_3$ for computing the power;

3. a predicate $\mathsf{div} \in \Pi_2$ for telling if the first argument divides the second.

1. a predicate $\mathsf{prod} \in \Pi_3$ for computing the product of two numbers;

```
sum(0,y,y) .
sum(s(x),y,s(z)) :- sum(x,y,z) .
```

$$0 + y = y$$

$$(x + 1) + y = (x + y) + 1$$

1. a predicate **prod** $\in \Pi_3$ for computing the product of two numbers;

```
sum(0,y,y) .
sum(s(x),y,s(z)) :- sum(x,y,z) .
```

$$0 + y = y$$

$$(x + 1) + y = (x + y) + 1$$

1

```
prod(0,y,0) .
prod(s(x),y,z) :- prod(x,y,w) , sum(w,y,z) .
```

1. a predicate **prod** $\in \Pi_3$ for computing the product of two numbers;

```
sum(0,y,y) .
sum(s(x),y,s(z)) :- sum(x,y,z) .
```

$$0 + y = y$$

$$(x + 1) + y = (x + y) + 1$$

$$0 \cdot y = 0$$

1

```
prod(0,y,0) .
prod(s(x),y,z) :- prod(x,y,w) , sum(w,y,z) .
```

1. a predicate **prod** $\in \Pi_3$ for computing the product of two numbers;

```
sum(0,y,y) .
sum(s(x),y,s(z)) :- sum(x,y,z) .
```

$0 + y = y$

$(x + 1) + y = (x + y) + 1$

$0 \cdot y = 0$

1

```
prod(0,y,0) .
prod(s(x),y,z) :- prod(x,y,w) , sum(w,y,z) .
```

$(x + 1) \cdot y = (x \cdot y) + y$

$$\mathsf{prod}(\mathsf{s}(\mathsf{s}(0)), y, \mathsf{s}(\mathsf{s}(0)))$$

```
sum(0,y,y) .
sum(s(x),y,s(z)) :- sum(x,y,z) .

prod(0,y,0) .
prod(s(x),y,z) :- prod(x,y,w) , sum(w,y,z) .
```

$$\mathsf{prod}(\mathsf{s}(\mathsf{s}(0)), y, \mathsf{s}(\mathsf{s}(0)))$$

```
sum(0,y,y) .
sum(s(x),y,s(z)) :- sum(x,y,z) .

prod(0,y,0) .
prod(s(x),y,z) :- prod(x,y,w) , sum(w,y,z) .
```

$\mathsf{prod}(\mathsf{s}(\mathsf{s}(0)), y, \mathsf{s}(\mathsf{s}(0)))$ $\sigma_1 = [x_1 = \mathsf{s}(0), y_1 = y, z_1 = \mathsf{s}(\mathsf{s}(0))]$

```
sum(0,y,y) .
sum(s(x),y,s(z)) :- sum(x,y,z) .

prod(0,y,0) .
prod(s(x),y,z) :- prod(x,y,w) , sum(w,y,z) .
```

$$\mathsf{prod}(\mathsf{s}(\mathsf{s}(0)), y, \mathsf{s}(\mathsf{s}(0))) \qquad \sigma_1 = [x_1 = \mathsf{s}(0), y_1 = y, z_1 = \mathsf{s}(\mathsf{s}(0))]$$

$$\nwarrow_{\widehat{\sigma}_1} \ \mathsf{prod}(\mathsf{s}(0), y, w_1), \mathsf{sum}(w_1, y, \mathsf{s}(\mathsf{s}(0)))$$

```
sum(0,y,y) .
sum(s(x),y,s(z)) :- sum(x,y,z) .

prod(0,y,0) .
prod(s(x),y,z) :- prod(x,y,w) , sum(w,y,z) .
```

$\mathsf{prod}(\mathsf{s}(\mathsf{s}(0)), y, \mathsf{s}(\mathsf{s}(0))) \qquad \sigma_1 = [x_1 = \mathsf{s}(0), y_1 = y, z_1 = \mathsf{s}(\mathsf{s}(0))]$

$\nwarrow_{\widehat{\sigma}_1} \; \mathsf{prod}(\mathsf{s}(0), y, w_1) , \mathsf{sum}(w_1, y, \mathsf{s}(\mathsf{s}(0)))$

$\sigma_2 = [x_2 = 0, y_2 = y, z_2 = w_1]$

```
sum(0,y,y) .
sum(s(x),y,s(z)) :- sum(x,y,z) .

prod(0,y,0) .
prod(s(x),y,z) :- prod(x,y,w) , sum(w,y,z) .
```

$\mathsf{prod}(\mathsf{s}(\mathsf{s}(0)), y, \mathsf{s}(\mathsf{s}(0))) \qquad \sigma_1 = [x_1 = \mathsf{s}(0), y_1 = y, z_1 = \mathsf{s}(\mathsf{s}(0))]$

$\nwarrow_{\widehat{\sigma}_1} \mathsf{prod}(\mathsf{s}(0), y, w_1), \mathsf{sum}(w_1, y, \mathsf{s}(\mathsf{s}(0)))$

$\sigma_2 = [x_2 = 0, y_2 = y, z_2 = w_1]$

$\nwarrow_{\widehat{\sigma}_2} \mathsf{prod}(0, y, w_2), \mathsf{sum}(w_2, y, w_1), \mathsf{sum}(w_1, y, \mathsf{s}(\mathsf{s}(0)))$

```
sum(0,y,y) .
sum(s(x),y,s(z)) :- sum(x,y,z) .

prod(0,y,0) .
prod(s(x),y,z) :- prod(x,y,w) , sum(w,y,z) .
```

$\mathsf{prod}(\mathsf{s}(\mathsf{s}(0)), y, \mathsf{s}(\mathsf{s}(0))) \qquad \sigma_1 = [x_1 = \mathsf{s}(0), y_1 = y, z_1 = \mathsf{s}(\mathsf{s}(0))]$

$\nwarrow_{\widehat{\sigma}_1} \mathsf{prod}(\mathsf{s}(0), y, w_1), \mathsf{sum}(w_1, y, \mathsf{s}(\mathsf{s}(0)))$

$\sigma_2 = [x_2 = 0, y_2 = y, z_2 = w_1]$

$\nwarrow_{\widehat{\sigma}_2} \mathsf{prod}(0, y, w_2), \mathsf{sum}(w_2, y, w_1), \mathsf{sum}(w_1, y, \mathsf{s}(\mathsf{s}(0)))$

$\sigma_3 = [y_3 = y, w_2 = 0]$

```
sum(0,y,y) .
sum(s(x),y,s(z)) :- sum(x,y,z) .

prod(0,y,0) .
prod(s(x),y,z) :- prod(x,y,w) , sum(w,y,z) .
```

$$\mathsf{prod}(\mathsf{s}(\mathsf{s}(0)), y, \mathsf{s}(\mathsf{s}(0))) \qquad \sigma_1 = [x_1 = \mathsf{s}(0), y_1 = y, z_1 = \mathsf{s}(\mathsf{s}(0))]$$

$$\nwarrow_{\widehat{\sigma}_1} \mathsf{prod}(\mathsf{s}(0), y, w_1), \mathsf{sum}(w_1, y, \mathsf{s}(\mathsf{s}(0)))$$

$$\sigma_2 = [x_2 = 0, y_2 = y, z_2 = w_1]$$

$$\nwarrow_{\widehat{\sigma}_2} \mathsf{prod}(0, y, w_2), \mathsf{sum}(w_2, y, w_1), \mathsf{sum}(w_1, y, \mathsf{s}(\mathsf{s}(0)))$$

$$\sigma_3 = [y_3 = y, \boxed{w_2 = 0}]$$

```
sum(0,y,y) .
sum(s(x),y,s(z)) :- sum(x,y,z) .

prod(0,y,0) .
prod(s(x),y,z) :- prod(x,y,w) , sum(w,y,z) .
```

$\mathsf{prod}(\mathsf{s}(\mathsf{s}(0)), y, \mathsf{s}(\mathsf{s}(0))) \qquad \sigma_1 = [x_1 = \mathsf{s}(0), y_1 = y, z_1 = \mathsf{s}(\mathsf{s}(0))]$

$\nwarrow_{\widehat{\sigma}_1} \mathsf{prod}(\mathsf{s}(0), y, w_1), \mathsf{sum}(w_1, y, \mathsf{s}(\mathsf{s}(0)))$

$\sigma_2 = [x_2 = 0, y_2 = y, z_2 = w_1]$

$\nwarrow_{\widehat{\sigma}_2} \mathsf{prod}(0, y, w_2), \mathsf{sum}(w_2, y, w_1), \mathsf{sum}(w_1, y, \mathsf{s}(\mathsf{s}(0)))$

$\sigma_3 = [y_3 = y, w_2 = 0]$

$\nwarrow_{\widehat{\sigma}_3} \mathsf{sum}(0, y, w_1), \mathsf{sum}(w_1, y, \mathsf{s}(\mathsf{s}(0)))$

```
sum(0,y,y) .
sum(s(x),y,s(z)) :- sum(x,y,z) .

prod(0,y,0) .
prod(s(x),y,z) :- prod(x,y,w) , sum(w,y,z) .
```

$\mathsf{prod}(\mathsf{s}(\mathsf{s}(0)), y, \mathsf{s}(\mathsf{s}(0))) \qquad \sigma_1 = [x_1 = \mathsf{s}(0), y_1 = y, z_1 = \mathsf{s}(\mathsf{s}(0))]$

$\nwarrow_{\widehat{\sigma}_1} \mathsf{prod}(\mathsf{s}(0), y, w_1), \mathsf{sum}(w_1, y, \mathsf{s}(\mathsf{s}(0)))$

$\sigma_2 = [x_2 = 0, y_2 = y, z_2 = w_1]$

$\nwarrow_{\widehat{\sigma}_2} \mathsf{prod}(0, y, w_2), \mathsf{sum}(w_2, y, w_1), \mathsf{sum}(w_1, y, \mathsf{s}(\mathsf{s}(0)))$

$\sigma_3 = [y_3 = y, w_2 = 0]$

$\nwarrow_{\widehat{\sigma}_3} \mathsf{sum}(0, y, w_1), \mathsf{sum}(w_1, y, \mathsf{s}(\mathsf{s}(0))) \qquad \sigma_4 = [w_1 = y, y_4 = y]$

```
sum(0,y,y) .
sum(s(x),y,s(z)) :- sum(x,y,z) .

prod(0,y,0) .
prod(s(x),y,z) :- prod(x,y,w) , sum(w,y,z) .
```

$\mathsf{prod}(\mathsf{s}(\mathsf{s}(0)), y, \mathsf{s}(\mathsf{s}(0)))$ $\qquad \sigma_1 = [x_1 = \mathsf{s}(0), y_1 = y, z_1 = \mathsf{s}(\mathsf{s}(0))]$

$\nwarrow_{\widehat{\sigma}_1}$ $\mathsf{prod}(\mathsf{s}(0), y, w_1)$, $\mathsf{sum}(w_1, y, \mathsf{s}(\mathsf{s}(0)))$

$\sigma_2 = [x_2 = 0, y_2 = y, z_2 = w_1]$

$\nwarrow_{\widehat{\sigma}_2}$ $\mathsf{prod}(0, y, w_2)$, $\mathsf{sum}(w_2, y, w_1)$, $\mathsf{sum}(w_1, y, \mathsf{s}(\mathsf{s}(0)))$

$\sigma_3 = [y_3 = y, \boxed{w_2 = 0}]$

$\nwarrow_{\widehat{\sigma}_3}$ $\mathsf{sum}(0, y, w_1)$, $\mathsf{sum}(w_1, y, \mathsf{s}(\mathsf{s}(0)))$ $\qquad \sigma_4 = [\boxed{w_1 = y}, y_4 = y]$

```
sum(0,y,y) .
sum(s(x),y,s(z)) :- sum(x,y,z) .

prod(0,y,0) .
prod(s(x),y,z) :- prod(x,y,w) , sum(w,y,z) .
```

$$\mathsf{prod}(\mathsf{s}(\mathsf{s}(0)), y, \mathsf{s}(\mathsf{s}(0))) \qquad \sigma_1 = [x_1 = \mathsf{s}(0), y_1 = y, z_1 = \mathsf{s}(\mathsf{s}(0))]$$

$$\nwarrow_{\widehat{\sigma}_1} \mathsf{prod}(\mathsf{s}(0), y, w_1), \mathsf{sum}(w_1, y, \mathsf{s}(\mathsf{s}(0)))$$

$$\sigma_2 = [x_2 = 0, y_2 = y, z_2 = w_1]$$

$$\nwarrow_{\widehat{\sigma}_2} \mathsf{prod}(0, y, w_2), \mathsf{sum}(w_2, y, w_1), \mathsf{sum}(w_1, y, \mathsf{s}(\mathsf{s}(0)))$$

$$\sigma_3 = [y_3 = y, w_2 = 0]$$

$$\nwarrow_{\widehat{\sigma}_3} \mathsf{sum}(0, y, w_1), \mathsf{sum}(w_1, y, \mathsf{s}(\mathsf{s}(0))) \qquad \sigma_4 = [w_1 = y, y_4 = y]$$

$$\nwarrow_{\widehat{\sigma}_4} \mathsf{sum}(y, y, \mathsf{s}(\mathsf{s}(0)))$$

```
sum(0,y,y) .
sum(s(x),y,s(z)) :- sum(x,y,z) .

prod(0,y,0) .
prod(s(x),y,z) :- prod(x,y,w) , sum(w,y,z) .
```

$\mathsf{prod}(\mathsf{s}(\mathsf{s}(0)), y, \mathsf{s}(\mathsf{s}(0))) \qquad \sigma_1 = [x_1 = \mathsf{s}(0), y_1 = y, z_1 = \mathsf{s}(\mathsf{s}(0))]$

$\nwarrow_{\widehat{\sigma}_1} \mathsf{prod}(\mathsf{s}(0), y, w_1), \mathsf{sum}(w_1, y, \mathsf{s}(\mathsf{s}(0)))$

$\sigma_2 = [x_2 = 0, y_2 = y, z_2 = w_1]$

$\nwarrow_{\widehat{\sigma}_2} \mathsf{prod}(0, y, w_2), \mathsf{sum}(w_2, y, w_1), \mathsf{sum}(w_1, y, \mathsf{s}(\mathsf{s}(0)))$

$\sigma_3 = [y_3 = y, \boxed{w_2 = 0}]$

$\nwarrow_{\widehat{\sigma}_3} \mathsf{sum}(0, y, w_1), \mathsf{sum}(w_1, y, \mathsf{s}(\mathsf{s}(0))) \qquad \sigma_4 = [\boxed{w_1 = y}, y_4 = y]$

$\nwarrow_{\widehat{\sigma}_4} \mathsf{sum}(y, y, \mathsf{s}(\mathsf{s}(0))) \qquad \sigma_5 = [y = \mathsf{s}(x_5), y_5 = \mathsf{s}(x_5), z_5 = \mathsf{s}(0)]$

```
sum(0,y,y) .
sum(s(x),y,s(z)) :- sum(x,y,z) .

prod(0,y,0) .
prod(s(x),y,z) :- prod(x,y,w) , sum(w,y,z) .
```

$$\mathsf{prod}(\mathsf{s}(\mathsf{s}(0)), y, \mathsf{s}(\mathsf{s}(0))) \qquad \sigma_1 = [x_1 = \mathsf{s}(0), y_1 = y, z_1 = \mathsf{s}(\mathsf{s}(0))]$$

$$\nwarrow_{\widehat{\sigma}_1} \mathsf{prod}(\mathsf{s}(0), y, w_1), \mathsf{sum}(w_1, y, \mathsf{s}(\mathsf{s}(0)))$$

$$\sigma_2 = [x_2 = 0, y_2 = y, z_2 = w_1]$$

$$\nwarrow_{\widehat{\sigma}_2} \mathsf{prod}(0, y, w_2), \mathsf{sum}(w_2, y, w_1), \mathsf{sum}(w_1, y, \mathsf{s}(\mathsf{s}(0)))$$

$$\sigma_3 = [y_3 = y, \boxed{w_2 = 0}]$$

$$\nwarrow_{\widehat{\sigma}_3} \mathsf{sum}(0, y, w_1), \mathsf{sum}(w_1, y, \mathsf{s}(\mathsf{s}(0))) \qquad \sigma_4 = [\boxed{w_1 = y}, y_4 = y]$$

$$\nwarrow_{\widehat{\sigma}_4} \mathsf{sum}(y, y, \mathsf{s}(\mathsf{s}(0))) \qquad \sigma_5 = [\boxed{y = \mathsf{s}(x_5)}, y_5 = \mathsf{s}(x_5), z_5 = \mathsf{s}(0)]$$

```
sum(0,y,y) .
sum(s(x),y,s(z)) :- sum(x,y,z) .

prod(0,y,0) .
prod(s(x),y,z) :- prod(x,y,w) , sum(w,y,z) .
```

$\mathsf{prod}(\mathsf{s}(\mathsf{s}(0)), y, \mathsf{s}(\mathsf{s}(0)))$ $\qquad \sigma_1 = [x_1 = \mathsf{s}(0), y_1 = y, z_1 = \mathsf{s}(\mathsf{s}(0))]$

$\nwarrow_{\widehat{\sigma}_1}$ $\mathsf{prod}(\mathsf{s}(0), y, w_1)$, $\mathsf{sum}(w_1, y, \mathsf{s}(\mathsf{s}(0)))$

$\sigma_2 = [x_2 = 0, y_2 = y, z_2 = w_1]$

$\nwarrow_{\widehat{\sigma}_2}$ $\mathsf{prod}(0, y, w_2)$, $\mathsf{sum}(w_2, y, w_1)$, $\mathsf{sum}(w_1, y, \mathsf{s}(\mathsf{s}(0)))$

$\sigma_3 = [y_3 = y, \boxed{w_2 = 0}]$

$\nwarrow_{\widehat{\sigma}_3}$ $\mathsf{sum}(0, y, w_1)$, $\mathsf{sum}(w_1, y, \mathsf{s}(\mathsf{s}(0)))$ $\qquad \sigma_4 = [\boxed{w_1 = y}, y_4 = y]$

$\nwarrow_{\widehat{\sigma}_4}$ $\mathsf{sum}(y, y, \mathsf{s}(\mathsf{s}(0)))$ $\qquad \sigma_5 = [\boxed{y = \mathsf{s}(x_5)}, y_5 = \mathsf{s}(x_5), z_5 = \mathsf{s}(0)]$

$\nwarrow_{\widehat{\sigma}_5}$ $\mathsf{sum}(x_5, \mathsf{s}(x_5), \mathsf{s}(0))$

```
sum(0,y,y) .
sum(s(x),y,s(z)) :- sum(x,y,z) .

prod(0,y,0) .
prod(s(x),y,z) :- prod(x,y,w) , sum(w,y,z) .
```

$\mathsf{prod}(\mathsf{s}(\mathsf{s}(0)), y, \mathsf{s}(\mathsf{s}(0)))$ $\qquad \sigma_1 = [x_1 = \mathsf{s}(0), y_1 = y, z_1 = \mathsf{s}(\mathsf{s}(0))]$

$\nwarrow_{\widehat{\sigma}_1}$ $\mathsf{prod}(\mathsf{s}(0), y, w_1), \mathsf{sum}(w_1, y, \mathsf{s}(\mathsf{s}(0)))$

$\sigma_2 = [x_2 = 0, y_2 = y, z_2 = w_1]$

$\nwarrow_{\widehat{\sigma}_2}$ $\mathsf{prod}(0, y, w_2), \mathsf{sum}(w_2, y, w_1), \mathsf{sum}(w_1, y, \mathsf{s}(\mathsf{s}(0)))$

$\sigma_3 = [y_3 = y, w_2 = 0]$

$\nwarrow_{\widehat{\sigma}_3}$ $\mathsf{sum}(0, y, w_1), \mathsf{sum}(w_1, y, \mathsf{s}(\mathsf{s}(0)))$ $\qquad \sigma_4 = [w_1 = y, y_4 = y]$

$\nwarrow_{\widehat{\sigma}_4}$ $\mathsf{sum}(y, y, \mathsf{s}(\mathsf{s}(0)))$ $\qquad \sigma_5 = [y = \mathsf{s}(x_5), y_5 = \mathsf{s}(x_5), z_5 = \mathsf{s}(0)]$

$\nwarrow_{\widehat{\sigma}_5}$ $\mathsf{sum}(x_5, \mathsf{s}(x_5), \mathsf{s}(0))$ $\qquad \sigma_6 = [x_5 = 0, y_6 = \mathsf{s}(0)]$

```
sum(0,y,y) .
sum(s(x),y,s(z)) :- sum(x,y,z) .

prod(0,y,0) .
prod(s(x),y,z) :- prod(x,y,w) , sum(w,y,z) .
```

$\mathsf{prod}(\mathsf{s}(\mathsf{s}(0)), y, \mathsf{s}(\mathsf{s}(0))) \qquad \sigma_1 = [x_1 = \mathsf{s}(0), y_1 = y, z_1 = \mathsf{s}(\mathsf{s}(0))]$

$\nwarrow_{\widehat{\sigma}_1} \mathsf{prod}(\mathsf{s}(0), y, w_1), \mathsf{sum}(w_1, y, \mathsf{s}(\mathsf{s}(0)))$

$\sigma_2 = [x_2 = 0, y_2 = y, z_2 = w_1]$

$\nwarrow_{\widehat{\sigma}_2} \mathsf{prod}(0, y, w_2), \mathsf{sum}(w_2, y, w_1), \mathsf{sum}(w_1, y, \mathsf{s}(\mathsf{s}(0)))$

$\sigma_3 = [y_3 = y, w_2 = 0]$

$\nwarrow_{\widehat{\sigma}_3} \mathsf{sum}(0, y, w_1), \mathsf{sum}(w_1, y, \mathsf{s}(\mathsf{s}(0))) \qquad \sigma_4 = [w_1 = y, y_4 = y]$

$\nwarrow_{\widehat{\sigma}_4} \mathsf{sum}(y, y, \mathsf{s}(\mathsf{s}(0))) \qquad \sigma_5 = [y = \mathsf{s}(x_5), y_5 = \mathsf{s}(x_5), z_5 = \mathsf{s}(0)]$

$\nwarrow_{\widehat{\sigma}_5} \mathsf{sum}(x_5, \mathsf{s}(x_5), \mathsf{s}(0)) \qquad \sigma_6 = [x_5 = 0, y_6 = \mathsf{s}(0)]$

```
sum(0,y,y) .
sum(s(x),y,s(z)) :- sum(x,y,z) .

prod(0,y,0) .
prod(s(x),y,z) :- prod(x,y,w) , sum(w,y,z) .
```

$\mathsf{prod}(\mathsf{s}(\mathsf{s}(0)), y, \mathsf{s}(\mathsf{s}(0)))$ $\quad \sigma_1 = [x_1 = \mathsf{s}(0), y_1 = y, z_1 = \mathsf{s}(\mathsf{s}(0))]$

$\nwarrow_{\widehat{\sigma}_1}$ $\mathsf{prod}(\mathsf{s}(0), y, w_1), \mathsf{sum}(w_1, y, \mathsf{s}(\mathsf{s}(0)))$

$\sigma_2 = [x_2 = 0, y_2 = y, z_2 = w_1]$

$\nwarrow_{\widehat{\sigma}_2}$ $\mathsf{prod}(0, y, w_2), \mathsf{sum}(w_2, y, w_1), \mathsf{sum}(w_1, y, \mathsf{s}(\mathsf{s}(0)))$

$\sigma_3 = [y_3 = y, w_2 = 0]$

$\nwarrow_{\widehat{\sigma}_3}$ $\mathsf{sum}(0, y, w_1), \mathsf{sum}(w_1, y, \mathsf{s}(\mathsf{s}(0)))$ $\quad \sigma_4 = [w_1 = y, y_4 = y]$

$\nwarrow_{\widehat{\sigma}_4}$ $\mathsf{sum}(y, y, \mathsf{s}(\mathsf{s}(0)))$ $\quad \sigma_5 = [y = \mathsf{s}(x_5), y_5 = \mathsf{s}(x_5), z_5 = \mathsf{s}(0)]$

$\nwarrow_{\widehat{\sigma}_5}$ $\mathsf{sum}(x_5, \mathsf{s}(x_5), \mathsf{s}(0))$ $\quad \sigma_6 = [x_5 = 0, y_6 = \mathsf{s}(0)]$

$\nwarrow_{\widehat{\sigma}_6}$ $\square$

```
sum(0,y,y) .
sum(s(x),y,s(z)) :- sum(x,y,z) .

prod(0,y,0) .
prod(s(x),y,z) :- prod(x,y,w) , sum(w,y,z) .
```

$$\mathsf{prod}(\mathsf{s}(\mathsf{s}(0)), y, \mathsf{s}(\mathsf{s}(0))) \qquad \sigma_1 = [x_1 = \mathsf{s}(0), y_1 = y, z_1 = \mathsf{s}(\mathsf{s}(0))]$$

$$\nwarrow_{\widehat{\sigma}_1} \mathsf{prod}(\mathsf{s}(0), y, w_1), \mathsf{sum}(w_1, y, \mathsf{s}(\mathsf{s}(0)))$$

$$\sigma_2 = [x_2 = 0, y_2 = y, z_2 = w_1]$$

$$\nwarrow_{\widehat{\sigma}_2} \mathsf{prod}(0, y, w_2), \mathsf{sum}(w_2, y, w_1), \mathsf{sum}(w_1, y, \mathsf{s}(\mathsf{s}(0)))$$

$$\sigma_3 = [y_3 = y, w_2 = 0]$$

$$\nwarrow_{\widehat{\sigma}_3} \mathsf{sum}(0, y, w_1), \mathsf{sum}(w_1, y, \mathsf{s}(\mathsf{s}(0))) \qquad \sigma_4 = [w_1 = y, y_4 = y]$$

$$\nwarrow_{\widehat{\sigma}_4} \mathsf{sum}(y, y, \mathsf{s}(\mathsf{s}(0))) \qquad \sigma_5 = [y = \mathsf{s}(x_5), y_5 = \mathsf{s}(x_5), z_5 = \mathsf{s}(0)]$$

$$\nwarrow_{\widehat{\sigma}_5} \mathsf{sum}(x_5, \mathsf{s}(x_5), \mathsf{s}(0)) \qquad \sigma_6 = [x_5 = 0, y_6 = \mathsf{s}(0)]$$

$$\nwarrow_{\widehat{\sigma}_6} \square \qquad y = \mathsf{s}(0)$$

```
sum(0,y,y) .
sum(s(x),y,s(z)) :- sum(x,y,z) .

prod(0,y,0) .
prod(s(x),y,z) :- prod(x,y,w) , sum(w,y,z) .
```

$\mathsf{prod}(\mathsf{s}(\mathsf{s}(0)), y, \mathsf{s}(\mathsf{s}(0))) \qquad \sigma_1 = [x_1 = \mathsf{s}(0), y_1 = y, z_1 = \mathsf{s}(\mathsf{s}(0))]$

$\nwarrow_{\widehat{\sigma}_1} \mathsf{prod}(\mathsf{s}(0), y, w_1), \mathsf{sum}(w_1, y, \mathsf{s}(\mathsf{s}(0)))$

$\sigma_2 = [x_2 = 0, y_2 = y, z_2 = w_1]$

$\nwarrow_{\widehat{\sigma}_2} \mathsf{prod}(0, y, w_2), \mathsf{sum}(w_2, y, w_1), \mathsf{sum}(w_1, y, \mathsf{s}(\mathsf{s}(0)))$

$\sigma_3 = [y_3 = y, w_2 = 0]$

$\nwarrow_{\widehat{\sigma}_3} \mathsf{sum}(0, y, w_1), \mathsf{sum}(w_1, y, \mathsf{s}(\mathsf{s}(0))) \qquad \sigma_4 = [w_1 = y, y_4 = y]$

$\nwarrow_{\widehat{\sigma}_4} \mathsf{sum}(y, y, \mathsf{s}(\mathsf{s}(0))) \qquad \sigma_5 = [y = \mathsf{s}(x_5), y_5 = \mathsf{s}(x_5), z_5 = \mathsf{s}(0)]$

$\nwarrow_{\widehat{\sigma}_5} \mathsf{sum}(x_5, \mathsf{s}(x_5), \mathsf{s}(0)) \qquad \sigma_6 = [x_5 = 0, y_6 = \mathsf{s}(0)]$

$\nwarrow_{\widehat{\sigma}_6} \square \qquad y = \mathsf{s}(0)$

Alternatively:

```
sum(0,y,y) .
sum(s(x),y,s(z)) :- sum(x,y,z) .

prod(0,y,0) .
prod(s(x),y,z) :- prod(x,y,w) , sum(w,y,z) .
```

$$\mathsf{prod}(\mathsf{s}(\mathsf{s}(0)), y, \mathsf{s}(\mathsf{s}(0))) \qquad \sigma_1 = [x_1 = \mathsf{s}(0), y_1 = y, z_1 = \mathsf{s}(\mathsf{s}(0))]$$

$$\nwarrow_{\widehat{\sigma}_1} \mathsf{prod}(\mathsf{s}(0), y, w_1), \mathsf{sum}(w_1, y, \mathsf{s}(\mathsf{s}(0)))$$

$$\sigma_2 = [x_2 = 0, y_2 = y, z_2 = w_1]$$

$$\nwarrow_{\widehat{\sigma}_2} \mathsf{prod}(0, y, w_2), \mathsf{sum}(w_2, y, w_1), \mathsf{sum}(w_1, y, \mathsf{s}(\mathsf{s}(0)))$$

$$\sigma_3 = [y_3 = y, w_2 = 0]$$

$$\nwarrow_{\widehat{\sigma}_3} \mathsf{sum}(0, y, w_1), \mathsf{sum}(w_1, y, \mathsf{s}(\mathsf{s}(0))) \qquad \sigma_4 = [w_1 = y, y_4 = y]$$

$$\nwarrow_{\widehat{\sigma}_4} \mathsf{sum}(y, y, \mathsf{s}(\mathsf{s}(0))) \qquad \sigma_5 = [y = \mathsf{s}(x_5), y_5 = \mathsf{s}(x_5), z_5 = \mathsf{s}(0)]$$

$$\nwarrow_{\widehat{\sigma}_5} \mathsf{sum}(x_5, \mathsf{s}(x_5), \mathsf{s}(0)) \quad \sigma_6 = [x_5 = \mathsf{s}(x_6), y_6 = \mathsf{s}(\mathsf{s}(x_6)), z_6 = 0]$$

```
sum(0,y,y) .
sum(s(x),y,s(z)) :- sum(x,y,z) .

prod(0,y,0) .
prod(s(x),y,z) :- prod(x,y,w) , sum(w,y,z) .
```

$\mathsf{prod}(\mathsf{s}(\mathsf{s}(0)), y, \mathsf{s}(\mathsf{s}(0))) \qquad \sigma_1 = [x_1 = \mathsf{s}(0), y_1 = y, z_1 = \mathsf{s}(\mathsf{s}(0))]$

$\nwarrow_{\widehat{\sigma}_1} \mathsf{prod}(\mathsf{s}(0), y, w_1), \mathsf{sum}(w_1, y, \mathsf{s}(\mathsf{s}(0)))$

$\sigma_2 = [x_2 = 0, y_2 = y, z_2 = w_1]$

$\nwarrow_{\widehat{\sigma}_2} \mathsf{prod}(0, y, w_2), \mathsf{sum}(w_2, y, w_1), \mathsf{sum}(w_1, y, \mathsf{s}(\mathsf{s}(0)))$

$\sigma_3 = [y_3 = y, w_2 = 0]$

$\nwarrow_{\widehat{\sigma}_3} \mathsf{sum}(0, y, w_1), \mathsf{sum}(w_1, y, \mathsf{s}(\mathsf{s}(0))) \qquad \sigma_4 = [w_1 = y, y_4 = y]$

$\nwarrow_{\widehat{\sigma}_4} \mathsf{sum}(y, y, \mathsf{s}(\mathsf{s}(0))) \qquad \sigma_5 = [y = \mathsf{s}(x_5), y_5 = \mathsf{s}(x_5), z_5 = \mathsf{s}(0)]$

$\nwarrow_{\widehat{\sigma}_5} \mathsf{sum}(x_5, \mathsf{s}(x_5), \mathsf{s}(0)) \quad \sigma_6 = [x_5 = \mathsf{s}(x_6), y_6 = \mathsf{s}(\mathsf{s}(x_6)), z_6 = 0]$

```
sum(0,y,y) .
sum(s(x),y,s(z)) :- sum(x,y,z) .

prod(0,y,0) .
prod(s(x),y,z) :- prod(x,y,w) , sum(w,y,z) .
```

$\mathsf{prod}(\mathsf{s}(\mathsf{s}(0)), y, \mathsf{s}(\mathsf{s}(0))) \qquad \sigma_1 = [x_1 = \mathsf{s}(0), y_1 = y, z_1 = \mathsf{s}(\mathsf{s}(0))]$

$\nwarrow_{\widehat{\sigma}_1} \mathsf{prod}(\mathsf{s}(0), y, w_1), \mathsf{sum}(w_1, y, \mathsf{s}(\mathsf{s}(0)))$

$\sigma_2 = [x_2 = 0, y_2 = y, z_2 = w_1]$

$\nwarrow_{\widehat{\sigma}_2} \mathsf{prod}(0, y, w_2), \mathsf{sum}(w_2, y, w_1), \mathsf{sum}(w_1, y, \mathsf{s}(\mathsf{s}(0)))$

$\sigma_3 = [y_3 = y, \boxed{w_2 = 0}]$

$\nwarrow_{\widehat{\sigma}_3} \mathsf{sum}(0, y, w_1), \mathsf{sum}(w_1, y, \mathsf{s}(\mathsf{s}(0))) \qquad \sigma_4 = [\boxed{w_1 = y}, y_4 = y]$

$\nwarrow_{\widehat{\sigma}_4} \mathsf{sum}(y, y, \mathsf{s}(\mathsf{s}(0))) \qquad \sigma_5 = [\boxed{y = \mathsf{s}(x_5)}, y_5 = \mathsf{s}(x_5), z_5 = \mathsf{s}(0)]$

$\nwarrow_{\widehat{\sigma}_5} \mathsf{sum}(x_5, \mathsf{s}(x_5), \mathsf{s}(0)) \quad \sigma_6 = [\boxed{x_5 = \mathsf{s}(x_6)}, y_6 = \mathsf{s}(\mathsf{s}(x_6)), z_6 = 0]$

$\nwarrow_{\widehat{\sigma}_6} \mathsf{sum}(x_6, \mathsf{s}(\mathsf{s}(x_6)), 0)$

```
sum(0,y,y) .
sum(s(x),y,s(z)) :- sum(x,y,z) .

prod(0,y,0) .
prod(s(x),y,z) :- prod(x,y,w) , sum(w,y,z) .
```

$$\mathsf{prod}(\mathsf{s}(\mathsf{s}(0)), y, \mathsf{s}(\mathsf{s}(0))) \qquad \sigma_1 = [x_1 = \mathsf{s}(0), y_1 = y, z_1 = \mathsf{s}(\mathsf{s}(0))]$$

$$\nwarrow_{\widehat{\sigma}_1} \mathsf{prod}(\mathsf{s}(0), y, w_1), \mathsf{sum}(w_1, y, \mathsf{s}(\mathsf{s}(0)))$$

$$\sigma_2 = [x_2 = 0, y_2 = y, z_2 = w_1]$$

$$\nwarrow_{\widehat{\sigma}_2} \mathsf{prod}(0, y, w_2), \mathsf{sum}(w_2, y, w_1), \mathsf{sum}(w_1, y, \mathsf{s}(\mathsf{s}(0)))$$

$$\sigma_3 = [y_3 = y, \boxed{w_2 = 0}]$$

$$\nwarrow_{\widehat{\sigma}_3} \mathsf{sum}(0, y, w_1), \mathsf{sum}(w_1, y, \mathsf{s}(\mathsf{s}(0))) \qquad \sigma_4 = [\boxed{w_1 = y}, y_4 = y]$$

$$\nwarrow_{\widehat{\sigma}_4} \mathsf{sum}(y, y, \mathsf{s}(\mathsf{s}(0))) \qquad \sigma_5 = [\boxed{y = \mathsf{s}(x_5)}, y_5 = \mathsf{s}(x_5), z_5 = \mathsf{s}(0)]$$

$$\nwarrow_{\widehat{\sigma}_5} \mathsf{sum}(x_5, \mathsf{s}(x_5), \mathsf{s}(0)) \quad \sigma_6 = [\boxed{x_5 = \mathsf{s}(x_6)}, y_6 = \mathsf{s}(\mathsf{s}(x_6)), z_6 = 0]$$

$$\nwarrow_{\widehat{\sigma}_6} \mathsf{sum}(x_6, \mathsf{s}(\mathsf{s}(x_6)), 0)$$

Fail!

2. a predicate pow $\in \Pi_3$ for computing the power;

```
sum(0,y,y) .
sum(s(x),y,s(z)) :- sum(x,y,z) .
```

$$0 + y = y$$

$$(x + 1) + y = (x + y) + 1$$

```
prod(0,y,0) .
prod(s(x),y,z) :- prod(x,y,w) , sum(w,y,z) .
```

$$0 \cdot y = 0$$

$$(x + 1) \cdot y = (x \cdot y) + y$$

2. a predicate $\mathsf{pow} \in \Pi_3$ for computing the power;

```
sum(0,y,y) .
sum(s(x),y,s(z)) :- sum(x,y,z) .
```

$$0 + y = y$$
$$(x + 1) + y = (x + y) + 1$$

```
prod(0,y,0) .
prod(s(x),y,z) :- prod(x,y,w) , sum(w,y,z) .
```

$$0 \cdot y = 0$$
$$(x + 1) \cdot y = (x \cdot y) + y$$

2

```
pow(0,s(y),0) .
pow(s(x),0,s(0)) .
pow(s(x),s(y),z) :- pow(s(x),y,w) , prod(w,s(x),z) .
```

2. a predicate pow $\in \Pi_3$ for computing the power;

```
sum(0,y,y) .
sum(s(x),y,s(z)) :- sum(x,y,z) .
```

$0 + y = y$

$(x+1) + y = (x+y) + 1$

```
prod(0,y,0) .
prod(s(x),y,z) :- prod(x,y,w) , sum(w,y,z) .
```

$0 \cdot y = 0$

$(x+1) \cdot y = (x \cdot y) + y$

$0^{(y+1)} = 0$

2

```
pow(0,s(y),0) .
pow(s(x),0,s(0)) .
pow(s(x),s(y),z) :- pow(s(x),y,w) , prod(w,s(x),z) .
```

2. a predicate pow $\in \Pi_3$ for computing the power;

```
sum(0,y,y) .
sum(s(x),y,s(z)) :- sum(x,y,z) .
```

$0 + y = y$

$(x+1) + y = (x+y) + 1$

```
prod(0,y,0) .
prod(s(x),y,z) :- prod(x,y,w) , sum(w,y,z) .
```

$0 \cdot y = 0$

$(x+1) \cdot y = (x \cdot y) + y$

$0^{(y+1)} = 0$ $\qquad$ $(x+1)^0 = 1$

2

```
pow(0,s(y),0) .
pow(s(x),0,s(0)) .
pow(s(x),s(y),z) :- pow(s(x),y,w) , prod(w,s(x),z) .
```

2. a predicate pow $\in \Pi_3$ for computing the power;

```
sum(0,y,y) .
sum(s(x),y,s(z)) :- sum(x,y,z) .
```

$$0 + y = y$$

$$(x+1) + y = (x+y) + 1$$

```
prod(0,y,0) .
prod(s(x),y,z) :- prod(x,y,w) , sum(w,y,z) .
```

$$0 \cdot y = 0$$

$$(x+1) \cdot y = (x \cdot y) + y$$

$$0^{(y+1)} = 0 \qquad (x+1)^0 = 1$$

2

```
pow(0,s(y),0) .
pow(s(x),0,s(0)) .
pow(s(x),s(y),z) :- pow(s(x),y,w) , prod(w,s(x),z) .
```

$$(x+1)^{y+1} = (x+1)^y \cdot (x+1)$$

3. a predicate div $\in \Pi_2$ for telling if the first argument divides the second.

```
sum(0,y,y) .
sum(s(x),y,s(z)) :- sum(x,y,z) .
```

$$0 + y = y$$
$$(x+1) + y = (x+y) + 1$$

```
prod(0,y,0) .
prod(s(x),y,z) :- prod(x,y,w) , sum(w,y,z) .
```

$$0 \cdot y = 0$$
$$(x+1) \cdot y = (x \cdot y) + y$$

```
pow(0,s(y),0) .
pow(s(x),0,s(0)) .
pow(s(x),s(y),z) :- pow(s(x),y,w) , prod(w,s(x),z) .
```

$$0^{(y+1)} = 0$$
$$(x+1)^0 = 1$$
$$(x+1)^{y+1} = (x+1)^y \cdot (x+1)$$

3. a predicate div $\in \Pi_2$ for telling if the first argument divides the second.

```
sum(0,y,y) .
sum(s(x),y,s(z)) :- sum(x,y,z) .
```

$$0 + y = y$$
$$(x+1) + y = (x+y) + 1$$

```
prod(0,y,0) .
prod(s(x),y,z) :- prod(x,y,w) , sum(w,y,z) .
```

$$0 \cdot y = 0$$
$$(x+1) \cdot y = (x \cdot y) + y$$

```
pow(0,s(y),0) .
pow(s(x),0,s(0)) .
pow(s(x),s(y),z) :- pow(s(x),y,w) , prod(w,s(x),z) .
```

$$0^{(y+1)} = 0$$
$$(x+1)^0 = 1$$
$$(x+1)^{y+1} = (x+1)^y \cdot (x+1)$$

3 `div(s(y),z) :- prod(x,s(y),z) .`

$$\mathsf{div}(z, \mathsf{s}(\mathsf{s}(0)))$$

```
sum(0,y,y) .
sum(s(x),y,s(z)) :- sum(x,y,z) .

prod(0,y,0) .
prod(s(x),y,z) :- prod(x,y,w) , sum(w,y,z) .

div(s(y),z) :- prod(x,s(y),z) .
```

$$\mathsf{div}(z, \mathsf{s}(\mathsf{s}(0)))$$

```
sum(0,y,y) .
sum(s(x),y,s(z)) :- sum(x,y,z) .

prod(0,y,0) .
prod(s(x),y,z) :- prod(x,y,w) , sum(w,y,z) .

div(s(y),z) :- prod(x,s(y),z) .
```

$\mathsf{div}(z, \mathsf{s}(\mathsf{s}(0)))$

$$\sigma_1 = [z = \mathsf{s}(y_1), z_1 = \mathsf{s}(\mathsf{s}(0))]$$

```
sum(0,y,y) .
sum(s(x),y,s(z)) :- sum(x,y,z) .

prod(0,y,0) .
prod(s(x),y,z) :- prod(x,y,w) , sum(w,y,z) .

div(s(y),z) :- prod(x,s(y),z) .
```

$\mathsf{div}(z, \mathsf{s}(\mathsf{s}(0)))$

$\sigma_1 = [z = \mathsf{s}(y_1), z_1 = \mathsf{s}(\mathsf{s}(0))]$

```
sum(0,y,y) .
sum(s(x),y,s(z)) :- sum(x,y,z) .

prod(0,y,0) .
prod(s(x),y,z) :- prod(x,y,w) , sum(w,y,z) .

div(s(y),z) :- prod(x,s(y),z) .
```

$\mathsf{div}(z, \mathsf{s}(\mathsf{s}(0)))$ $\qquad \sigma_1 = [z = \mathsf{s}(y_1), z_1 = \mathsf{s}(\mathsf{s}(0))]$

$\nwarrow_{\widehat{\sigma}_1} \mathsf{prod}(x_1, \mathsf{s}(y_1), \mathsf{s}(\mathsf{s}(0)))$

```
sum(0,y,y) .
sum(s(x),y,s(z)) :- sum(x,y,z) .

prod(0,y,0) .
prod(s(x),y,z) :- prod(x,y,w) , sum(w,y,z) .

div(s(y),z) :- prod(x,s(y),z) .
```

$\mathsf{div}(z, \mathsf{s}(\mathsf{s}(0)))$ $\qquad \sigma_1 = [z = \mathsf{s}(y_1), z_1 = \mathsf{s}(\mathsf{s}(0))]$

$\nwarrow_{\widehat{\sigma}_1}\ \mathsf{prod}(x_1, \mathsf{s}(y_1), \mathsf{s}(\mathsf{s}(0)))$

$\sigma_2 = [x_1 = \mathsf{s}(x_2), y_2 = \mathsf{s}(y_1), z_2 = \mathsf{s}(\mathsf{s}(0))]$

```
sum(0,y,y) .
sum(s(x),y,s(z)) :- sum(x,y,z) .

prod(0,y,0) .
prod(s(x),y,z) :- prod(x,y,w) , sum(w,y,z) .

div(s(y),z) :- prod(x,s(y),z) .
```

$\mathsf{div}(z, \mathsf{s}(\mathsf{s}(0)))$

$\sigma_1 = [z = \mathsf{s}(y_1), z_1 = \mathsf{s}(\mathsf{s}(0))]$

$\nwarrow_{\widehat{\sigma}_1} \mathsf{prod}(x_1, \mathsf{s}(y_1), \mathsf{s}(\mathsf{s}(0)))$

$\sigma_2 = [x_1 = \mathsf{s}(x_2), y_2 = \mathsf{s}(y_1), z_2 = \mathsf{s}(\mathsf{s}(0))]$

```
sum(0,y,y) .
sum(s(x),y,s(z)) :- sum(x,y,z) .

prod(0,y,0) .
prod(s(x),y,z) :- prod(x,y,w) , sum(w,y,z) .

div(s(y),z) :- prod(x,s(y),z) .
```

$\mathsf{div}(z, \mathsf{s}(\mathsf{s}(0)))$

$\sigma_1 = [z = \mathsf{s}(y_1), z_1 = \mathsf{s}(\mathsf{s}(0))]$

$\nwarrow_{\widehat{\sigma}_1} \mathsf{prod}(x_1, \mathsf{s}(y_1), \mathsf{s}(\mathsf{s}(0)))$

$\sigma_2 = [x_1 = \mathsf{s}(x_2), y_2 = \mathsf{s}(y_1), z_2 = \mathsf{s}(\mathsf{s}(0))]$

$\nwarrow_{\widehat{\sigma}_2} \mathsf{prod}(x_2, \mathsf{s}(y_1), w_2)\ ,\ \mathsf{sum}(w_2, \mathsf{s}(y_1), \mathsf{s}(\mathsf{s}(0)))$

```
sum(0,y,y) .
sum(s(x),y,s(z)) :- sum(x,y,z) .

prod(0,y,0) .
prod(s(x),y,z) :- prod(x,y,w) , sum(w,y,z) .

div(s(y),z) :- prod(x,s(y),z) .
```

$\mathsf{div}(z, \mathsf{s}(\mathsf{s}(0)))$

$$\sigma_1 = [z = \mathsf{s}(y_1), z_1 = \mathsf{s}(\mathsf{s}(0))]$$

$\nwarrow_{\widehat{\sigma}_1}$ $\mathsf{prod}(x_1, \mathsf{s}(y_1), \mathsf{s}(\mathsf{s}(0)))$

$$\sigma_2 = [x_1 = \mathsf{s}(x_2), y_2 = \mathsf{s}(y_1), z_2 = \mathsf{s}(\mathsf{s}(0))]$$

$\nwarrow_{\widehat{\sigma}_2}$ $\mathsf{prod}(x_2, \mathsf{s}(y_1), w_2)$, $\mathsf{sum}(w_2, \mathsf{s}(y_1), \mathsf{s}(\mathsf{s}(0)))$

$$\sigma_3 = [x_2 = 0, y_3 = \mathsf{s}(y_1), w_2 = 0]$$

```
sum(0,y,y) .
sum(s(x),y,s(z)) :- sum(x,y,z) .

prod(0,y,0) .
prod(s(x),y,z) :- prod(x,y,w) , sum(w,y,z) .

div(s(y),z) :- prod(x,s(y),z) .
```

$\mathsf{div}(z, \mathsf{s}(\mathsf{s}(0)))$ $\qquad \sigma_1 = [\boxed{z = \mathsf{s}(y_1)}, z_1 = \mathsf{s}(\mathsf{s}(0))]$

$\nwarrow_{\widehat{\sigma}_1} \mathsf{prod}(x_1, \mathsf{s}(y_1), \mathsf{s}(\mathsf{s}(0)))$

$\sigma_2 = [\boxed{x_1 = \mathsf{s}(x_2)}, y_2 = \mathsf{s}(y_1), z_2 = \mathsf{s}(\mathsf{s}(0))]$

$\nwarrow_{\widehat{\sigma}_2} \mathsf{prod}(x_2, \mathsf{s}(y_1), w_2)\ ,\ \mathsf{sum}(w_2, \mathsf{s}(y_1), \mathsf{s}(\mathsf{s}(0)))$

$\sigma_3 = [\boxed{x_2 = 0}, y_3 = \mathsf{s}(y_1), \boxed{w_2 = 0}]$

```
sum(0,y,y) .
sum(s(x),y,s(z)) :- sum(x,y,z) .

prod(0,y,0) .
prod(s(x),y,z) :- prod(x,y,w) , sum(w,y,z) .

div(s(y),z) :- prod(x,s(y),z) .
```

$\mathsf{div}(z, \mathsf{s}(\mathsf{s}(0)))$

$\sigma_1 = [z = \mathsf{s}(y_1), z_1 = \mathsf{s}(\mathsf{s}(0))]$

$\nwarrow_{\widehat{\sigma}_1} \mathsf{prod}(x_1, \mathsf{s}(y_1), \mathsf{s}(\mathsf{s}(0)))$

$\sigma_2 = [x_1 = \mathsf{s}(x_2), y_2 = \mathsf{s}(y_1), z_2 = \mathsf{s}(\mathsf{s}(0))]$

$\nwarrow_{\widehat{\sigma}_2} \mathsf{prod}(x_2, \mathsf{s}(y_1), w_2)\ ,\ \mathsf{sum}(w_2, \mathsf{s}(y_1), \mathsf{s}(\mathsf{s}(0)))$

$\sigma_3 = [x_2 = 0, y_3 = \mathsf{s}(y_1), w_2 = 0]$

$\nwarrow_{\widehat{\sigma}_3} \mathsf{sum}(0, \mathsf{s}(y_1), \mathsf{s}(\mathsf{s}(0)))$

```
sum(0,y,y) .
sum(s(x),y,s(z)) :- sum(x,y,z) .

prod(0,y,0) .
prod(s(x),y,z) :- prod(x,y,w) , sum(w,y,z) .

div(s(y),z) :- prod(x,s(y),z) .
```

$\mathsf{div}(z, \mathsf{s}(\mathsf{s}(0)))$ $\quad \sigma_1 = [z = \mathsf{s}(y_1), z_1 = \mathsf{s}(\mathsf{s}(0))]$

$\nwarrow_{\widehat{\sigma}_1}$ $\mathsf{prod}(x_1, \mathsf{s}(y_1), \mathsf{s}(\mathsf{s}(0)))$

$\sigma_2 = [x_1 = \mathsf{s}(x_2), y_2 = \mathsf{s}(y_1), z_2 = \mathsf{s}(\mathsf{s}(0))]$

$\nwarrow_{\widehat{\sigma}_2}$ $\mathsf{prod}(x_2, \mathsf{s}(y_1), w_2)$, $\mathsf{sum}(w_2, \mathsf{s}(y_1), \mathsf{s}(\mathsf{s}(0)))$

$\sigma_3 = [x_2 = 0, y_3 = \mathsf{s}(y_1), w_2 = 0]$

$\nwarrow_{\widehat{\sigma}_3}$ $\mathsf{sum}(0, \mathsf{s}(y_1), \mathsf{s}(\mathsf{s}(0)))$ $\quad \sigma_4 = [y_4 = \mathsf{s}(\mathsf{s}(0)), y_1 = \mathsf{s}(0)]$

```
sum(0,y,y) .
sum(s(x),y,s(z)) :- sum(x,y,z) .

prod(0,y,0) .
prod(s(x),y,z) :- prod(x,y,w) , sum(w,y,z) .

div(s(y),z) :- prod(x,s(y),z) .
```

$\mathsf{div}(z, \mathsf{s}(\mathsf{s}(0)))$ $\qquad \sigma_1 = [z = \mathsf{s}(y_1), z_1 = \mathsf{s}(\mathsf{s}(0))]$

$\nwarrow_{\widehat{\sigma}_1} \mathsf{prod}(x_1, \mathsf{s}(y_1), \mathsf{s}(\mathsf{s}(0)))$

$\sigma_2 = [x_1 = \mathsf{s}(x_2), y_2 = \mathsf{s}(y_1), z_2 = \mathsf{s}(\mathsf{s}(0))]$

$\nwarrow_{\widehat{\sigma}_2} \mathsf{prod}(x_2, \mathsf{s}(y_1), w_2)\ ,\ \mathsf{sum}(w_2, \mathsf{s}(y_1), \mathsf{s}(\mathsf{s}(0)))$

$\sigma_3 = [x_2 = 0, y_3 = \mathsf{s}(y_1), w_2 = 0]$

$\nwarrow_{\widehat{\sigma}_3} \mathsf{sum}(0, \mathsf{s}(y_1), \mathsf{s}(\mathsf{s}(0)))$ $\qquad \sigma_4 = [y_4 = \mathsf{s}(\mathsf{s}(0)), y_1 = \mathsf{s}(0)]$

```
sum(0,y,y) .
sum(s(x),y,s(z)) :- sum(x,y,z) .

prod(0,y,0) .
prod(s(x),y,z) :- prod(x,y,w) , sum(w,y,z) .

div(s(y),z) :- prod(x,s(y),z) .
```

$\mathsf{div}(z, \mathsf{s}(\mathsf{s}(0)))$ $\qquad \sigma_1 = [z = \mathsf{s}(y_1), z_1 = \mathsf{s}(\mathsf{s}(0))]$

$\nwarrow_{\widehat{\sigma}_1}$ $\mathsf{prod}(x_1, \mathsf{s}(y_1), \mathsf{s}(\mathsf{s}(0)))$

$\sigma_2 = [x_1 = \mathsf{s}(x_2), y_2 = \mathsf{s}(y_1), z_2 = \mathsf{s}(\mathsf{s}(0))]$

$\nwarrow_{\widehat{\sigma}_2}$ $\mathsf{prod}(x_2, \mathsf{s}(y_1), w_2)$, $\mathsf{sum}(w_2, \mathsf{s}(y_1), \mathsf{s}(\mathsf{s}(0)))$

$\sigma_3 = [x_2 = 0, y_3 = \mathsf{s}(y_1), w_2 = 0]$

$\nwarrow_{\widehat{\sigma}_3}$ $\mathsf{sum}(0, \mathsf{s}(y_1), \mathsf{s}(\mathsf{s}(0)))$ $\qquad \sigma_4 = [y_4 = \mathsf{s}(\mathsf{s}(0)), y_1 = \mathsf{s}(0)]$

$\nwarrow_{\widehat{\sigma}_4}$ $\square$

```
sum(0,y,y) .
sum(s(x),y,s(z)) :- sum(x,y,z) .

prod(0,y,0) .
prod(s(x),y,z) :- prod(x,y,w) , sum(w,y,z) .

div(s(y),z) :- prod(x,s(y),z) .
```

$\mathsf{div}(z, \mathsf{s}(\mathsf{s}(0)))$ $\qquad \sigma_1 = [z = \mathsf{s}(y_1), z_1 = \mathsf{s}(\mathsf{s}(0))]$

$\nwarrow_{\widehat{\sigma}_1}$ $\mathsf{prod}(x_1, \mathsf{s}(y_1), \mathsf{s}(\mathsf{s}(0)))$

$\sigma_2 = [x_1 = \mathsf{s}(x_2), y_2 = \mathsf{s}(y_1), z_2 = \mathsf{s}(\mathsf{s}(0))]$

$\nwarrow_{\widehat{\sigma}_2}$ $\mathsf{prod}(x_2, \mathsf{s}(y_1), w_2)\ ,\ \mathsf{sum}(w_2, \mathsf{s}(y_1), \mathsf{s}(\mathsf{s}(0)))$

$\sigma_3 = [x_2 = 0, y_3 = \mathsf{s}(y_1), w_2 = 0]$

$\nwarrow_{\widehat{\sigma}_3}$ $\mathsf{sum}(0, \mathsf{s}(y_1), \mathsf{s}(\mathsf{s}(0)))$ $\qquad \sigma_4 = [y_4 = \mathsf{s}(\mathsf{s}(0)), y_1 = \mathsf{s}(0)]$

$\nwarrow_{\widehat{\sigma}_4}$ $\square$

$z = \mathsf{s}(\mathsf{s}(0))$

```
sum(0,y,y) .
sum(s(x),y,s(z)) :- sum(x,y,z) .

prod(0,y,0) .
prod(s(x),y,z) :- prod(x,y,w) , sum(w,y,z) .

div(s(y),z) :- prod(x,s(y),z) .
```

$\mathsf{div}(z, \mathsf{s}(\mathsf{s}(0)))$

$\sigma_1 = [z = \mathsf{s}(y_1), z_1 = \mathsf{s}(\mathsf{s}(0))]$

$\nwarrow_{\widehat{\sigma}_1} \mathsf{prod}(x_1, \mathsf{s}(y_1), \mathsf{s}(\mathsf{s}(0)))$

$\sigma_2 = [x_1 = \mathsf{s}(x_2), y_2 = \mathsf{s}(y_1), z_2 = \mathsf{s}(\mathsf{s}(0))]$

$\nwarrow_{\widehat{\sigma}_2} \mathsf{prod}(x_2, \mathsf{s}(y_1), w_2)\ ,\ \mathsf{sum}(w_2, \mathsf{s}(y_1), \mathsf{s}(\mathsf{s}(0)))$

$\sigma_3 = [x_2 = 0, y_3 = \mathsf{s}(y_1), w_2 = 0]$

$\nwarrow_{\widehat{\sigma}_3} \mathsf{sum}(0, \mathsf{s}(y_1), \mathsf{s}(\mathsf{s}(0)))$

$\sigma_4 = [y_4 = \mathsf{s}(\mathsf{s}(0)), y_1 = \mathsf{s}(0)]$

$\nwarrow_{\widehat{\sigma}_4} \Box$

$z = \mathsf{s}(\mathsf{s}(0))$

Alternatively:

```
sum(0,y,y) .
sum(s(x),y,s(z)) :- sum(x,y,z) .

prod(0,y,0) .
prod(s(x),y,z) :- prod(x,y,w) , sum(w,y,z) .

div(s(y),z) :- prod(x,s(y),z) .
```

$\mathsf{div}(z, \mathsf{s}(\mathsf{s}(0)))$

$$\sigma_1 = [z = \mathsf{s}(y_1), z_1 = \mathsf{s}(\mathsf{s}(0))]$$

$\nwarrow_{\widehat{\sigma}_1} \mathsf{prod}(x_1, \mathsf{s}(y_1), \mathsf{s}(\mathsf{s}(0)))$

$$\sigma_2 = [x_1 = \mathsf{s}(x_2), y_2 = \mathsf{s}(y_1), z_2 = \mathsf{s}(\mathsf{s}(0))]$$

$\nwarrow_{\widehat{\sigma}_2} \mathsf{prod}(x_2, \mathsf{s}(y_1), w_2) , \mathsf{sum}(w_2, \mathsf{s}(y_1), \mathsf{s}(\mathsf{s}(0)))$

```
sum(0,y,y) .
sum(s(x),y,s(z)) :- sum(x,y,z) .

prod(0,y,0) .
prod(s(x),y,z) :- prod(x,y,w) , sum(w,y,z) .

div(s(y),z) :- prod(x,s(y),z) .
```

$$\mathsf{div}(z, \mathsf{s}(\mathsf{s}(0))) \qquad \sigma_1 = [z = \mathsf{s}(y_1), z_1 = \mathsf{s}(\mathsf{s}(0))]$$

$$\nwarrow_{\widehat{\sigma}_1} \ \mathsf{prod}(x_1, \mathsf{s}(y_1), \mathsf{s}(\mathsf{s}(0)))$$

$$\sigma_2 = [x_1 = \mathsf{s}(x_2), y_2 = \mathsf{s}(y_1), z_2 = \mathsf{s}(\mathsf{s}(0))]$$

$$\nwarrow_{\widehat{\sigma}_2} \ \mathsf{prod}(x_2, \mathsf{s}(y_1), w_2)\ ,\ \mathsf{sum}(w_2, \mathsf{s}(y_1), \mathsf{s}(\mathsf{s}(0)))$$

$$\sigma_3 = [x_2 = \mathsf{s}(x_3), y_3 = \mathsf{s}(y_1), z_3 = w_2]$$

```
sum(0,y,y) .
sum(s(x),y,s(z)) :- sum(x,y,z) .

prod(0,y,0) .
prod(s(x),y,z) :- prod(x,y,w) , sum(w,y,z) .

div(s(y),z) :- prod(x,s(y),z) .
```

$\mathsf{div}(z, \mathsf{s}(\mathsf{s}(0)))$ $\quad \sigma_1 = [z = \mathsf{s}(y_1), z_1 = \mathsf{s}(\mathsf{s}(0))]$

$\nwarrow_{\widehat{\sigma}_1} \mathsf{prod}(x_1, \mathsf{s}(y_1), \mathsf{s}(\mathsf{s}(0)))$

$\sigma_2 = [x_1 = \mathsf{s}(x_2), y_2 = \mathsf{s}(y_1), z_2 = \mathsf{s}(\mathsf{s}(0))]$

$\nwarrow_{\widehat{\sigma}_2} \mathsf{prod}(x_2, \mathsf{s}(y_1), w_2)\ ,\ \mathsf{sum}(w_2, \mathsf{s}(y_1), \mathsf{s}(\mathsf{s}(0)))$

$\sigma_3 = [x_2 = \mathsf{s}(x_3), y_3 = \mathsf{s}(y_1), z_3 = w_2]$

```
sum(0,y,y) .
sum(s(x),y,s(z)) :- sum(x,y,z) .

prod(0,y,0) .
prod(s(x),y,z) :- prod(x,y,w) , sum(w,y,z) .

div(s(y),z) :- prod(x,s(y),z) .
```

$$\mathsf{div}(z, \mathsf{s}(\mathsf{s}(0))) \qquad \sigma_1 = [z = \mathsf{s}(y_1), z_1 = \mathsf{s}(\mathsf{s}(0))]$$

$$\nwarrow_{\widehat{\sigma}_1} \mathsf{prod}(x_1, \mathsf{s}(y_1), \mathsf{s}(\mathsf{s}(0)))$$

$$\sigma_2 = [x_1 = \mathsf{s}(x_2), y_2 = \mathsf{s}(y_1), z_2 = \mathsf{s}(\mathsf{s}(0))]$$

$$\nwarrow_{\widehat{\sigma}_2} \mathsf{prod}(x_2, \mathsf{s}(y_1), w_2)\ ,\ \mathsf{sum}(w_2, \mathsf{s}(y_1), \mathsf{s}(\mathsf{s}(0)))$$

$$\sigma_3 = [x_2 = \mathsf{s}(x_3), y_3 = \mathsf{s}(y_1), z_3 = w_2]$$

$$\nwarrow_{\widehat{\sigma}_3} \mathsf{prod}(x_3, \mathsf{s}(y_1), w_3), \mathsf{sum}(w_3, \mathsf{s}(y_1), w_2), \mathsf{sum}(w_2, \mathsf{s}(y_1), \mathsf{s}(\mathsf{s}(0)))$$

```
sum(0,y,y) .
sum(s(x),y,s(z)) :- sum(x,y,z) .

prod(0,y,0) .
prod(s(x),y,z) :- prod(x,y,w) , sum(w,y,z) .

div(s(y),z) :- prod(x,s(y),z) .
```

$$\mathsf{div}(z, \mathsf{s}(\mathsf{s}(0)))$$

$$\sigma_1 = [z = \mathsf{s}(y_1), z_1 = \mathsf{s}(\mathsf{s}(0))]$$

$$\nwarrow_{\widehat{\sigma}_1} \mathsf{prod}(x_1, \mathsf{s}(y_1), \mathsf{s}(\mathsf{s}(0)))$$

$$\sigma_2 = [x_1 = \mathsf{s}(x_2), y_2 = \mathsf{s}(y_1), z_2 = \mathsf{s}(\mathsf{s}(0))]$$

$$\nwarrow_{\widehat{\sigma}_2} \mathsf{prod}(x_2, \mathsf{s}(y_1), w_2)\ ,\ \mathsf{sum}(w_2, \mathsf{s}(y_1), \mathsf{s}(\mathsf{s}(0)))$$

$$\sigma_3 = [x_2 = \mathsf{s}(x_3), y_3 = \mathsf{s}(y_1), z_3 = w_2]$$

$$\nwarrow_{\widehat{\sigma}_3} \mathsf{prod}(x_3, \mathsf{s}(y_1), w_3), \mathsf{sum}(w_3, \mathsf{s}(y_1), w_2), \mathsf{sum}(w_2, \mathsf{s}(y_1), \mathsf{s}(\mathsf{s}(0)))$$

$$\sigma_4 = [x_3 = 0, y_4 = \mathsf{s}(y_1), w_3 = 0]$$

```
sum(0,y,y) .
sum(s(x),y,s(z)) :- sum(x,y,z) .

prod(0,y,0) .
prod(s(x),y,z) :- prod(x,y,w) , sum(w,y,z) .

div(s(y),z) :- prod(x,s(y),z) .
```

$\mathsf{div}(z, \mathsf{s}(\mathsf{s}(0)))$

$$\sigma_1 = [z = \mathsf{s}(y_1), z_1 = \mathsf{s}(\mathsf{s}(0))]$$

$\nwarrow_{\widehat{\sigma}_1}$ $\mathsf{prod}(x_1, \mathsf{s}(y_1), \mathsf{s}(\mathsf{s}(0)))$

$$\sigma_2 = [x_1 = \mathsf{s}(x_2), y_2 = \mathsf{s}(y_1), z_2 = \mathsf{s}(\mathsf{s}(0))]$$

$\nwarrow_{\widehat{\sigma}_2}$ $\mathsf{prod}(x_2, \mathsf{s}(y_1), w_2)$, $\mathsf{sum}(w_2, \mathsf{s}(y_1), \mathsf{s}(\mathsf{s}(0)))$

$$\sigma_3 = [x_2 = \mathsf{s}(x_3), y_3 = \mathsf{s}(y_1), z_3 = w_2]$$

$\nwarrow_{\widehat{\sigma}_3}$ $\mathsf{prod}(x_3, \mathsf{s}(y_1), w_3), \mathsf{sum}(w_3, \mathsf{s}(y_1), w_2), \mathsf{sum}(w_2, \mathsf{s}(y_1), \mathsf{s}(\mathsf{s}(0)))$

$$\sigma_4 = [x_3 = 0, y_4 = \mathsf{s}(y_1), w_3 = 0]$$

```
sum(0,y,y) .
sum(s(x),y,s(z)) :- sum(x,y,z) .

prod(0,y,0) .
prod(s(x),y,z) :- prod(x,y,w) , sum(w,y,z) .

div(s(y),z) :- prod(x,s(y),z) .
```

$$\mathsf{div}(z, \mathsf{s}(\mathsf{s}(0)))$$

$$\sigma_1 = [z = \mathsf{s}(y_1), z_1 = \mathsf{s}(\mathsf{s}(0))]$$

$$\nwarrow_{\widehat{\sigma}_1} \mathsf{prod}(x_1, \mathsf{s}(y_1), \mathsf{s}(\mathsf{s}(0)))$$

$$\sigma_2 = [x_1 = \mathsf{s}(x_2), y_2 = \mathsf{s}(y_1), z_2 = \mathsf{s}(\mathsf{s}(0))]$$

$$\nwarrow_{\widehat{\sigma}_2} \mathsf{prod}(x_2, \mathsf{s}(y_1), w_2)\ ,\ \mathsf{sum}(w_2, \mathsf{s}(y_1), \mathsf{s}(\mathsf{s}(0)))$$

$$\sigma_3 = [x_2 = \mathsf{s}(x_3), y_3 = \mathsf{s}(y_1), z_3 = w_2]$$

$$\nwarrow_{\widehat{\sigma}_3} \mathsf{prod}(x_3, \mathsf{s}(y_1), w_3), \mathsf{sum}(w_3, \mathsf{s}(y_1), w_2), \mathsf{sum}(w_2, \mathsf{s}(y_1), \mathsf{s}(\mathsf{s}(0)))$$

$$\sigma_4 = [x_3 = 0, y_4 = \mathsf{s}(y_1), w_3 = 0]$$

$$\nwarrow_{\widehat{\sigma}_4} \mathsf{sum}(0, \mathsf{s}(y_1), w_2)\ ,\ \mathsf{sum}(w_2, \mathsf{s}(y_1), \mathsf{s}(\mathsf{s}(0)))$$

```
sum(0,y,y) .
sum(s(x),y,s(z)) :- sum(x,y,z) .

prod(0,y,0) .
prod(s(x),y,z) :- prod(x,y,w) , sum(w,y,z) .

div(s(y),z) :- prod(x,s(y),z) .
```

$\mathsf{div}(z, \mathsf{s}(\mathsf{s}(0)))$

$$\sigma_1 = [z = \mathsf{s}(y_1), z_1 = \mathsf{s}(\mathsf{s}(0))]$$

$\nwarrow_{\widehat{\sigma}_1} \ \mathsf{prod}(x_1, \mathsf{s}(y_1), \mathsf{s}(\mathsf{s}(0)))$

$$\sigma_2 = [x_1 = \mathsf{s}(x_2), y_2 = \mathsf{s}(y_1), z_2 = \mathsf{s}(\mathsf{s}(0))]$$

$\nwarrow_{\widehat{\sigma}_2} \ \mathsf{prod}(x_2, \mathsf{s}(y_1), w_2) , \mathsf{sum}(w_2, \mathsf{s}(y_1), \mathsf{s}(\mathsf{s}(0)))$

$$\sigma_3 = [x_2 = \mathsf{s}(x_3), y_3 = \mathsf{s}(y_1), z_3 = w_2]$$

$\nwarrow_{\widehat{\sigma}_3} \ \mathsf{prod}(x_3, \mathsf{s}(y_1), w_3), \mathsf{sum}(w_3, \mathsf{s}(y_1), w_2), \mathsf{sum}(w_2, \mathsf{s}(y_1), \mathsf{s}(\mathsf{s}(0)))$

$$\sigma_4 = [x_3 = 0, y_4 = \mathsf{s}(y_1), w_3 = 0]$$

$\nwarrow_{\widehat{\sigma}_4} \ \mathsf{sum}(0, \mathsf{s}(y_1), w_2) , \mathsf{sum}(w_2, \mathsf{s}(y_1), \mathsf{s}(\mathsf{s}(0)))$

$$\sigma_5 = [y_5 = \mathsf{s}(y_1), w_2 = \mathsf{s}(y_1)]$$

```
sum(0,y,y) .
sum(s(x),y,s(z)) :- sum(x,y,z) .

prod(0,y,0) .
prod(s(x),y,z) :- prod(x,y,w) , sum(w,y,z) .

div(s(y),z) :- prod(x,s(y),z) .
```

$$\mathsf{div}(z, \mathsf{s}(\mathsf{s}(0)))$$

$$\sigma_1 = [z = \mathsf{s}(y_1), z_1 = \mathsf{s}(\mathsf{s}(0))]$$

$$\nwarrow_{\widehat{\sigma}_1} \ \mathsf{prod}(x_1, \mathsf{s}(y_1), \mathsf{s}(\mathsf{s}(0)))$$

$$\sigma_2 = [x_1 = \mathsf{s}(x_2), y_2 = \mathsf{s}(y_1), z_2 = \mathsf{s}(\mathsf{s}(0))]$$

$$\nwarrow_{\widehat{\sigma}_2} \ \mathsf{prod}(x_2, \mathsf{s}(y_1), w_2)\ , \ \mathsf{sum}(w_2, \mathsf{s}(y_1), \mathsf{s}(\mathsf{s}(0)))$$

$$\sigma_3 = [x_2 = \mathsf{s}(x_3), y_3 = \mathsf{s}(y_1), z_3 = w_2]$$

$$\nwarrow_{\widehat{\sigma}_3} \ \mathsf{prod}(x_3, \mathsf{s}(y_1), w_3), \mathsf{sum}(w_3, \mathsf{s}(y_1), w_2), \mathsf{sum}(w_2, \mathsf{s}(y_1), \mathsf{s}(\mathsf{s}(0)))$$

$$\sigma_4 = [x_3 = 0, y_4 = \mathsf{s}(y_1), w_3 = 0]$$

$$\nwarrow_{\widehat{\sigma}_4} \ \mathsf{sum}(0, \mathsf{s}(y_1), w_2)\ , \ \mathsf{sum}(w_2, \mathsf{s}(y_1), \mathsf{s}(\mathsf{s}(0)))$$

$$\sigma_5 = [y_5 = \mathsf{s}(y_1), w_2 = \mathsf{s}(y_1)]$$

```
sum(0,y,y) .
sum(s(x),y,s(z)) :- sum(x,y,z) .

prod(0,y,0) .
prod(s(x),y,z) :- prod(x,y,w) , sum(w,y,z) .

div(s(y),z) :- prod(x,s(y),z) .
```

$$\mathsf{div}(z, \mathsf{s}(\mathsf{s}(0)))$$

$$\sigma_1 = [z = \mathsf{s}(y_1), z_1 = \mathsf{s}(\mathsf{s}(0))]$$

$$\nwarrow_{\widehat{\sigma}_1} \ \mathsf{prod}(x_1, \mathsf{s}(y_1), \mathsf{s}(\mathsf{s}(0)))$$

$$\sigma_2 = [x_1 = \mathsf{s}(x_2), y_2 = \mathsf{s}(y_1), z_2 = \mathsf{s}(\mathsf{s}(0))]$$

$$\nwarrow_{\widehat{\sigma}_2} \ \mathsf{prod}(x_2, \mathsf{s}(y_1), w_2) \ , \ \mathsf{sum}(w_2, \mathsf{s}(y_1), \mathsf{s}(\mathsf{s}(0)))$$

$$\sigma_3 = [x_2 = \mathsf{s}(x_3), y_3 = \mathsf{s}(y_1), z_3 = w_2]$$

$$\nwarrow_{\widehat{\sigma}_3} \ \mathsf{prod}(x_3, \mathsf{s}(y_1), w_3), \mathsf{sum}(w_3, \mathsf{s}(y_1), w_2), \mathsf{sum}(w_2, \mathsf{s}(y_1), \mathsf{s}(\mathsf{s}(0)))$$

$$\sigma_4 = [x_3 = 0, y_4 = \mathsf{s}(y_1), w_3 = 0]$$

$$\nwarrow_{\widehat{\sigma}_4} \ \mathsf{sum}(0, \mathsf{s}(y_1), w_2) \ , \ \mathsf{sum}(w_2, \mathsf{s}(y_1), \mathsf{s}(\mathsf{s}(0)))$$

$$\sigma_5 = [y_5 = \mathsf{s}(y_1), w_2 = \mathsf{s}(y_1)]$$

$$\nwarrow_{\widehat{\sigma}_5} \ \mathsf{sum}(\mathsf{s}(y_1), \mathsf{s}(y_1), \mathsf{s}(\mathsf{s}(0)))$$

```
sum(0,y,y) .
sum(s(x),y,s(z)) :- sum(x,y,z) .

prod(0,y,0) .
prod(s(x),y,z) :- prod(x,y,w) , sum(w,y,z) .

div(s(y),z) :- prod(x,s(y),z) .
```

$\mathsf{div}(z, \mathsf{s}(\mathsf{s}(0)))$

$\sigma_1 = [z = \mathsf{s}(y_1), z_1 = \mathsf{s}(\mathsf{s}(0))]$

$\nwarrow_{\widehat{\sigma}_1} \mathsf{prod}(x_1, \mathsf{s}(y_1), \mathsf{s}(\mathsf{s}(0)))$

$\sigma_2 = [x_1 = \mathsf{s}(x_2), y_2 = \mathsf{s}(y_1), z_2 = \mathsf{s}(\mathsf{s}(0))]$

$\nwarrow_{\widehat{\sigma}_2} \mathsf{prod}(x_2, \mathsf{s}(y_1), w_2) , \mathsf{sum}(w_2, \mathsf{s}(y_1), \mathsf{s}(\mathsf{s}(0)))$

$\sigma_3 = [x_2 = \mathsf{s}(x_3), y_3 = \mathsf{s}(y_1), z_3 = w_2]$

$\nwarrow_{\widehat{\sigma}_3} \mathsf{prod}(x_3, \mathsf{s}(y_1), w_3), \mathsf{sum}(w_3, \mathsf{s}(y_1), w_2), \mathsf{sum}(w_2, \mathsf{s}(y_1), \mathsf{s}(\mathsf{s}(0)))$

$\sigma_4 = [x_3 = 0, y_4 = \mathsf{s}(y_1), w_3 = 0]$

$\nwarrow_{\widehat{\sigma}_4} \mathsf{sum}(0, \mathsf{s}(y_1), w_2) , \mathsf{sum}(w_2, \mathsf{s}(y_1), \mathsf{s}(\mathsf{s}(0)))$

$\sigma_5 = [y_5 = \mathsf{s}(y_1), w_2 = \mathsf{s}(y_1)]$

$\nwarrow_{\widehat{\sigma}_5} \mathsf{sum}(\mathsf{s}(y_1), \mathsf{s}(y_1), \mathsf{s}(\mathsf{s}(0)))$ $\sigma_6 = [x_6 = y_1, y_6 = \mathsf{s}(y_1), z_6 = \mathsf{s}(0)]$

```
sum(0,y,y) .
sum(s(x),y,s(z)) :- sum(x,y,z) .

prod(0,y,0) .
prod(s(x),y,z) :- prod(x,y,w) , sum(w,y,z) .

div(s(y),z) :- prod(x,s(y),z) .
```

$\mathsf{div}(z, \mathsf{s}(\mathsf{s}(0)))$ $\qquad \sigma_1 = [z = \mathsf{s}(y_1), z_1 = \mathsf{s}(\mathsf{s}(0))]$

$\nwarrow_{\widehat{\sigma}_1}$ $\mathsf{prod}(x_1, \mathsf{s}(y_1), \mathsf{s}(\mathsf{s}(0)))$

$\sigma_2 = [x_1 = \mathsf{s}(x_2), y_2 = \mathsf{s}(y_1), z_2 = \mathsf{s}(\mathsf{s}(0))]$

$\nwarrow_{\widehat{\sigma}_2}$ $\mathsf{prod}(x_2, \mathsf{s}(y_1), w_2)$, $\mathsf{sum}(w_2, \mathsf{s}(y_1), \mathsf{s}(\mathsf{s}(0)))$

$\sigma_3 = [x_2 = \mathsf{s}(x_3), y_3 = \mathsf{s}(y_1), z_3 = w_2]$

$\nwarrow_{\widehat{\sigma}_3}$ $\mathsf{prod}(x_3, \mathsf{s}(y_1), w_3), \mathsf{sum}(w_3, \mathsf{s}(y_1), w_2), \mathsf{sum}(w_2, \mathsf{s}(y_1), \mathsf{s}(\mathsf{s}(0)))$

$\sigma_4 = [x_3 = 0, y_4 = \mathsf{s}(y_1), w_3 = 0]$

$\nwarrow_{\widehat{\sigma}_4}$ $\mathsf{sum}(0, \mathsf{s}(y_1), w_2)$, $\mathsf{sum}(w_2, \mathsf{s}(y_1), \mathsf{s}(\mathsf{s}(0)))$

$\sigma_5 = [y_5 = \mathsf{s}(y_1), w_2 = \mathsf{s}(y_1)]$

$\nwarrow_{\widehat{\sigma}_5}$ $\mathsf{sum}(\mathsf{s}(y_1), \mathsf{s}(y_1), \mathsf{s}(\mathsf{s}(0)))$ $\qquad \sigma_6 = [x_6 = y_1, y_6 = \mathsf{s}(y_1), z_6 = \mathsf{s}(0)]$

$\nwarrow_{\widehat{\sigma}_6}$ $\mathsf{sum}(y_1, \mathsf{s}(y_1), \mathsf{s}(0))$

```
sum(0,y,y) .
sum(s(x),y,s(z)) :- sum(x,y,z) .

prod(0,y,0) .
prod(s(x),y,z) :- prod(x,y,w) , sum(w,y,z) .

div(s(y),z) :- prod(x,s(y),z) .
```

$\mathsf{div}(z, \mathsf{s}(\mathsf{s}(0)))$ $\quad \sigma_1 = [z = \mathsf{s}(y_1), z_1 = \mathsf{s}(\mathsf{s}(0))]$

$\nwarrow_{\widehat{\sigma}_1}$ $\mathsf{prod}(x_1, \mathsf{s}(y_1), \mathsf{s}(\mathsf{s}(0)))$

$\sigma_2 = [x_1 = \mathsf{s}(x_2), y_2 = \mathsf{s}(y_1), z_2 = \mathsf{s}(\mathsf{s}(0))]$

$\nwarrow_{\widehat{\sigma}_2}$ $\mathsf{prod}(x_2, \mathsf{s}(y_1), w_2)$, $\mathsf{sum}(w_2, \mathsf{s}(y_1), \mathsf{s}(\mathsf{s}(0)))$

$\sigma_3 = [x_2 = \mathsf{s}(x_3), y_3 = \mathsf{s}(y_1), z_3 = w_2]$

$\nwarrow_{\widehat{\sigma}_3}$ $\mathsf{prod}(x_3, \mathsf{s}(y_1), w_3), \mathsf{sum}(w_3, \mathsf{s}(y_1), w_2), \mathsf{sum}(w_2, \mathsf{s}(y_1), \mathsf{s}(\mathsf{s}(0)))$

$\sigma_4 = [x_3 = 0, y_4 = \mathsf{s}(y_1), w_3 = 0]$

$\nwarrow_{\widehat{\sigma}_4}$ $\mathsf{sum}(0, \mathsf{s}(y_1), w_2)$, $\mathsf{sum}(w_2, \mathsf{s}(y_1), \mathsf{s}(\mathsf{s}(0)))$

$\sigma_5 = [y_5 = \mathsf{s}(y_1), w_2 = \mathsf{s}(y_1)]$

$\nwarrow_{\widehat{\sigma}_5}$ $\mathsf{sum}(\mathsf{s}(y_1), \mathsf{s}(y_1), \mathsf{s}(\mathsf{s}(0)))$ $\quad \sigma_6 = [x_6 = y_1, y_6 = \mathsf{s}(y_1), z_6 = \mathsf{s}(0)]$

$\nwarrow_{\widehat{\sigma}_6}$ $\mathsf{sum}(y_1, \mathsf{s}(y_1), \mathsf{s}(0))$ $\quad \sigma_7 = [y_1 = 0, y_7 = \mathsf{s}(0)]$

```
sum(0,y,y) .
sum(s(x),y,s(z)) :- sum(x,y,z) .

prod(0,y,0) .
prod(s(x),y,z) :- prod(x,y,w) , sum(w,y,z) .

div(s(y),z) :- prod(x,s(y),z) .
```

$\mathsf{div}(z, \mathsf{s}(\mathsf{s}(0)))$ $\quad \sigma_1 = [z = \mathsf{s}(y_1), z_1 = \mathsf{s}(\mathsf{s}(0))]$

$\nwarrow_{\widehat{\sigma}_1}$ $\mathsf{prod}(x_1, \mathsf{s}(y_1), \mathsf{s}(\mathsf{s}(0)))$

$\sigma_2 = [x_1 = \mathsf{s}(x_2), y_2 = \mathsf{s}(y_1), z_2 = \mathsf{s}(\mathsf{s}(0))]$

$\nwarrow_{\widehat{\sigma}_2}$ $\mathsf{prod}(x_2, \mathsf{s}(y_1), w_2)\ ,\ \mathsf{sum}(w_2, \mathsf{s}(y_1), \mathsf{s}(\mathsf{s}(0)))$

$\sigma_3 = [x_2 = \mathsf{s}(x_3), y_3 = \mathsf{s}(y_1), z_3 = w_2]$

$\nwarrow_{\widehat{\sigma}_3}$ $\mathsf{prod}(x_3, \mathsf{s}(y_1), w_3), \mathsf{sum}(w_3, \mathsf{s}(y_1), w_2), \mathsf{sum}(w_2, \mathsf{s}(y_1), \mathsf{s}(\mathsf{s}(0)))$

$\sigma_4 = [x_3 = 0, y_4 = \mathsf{s}(y_1), w_3 = 0]$

$\nwarrow_{\widehat{\sigma}_4}$ $\mathsf{sum}(0, \mathsf{s}(y_1), w_2)\ ,\ \mathsf{sum}(w_2, \mathsf{s}(y_1), \mathsf{s}(\mathsf{s}(0)))$

$\sigma_5 = [y_5 = \mathsf{s}(y_1), w_2 = \mathsf{s}(y_1)]$

$\nwarrow_{\widehat{\sigma}_5}$ $\mathsf{sum}(\mathsf{s}(y_1), \mathsf{s}(y_1), \mathsf{s}(\mathsf{s}(0)))$ $\quad \sigma_6 = [x_6 = y_1, y_6 = \mathsf{s}(y_1), z_6 = \mathsf{s}(0)]$

$\nwarrow_{\widehat{\sigma}_6}$ $\mathsf{sum}(y_1, \mathsf{s}(y_1), \mathsf{s}(0))$ $\quad \sigma_7 = [y_1 = 0, y_7 = \mathsf{s}(0)]$

```
sum(0,y,y) .
sum(s(x),y,s(z)) :- sum(x,y,z) .

prod(0,y,0) .
prod(s(x),y,z) :- prod(x,y,w) , sum(w,y,z) .

div(s(y),z) :- prod(x,s(y),z) .
```

$$\mathsf{div}(z, \mathsf{s}(\mathsf{s}(0))) \qquad \sigma_1 = [z = \mathsf{s}(y_1), z_1 = \mathsf{s}(\mathsf{s}(0))]$$

$$\nwarrow_{\widehat{\sigma}_1} \ \mathsf{prod}(x_1, \mathsf{s}(y_1), \mathsf{s}(\mathsf{s}(0)))$$

$$\sigma_2 = [x_1 = \mathsf{s}(x_2), y_2 = \mathsf{s}(y_1), z_2 = \mathsf{s}(\mathsf{s}(0))]$$

$$\nwarrow_{\widehat{\sigma}_2} \ \mathsf{prod}(x_2, \mathsf{s}(y_1), w_2)\ ,\ \mathsf{sum}(w_2, \mathsf{s}(y_1), \mathsf{s}(\mathsf{s}(0)))$$

$$\sigma_3 = [x_2 = \mathsf{s}(x_3), y_3 = \mathsf{s}(y_1), z_3 = w_2]$$

$$\nwarrow_{\widehat{\sigma}_3} \ \mathsf{prod}(x_3, \mathsf{s}(y_1), w_3), \mathsf{sum}(w_3, \mathsf{s}(y_1), w_2), \mathsf{sum}(w_2, \mathsf{s}(y_1), \mathsf{s}(\mathsf{s}(0)))$$

$$\sigma_4 = [x_3 = 0, y_4 = \mathsf{s}(y_1), w_3 = 0]$$

$$\nwarrow_{\widehat{\sigma}_4} \ \mathsf{sum}(0, \mathsf{s}(y_1), w_2)\ ,\ \mathsf{sum}(w_2, \mathsf{s}(y_1), \mathsf{s}(\mathsf{s}(0)))$$

$$\sigma_5 = [y_5 = \mathsf{s}(y_1), w_2 = \mathsf{s}(y_1)]$$

$$\nwarrow_{\widehat{\sigma}_5} \ \mathsf{sum}(\mathsf{s}(y_1), \mathsf{s}(y_1), \mathsf{s}(\mathsf{s}(0))) \qquad \sigma_6 = [x_6 = y_1, y_6 = \mathsf{s}(y_1), z_6 = \mathsf{s}(0)]$$

$$\nwarrow_{\widehat{\sigma}_6} \ \mathsf{sum}(y_1, \mathsf{s}(y_1), \mathsf{s}(0)) \qquad \sigma_7 = [y_1 = 0, y_7 = \mathsf{s}(0)]$$

$$\nwarrow_{\widehat{\sigma}_7} \ \square$$

```
sum(0,y,y) .
sum(s(x),y,s(z)) :- sum(x,y,z) .

prod(0,y,0) .
prod(s(x),y,z) :- prod(x,y,w) , sum(w,y,z) .

div(s(y),z) :- prod(x,s(y),z) .
```

$\mathsf{div}(z, \mathsf{s}(\mathsf{s}(0)))$

$\sigma_1 = [z = \mathsf{s}(y_1), z_1 = \mathsf{s}(\mathsf{s}(0))]$

$\nwarrow_{\widehat{\sigma}_1}$ $\mathsf{prod}(x_1, \mathsf{s}(y_1), \mathsf{s}(\mathsf{s}(0)))$

$\sigma_2 = [x_1 = \mathsf{s}(x_2), y_2 = \mathsf{s}(y_1), z_2 = \mathsf{s}(\mathsf{s}(0))]$

$\nwarrow_{\widehat{\sigma}_2}$ $\mathsf{prod}(x_2, \mathsf{s}(y_1), w_2)$, $\mathsf{sum}(w_2, \mathsf{s}(y_1), \mathsf{s}(\mathsf{s}(0)))$

$\sigma_3 = [x_2 = \mathsf{s}(x_3), y_3 = \mathsf{s}(y_1), z_3 = w_2]$

$\nwarrow_{\widehat{\sigma}_3}$ $\mathsf{prod}(x_3, \mathsf{s}(y_1), w_3), \mathsf{sum}(w_3, \mathsf{s}(y_1), w_2), \mathsf{sum}(w_2, \mathsf{s}(y_1), \mathsf{s}(\mathsf{s}(0)))$

$\sigma_4 = [x_3 = 0, y_4 = \mathsf{s}(y_1), w_3 = 0]$

$\nwarrow_{\widehat{\sigma}_4}$ $\mathsf{sum}(0, \mathsf{s}(y_1), w_2)$, $\mathsf{sum}(w_2, \mathsf{s}(y_1), \mathsf{s}(\mathsf{s}(0)))$

$\sigma_5 = [y_5 = \mathsf{s}(y_1), w_2 = \mathsf{s}(y_1)]$

$\nwarrow_{\widehat{\sigma}_5}$ $\mathsf{sum}(\mathsf{s}(y_1), \mathsf{s}(y_1), \mathsf{s}(\mathsf{s}(0)))$ $\sigma_6 = [x_6 = y_1, y_6 = \mathsf{s}(y_1), z_6 = \mathsf{s}(0)]$

$\nwarrow_{\widehat{\sigma}_6}$ $\mathsf{sum}(y_1, \mathsf{s}(y_1), \mathsf{s}(0))$ $\sigma_7 = [y_1 = 0, y_7 = \mathsf{s}(0)]$

$\nwarrow_{\widehat{\sigma}_7}$ $\square$ $z = \mathsf{s}(0)$

```
sum(0,y,y) .
sum(s(x),y,s(z)) :- sum(x,y,z) .

prod(0,y,0) .
prod(s(x),y,z) :- prod(x,y,w) , sum(w,y,z) .

div(s(y),z) :- prod(x,s(y),z) .
```

$\mathsf{div}(z, \mathsf{s}(\mathsf{s}(0)))$ $\quad \sigma_1 = [z = \mathsf{s}(y_1), z_1 = \mathsf{s}(\mathsf{s}(0))]$

$\nwarrow_{\widehat{\sigma}_1}$ $\mathsf{prod}(x_1, \mathsf{s}(y_1), \mathsf{s}(\mathsf{s}(0)))$

$\sigma_2 = [x_1 = \mathsf{s}(x_2), y_2 = \mathsf{s}(y_1), z_2 = \mathsf{s}(\mathsf{s}(0))]$

$\nwarrow_{\widehat{\sigma}_2}$ $\mathsf{prod}(x_2, \mathsf{s}(y_1), w_2)$, $\mathsf{sum}(w_2, \mathsf{s}(y_1), \mathsf{s}(\mathsf{s}(0)))$

$\sigma_3 = [x_2 = \mathsf{s}(x_3), y_3 = \mathsf{s}(y_1), z_3 = w_2]$

$\nwarrow_{\widehat{\sigma}_3}$ $\mathsf{prod}(x_3, \mathsf{s}(y_1), w_3), \mathsf{sum}(w_3, \mathsf{s}(y_1), w_2), \mathsf{sum}(w_2, \mathsf{s}(y_1), \mathsf{s}(\mathsf{s}(0)))$

$\sigma_4 = [x_3 = 0, y_4 = \mathsf{s}(y_1), w_3 = 0]$

$\nwarrow_{\widehat{\sigma}_4}$ $\mathsf{sum}(0, \mathsf{s}(y_1), w_2)$, $\mathsf{sum}(w_2, \mathsf{s}(y_1), \mathsf{s}(\mathsf{s}(0)))$

$\sigma_5 = [y_5 = \mathsf{s}(y_1), w_2 = \mathsf{s}(y_1)]$

$\nwarrow_{\widehat{\sigma}_5}$ $\mathsf{sum}(\mathsf{s}(y_1), \mathsf{s}(y_1), \mathsf{s}(\mathsf{s}(0)))$ $\quad \sigma_6 = [x_6 = y_1, y_6 = \mathsf{s}(y_1), z_6 = \mathsf{s}(0)]$

$\nwarrow_{\widehat{\sigma}_6}$ $\mathsf{sum}(y_1, \mathsf{s}(y_1), \mathsf{s}(0))$ $\quad \sigma_7 = [y_1 = 0, y_7 = \mathsf{s}(0)]$

$\nwarrow_{\widehat{\sigma}_7}$ $\square$ $\quad z = \mathsf{s}(0)$

Alternatively:

```
sum(0,y,y) .
sum(s(x),y,s(z)) :- sum(x,y,z) .

prod(0,y,0) .
prod(s(x),y,z) :- prod(x,y,w) , sum(w,y,z) .

div(s(y),z) :- prod(x,s(y),z) .
```

$\mathsf{div}(z, \mathsf{s}(\mathsf{s}(0)))$ $\qquad \sigma_1 = [z = \mathsf{s}(y_1), z_1 = \mathsf{s}(\mathsf{s}(0))]$

$\nwarrow_{\widehat{\sigma}_1}$ $\mathsf{prod}(x_1, \mathsf{s}(y_1), \mathsf{s}(\mathsf{s}(0)))$

$\sigma_2 = [x_1 = \mathsf{s}(x_2), y_2 = \mathsf{s}(y_1), z_2 = \mathsf{s}(\mathsf{s}(0))]$

$\nwarrow_{\widehat{\sigma}_2}$ $\mathsf{prod}(x_2, \mathsf{s}(y_1), w_2)\ ,\ \mathsf{sum}(w_2, \mathsf{s}(y_1), \mathsf{s}(\mathsf{s}(0)))$

$\sigma_3 = [x_2 = \mathsf{s}(x_3), y_3 = \mathsf{s}(y_1), z_3 = w_2]$

$\nwarrow_{\widehat{\sigma}_3}$ $\mathsf{prod}(x_3, \mathsf{s}(y_1), w_3), \mathsf{sum}(w_3, \mathsf{s}(y_1), w_2), \mathsf{sum}(w_2, \mathsf{s}(y_1), \mathsf{s}(\mathsf{s}(0)))$

$\sigma_4 = [x_3 = 0, y_4 = \mathsf{s}(y_1), w_3 = 0]$

$\nwarrow_{\widehat{\sigma}_4}$ $\mathsf{sum}(0, \mathsf{s}(y_1), w_2)\ ,\ \mathsf{sum}(w_2, \mathsf{s}(y_1), \mathsf{s}(\mathsf{s}(0)))$

$\sigma_5 = [y_5 = \mathsf{s}(y_1), w_2 = \mathsf{s}(y_1)]$

$\nwarrow_{\widehat{\sigma}_5}$ $\mathsf{sum}(\mathsf{s}(y_1), \mathsf{s}(y_1), \mathsf{s}(\mathsf{s}(0)))$ $\qquad \sigma_6 = [x_6 = y_1, y_6 = \mathsf{s}(y_1), z_6 = \mathsf{s}(0)]$

$\nwarrow_{\widehat{\sigma}_6}$ $\mathsf{sum}(y_1, \mathsf{s}(y_1), \mathsf{s}(0))$

```
sum(0,y,y) .
sum(s(x),y,s(z)) :- sum(x,y,z) .

prod(0,y,0) .
prod(s(x),y,z) :- prod(x,y,w) , sum(w,y,z) .

div(s(y),z) :- prod(x,s(y),z) .
```

$\mathsf{div}(z, \mathsf{s}(\mathsf{s}(0)))$ $\qquad \sigma_1 = [z = \mathsf{s}(y_1), z_1 = \mathsf{s}(\mathsf{s}(0))]$

$\nwarrow_{\widehat{\sigma}_1} \mathsf{prod}(x_1, \mathsf{s}(y_1), \mathsf{s}(\mathsf{s}(0)))$

$\sigma_2 = [x_1 = \mathsf{s}(x_2), y_2 = \mathsf{s}(y_1), z_2 = \mathsf{s}(\mathsf{s}(0))]$

$\nwarrow_{\widehat{\sigma}_2} \mathsf{prod}(x_2, \mathsf{s}(y_1), w_2)\ ,\ \mathsf{sum}(w_2, \mathsf{s}(y_1), \mathsf{s}(\mathsf{s}(0)))$

$\sigma_3 = [x_2 = \mathsf{s}(x_3), y_3 = \mathsf{s}(y_1), z_3 = w_2]$

$\nwarrow_{\widehat{\sigma}_3} \mathsf{prod}(x_3, \mathsf{s}(y_1), w_3), \mathsf{sum}(w_3, \mathsf{s}(y_1), w_2), \mathsf{sum}(w_2, \mathsf{s}(y_1), \mathsf{s}(\mathsf{s}(0)))$

$\sigma_4 = [x_3 = 0, y_4 = \mathsf{s}(y_1), w_3 = 0]$

$\nwarrow_{\widehat{\sigma}_4} \mathsf{sum}(0, \mathsf{s}(y_1), w_2)\ ,\ \mathsf{sum}(w_2, \mathsf{s}(y_1), \mathsf{s}(\mathsf{s}(0)))$

$\sigma_5 = [y_5 = \mathsf{s}(y_1), w_2 = \mathsf{s}(y_1)]$

$\nwarrow_{\widehat{\sigma}_5} \mathsf{sum}(\mathsf{s}(y_1), \mathsf{s}(y_1), \mathsf{s}(\mathsf{s}(0)))$ $\qquad \sigma_6 = [x_6 = y_1, y_6 = \mathsf{s}(y_1), z_6 = \mathsf{s}(0)]$

$\nwarrow_{\widehat{\sigma}_6} \mathsf{sum}(y_1, \mathsf{s}(y_1), \mathsf{s}(0))$ $\qquad \sigma_7 = [y_1 = \mathsf{s}(x_7), y_7 = \mathsf{s}(\mathsf{s}(x_7)), z_7 = 0]$

```
sum(0,y,y) .
sum(s(x),y,s(z)) :- sum(x,y,z) .

prod(0,y,0) .
prod(s(x),y,z) :- prod(x,y,w) , sum(w,y,z) .

div(s(y),z) :- prod(x,s(y),z) .
```

$\mathsf{div}(z, \mathsf{s}(\mathsf{s}(0)))$ $\qquad \sigma_1 = [z = \mathsf{s}(y_1), z_1 = \mathsf{s}(\mathsf{s}(0))]$

$\nwarrow_{\widehat{\sigma}_1}$ $\mathsf{prod}(x_1, \mathsf{s}(y_1), \mathsf{s}(\mathsf{s}(0)))$

$\sigma_2 = [x_1 = \mathsf{s}(x_2), y_2 = \mathsf{s}(y_1), z_2 = \mathsf{s}(\mathsf{s}(0))]$

$\nwarrow_{\widehat{\sigma}_2}$ $\mathsf{prod}(x_2, \mathsf{s}(y_1), w_2)\ ,\ \mathsf{sum}(w_2, \mathsf{s}(y_1), \mathsf{s}(\mathsf{s}(0)))$

$\sigma_3 = [x_2 = \mathsf{s}(x_3), y_3 = \mathsf{s}(y_1), z_3 = w_2]$

$\nwarrow_{\widehat{\sigma}_3}$ $\mathsf{prod}(x_3, \mathsf{s}(y_1), w_3), \mathsf{sum}(w_3, \mathsf{s}(y_1), w_2), \mathsf{sum}(w_2, \mathsf{s}(y_1), \mathsf{s}(\mathsf{s}(0)))$

$\sigma_4 = [x_3 = 0, y_4 = \mathsf{s}(y_1), w_3 = 0]$

$\nwarrow_{\widehat{\sigma}_4}$ $\mathsf{sum}(0, \mathsf{s}(y_1), w_2)\ ,\ \mathsf{sum}(w_2, \mathsf{s}(y_1), \mathsf{s}(\mathsf{s}(0)))$

$\sigma_5 = [y_5 = \mathsf{s}(y_1), w_2 = \mathsf{s}(y_1)]$

$\nwarrow_{\widehat{\sigma}_5}$ $\mathsf{sum}(\mathsf{s}(y_1), \mathsf{s}(y_1), \mathsf{s}(\mathsf{s}(0)))$ $\qquad \sigma_6 = [x_6 = y_1, y_6 = \mathsf{s}(y_1), z_6 = \mathsf{s}(0)]$

$\nwarrow_{\widehat{\sigma}_6}$ $\mathsf{sum}(y_1, \mathsf{s}(y_1), \mathsf{s}(0))$ $\qquad \sigma_7 = [y_1 = \mathsf{s}(x_7), y_7 = \mathsf{s}(\mathsf{s}(x_7)), z_7 = 0]$

```
sum(0,y,y) .
sum(s(x),y,s(z)) :- sum(x,y,z) .

prod(0,y,0) .
prod(s(x),y,z) :- prod(x,y,w) , sum(w,y,z) .

div(s(y),z) :- prod(x,s(y),z) .
```

$\mathsf{div}(z, \mathsf{s}(\mathsf{s}(0)))$ $\qquad \sigma_1 = [\boxed{z = \mathsf{s}(y_1)}, z_1 = \mathsf{s}(\mathsf{s}(0))]$

$\nwarrow_{\widehat{\sigma}_1}$ $\mathsf{prod}(x_1, \mathsf{s}(y_1), \mathsf{s}(\mathsf{s}(0)))$

$\sigma_2 = [\boxed{x_1 = \mathsf{s}(x_2)}, y_2 = \mathsf{s}(y_1), z_2 = \mathsf{s}(\mathsf{s}(0))]$

$\nwarrow_{\widehat{\sigma}_2}$ $\mathsf{prod}(x_2, \mathsf{s}(y_1), w_2)\ ,\ \mathsf{sum}(w_2, \mathsf{s}(y_1), \mathsf{s}(\mathsf{s}(0)))$

$\sigma_3 = [\boxed{x_2 = \mathsf{s}(x_3)}, y_3 = \mathsf{s}(y_1), z_3 = w_2]$

$\nwarrow_{\widehat{\sigma}_3}$ $\mathsf{prod}(x_3, \mathsf{s}(y_1), w_3), \mathsf{sum}(w_3, \mathsf{s}(y_1), w_2), \mathsf{sum}(w_2, \mathsf{s}(y_1), \mathsf{s}(\mathsf{s}(0)))$

$\sigma_4 = [\boxed{x_3 = 0}, y_4 = \mathsf{s}(y_1), w_3 = 0]$

$\nwarrow_{\widehat{\sigma}_4}$ $\mathsf{sum}(0, \mathsf{s}(y_1), w_2)\ ,\ \mathsf{sum}(w_2, \mathsf{s}(y_1), \mathsf{s}(\mathsf{s}(0)))$

$\sigma_5 = [y_5 = \mathsf{s}(y_1), \boxed{w_2 = \mathsf{s}(y_1)}]$

$\nwarrow_{\widehat{\sigma}_5}$ $\mathsf{sum}(\mathsf{s}(y_1), \mathsf{s}(y_1), \mathsf{s}(\mathsf{s}(0)))$ $\qquad \sigma_6 = [x_6 = y_1, y_6 = \mathsf{s}(y_1), z_6 = \mathsf{s}(0)]$

$\nwarrow_{\widehat{\sigma}_6}$ $\mathsf{sum}(y_1, \mathsf{s}(y_1), \mathsf{s}(0))$ $\qquad \sigma_7 = [\boxed{y_1 = \mathsf{s}(x_7)}, y_7 = \mathsf{s}(\mathsf{s}(x_7)), z_7 = 0]$

$\nwarrow_{\widehat{\sigma}_7}$ $\mathsf{sum}(x_7, \mathsf{s}(\mathsf{s}(x_7)), 0)$

```
sum(0,y,y) .
sum(s(x),y,s(z)) :- sum(x,y,z) .

prod(0,y,0) .
prod(s(x),y,z) :- prod(x,y,w) , sum(w,y,z) .

div(s(y),z) :- prod(x,s(y),z) .
```

$\mathsf{div}(z, \mathsf{s}(\mathsf{s}(0)))$

$\sigma_1 = [\boxed{z = \mathsf{s}(y_1)}, z_1 = \mathsf{s}(\mathsf{s}(0))]$

$\nwarrow_{\widehat{\sigma}_1}$ $\mathsf{prod}(x_1, \mathsf{s}(y_1), \mathsf{s}(\mathsf{s}(0)))$

$\sigma_2 = [\boxed{x_1 = \mathsf{s}(x_2)}, y_2 = \mathsf{s}(y_1), z_2 = \mathsf{s}(\mathsf{s}(0))]$

$\nwarrow_{\widehat{\sigma}_2}$ $\mathsf{prod}(x_2, \mathsf{s}(y_1), w_2)\ ,\ \mathsf{sum}(w_2, \mathsf{s}(y_1), \mathsf{s}(\mathsf{s}(0)))$

$\sigma_3 = [\boxed{x_2 = \mathsf{s}(x_3)}, y_3 = \mathsf{s}(y_1), z_3 = w_2]$

$\nwarrow_{\widehat{\sigma}_3}$ $\mathsf{prod}(x_3, \mathsf{s}(y_1), w_3), \mathsf{sum}(w_3, \mathsf{s}(y_1), w_2), \mathsf{sum}(w_2, \mathsf{s}(y_1), \mathsf{s}(\mathsf{s}(0)))$

$\sigma_4 = [\boxed{x_3 = 0}, y_4 = \mathsf{s}(y_1), w_3 = 0]$

$\nwarrow_{\widehat{\sigma}_4}$ $\mathsf{sum}(0, \mathsf{s}(y_1), w_2)\ ,\ \mathsf{sum}(w_2, \mathsf{s}(y_1), \mathsf{s}(\mathsf{s}(0)))$

$\sigma_5 = [y_5 = \mathsf{s}(y_1), \boxed{w_2 = \mathsf{s}(y_1)}]$

$\nwarrow_{\widehat{\sigma}_5}$ $\mathsf{sum}(\mathsf{s}(y_1), \mathsf{s}(y_1), \mathsf{s}(\mathsf{s}(0)))$ $\quad \sigma_6 = [x_6 = y_1, y_6 = \mathsf{s}(y_1), z_6 = \mathsf{s}(0)]$

$\nwarrow_{\widehat{\sigma}_6}$ $\mathsf{sum}(y_1, \mathsf{s}(y_1), \mathsf{s}(0))$ $\quad \sigma_7 = [\boxed{y_1 = \mathsf{s}(x_7)}, y_7 = \mathsf{s}(\mathsf{s}(x_7)), z_7 = 0]$

$\nwarrow_{\widehat{\sigma}_7}$ $\mathsf{sum}(x_7, \mathsf{s}(\mathsf{s}(x_7)), 0)$ **Fail!**