Norme di vettori e matrici

Note Title 2026-03-04

$$v = \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_n \end{bmatrix} \in \mathbb{C}^n$$

Definizione: una norma vettoriale è una funzione $f: \mathbb{C}^n \to \mathbb{R}$ (che si indica con $\|v\|$) tale che

1. $\|v\| \geq 0$, e $\|v\| = 0$ solo quando $v = 0$,
2. $\|v\alpha\| = \|v\| \cdot |\alpha|$ per ogni $v \in \mathbb{C}^n$, $\alpha \in \mathbb{C}$,
3. $\|v + w\| \leq \|v\| + \|w\|$ per ogni $v, w \in \mathbb{C}^n$.
   (disuguaglianza triangolare)

Esempi:
- il valore assoluto, se $n = 1$.
- "norma-2", o norma euclidea:
  $$\|v\|_2 = \sqrt{|v_1|^2 + |v_2|^2 + \dots + |v_n|^2}$$
- "norma-1":
  $$\|v\|_1 = |v_1| + |v_2| + \dots + |v_n|$$
- "norma-∞":
  $$\|v\|_\infty = \max_{k=1\dots n} |v_k|$$

Es: $v = \begin{bmatrix} 1 \\ -3 \\ 2 \end{bmatrix}$

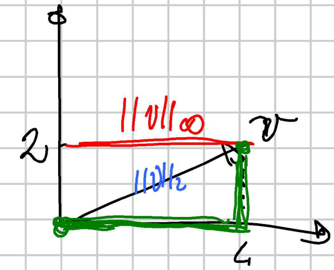
$$\|v\|_2 = \sqrt{1^2 + (-3)^2 + 2^2} = \sqrt{14}$$
$$\|v\|_1 = |1| + |-3| + |2| = 6$$
$$\|v\|_\infty = \max(1, 3, 2) = 3.$$

Le tre norme misurano la lunghezza dei vettori in modo diverso!

Date due norme qualunque, esistono sempre costanti c_1, c_2 (dipendenti dalla dimensione) tali che

$$C_1 \|v\|_A \leq \|v\|_B \leq C_2 \|v\|_A$$

es. $$\|v\|_\infty \leq \|v\|_2 \leq \sqrt{n}\, \|v\|_\infty$$



<u>Def</u>: una funzione $f: \mathbb{C}^{n \times n} \to \mathbb{R}$ si chiama <u>norma matriciale</u> (e si indica con $\|A\|$) se soddisfa queste proprietà:

1. $\|A\| \geq 0$, e $\|A\| = 0$ se e solo se $A = 0$.
2. $\|\alpha A\| = |\alpha| \cdot \|A\|$ per ogni $\alpha \in \mathbb{C}$, $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$
3. $\|A+B\| \leq \|A\| + \|B\|$ per ogni $A, B \in \mathbb{C}^{n \times n}$ (disuguaglianza triangolare)
4. $\|AB\| \leq \|A\| \cdot \|B\|$.

<u>ES</u>: norma di Frobenius:

$$\|A\|_F = \sqrt{|a_{11}|^2 + |a_{12}|^2 + \ldots + |a_{1n}|^2 + |a_{21}|^2 + |a_{22}|^2 + \ldots + |a_{nn}|^2}$$

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & & \\ & & \ddots & \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}.$$

Esiste un modo di costruire una norma matriciale a partire da ogni norma vettoriale: partendo da $\|v\|_p$, definisco

$$\|A\|_p = \max_{u \text{ t.c. } \|u\|_p = 1} \|Au\|_p$$

Questa si chiama norma matriciale <u>indotta</u> dalla norma vettoriale $\|v\|_p$, e di solito si indica con lo stesso pedice.

Questa definizione non è molto comoda computazionalmente!

Formule per calcolare le norme 1, 2, ∞ di una matrice:

$$\|A\|_1 = \max_{j=1}^{n} \sum_{i=1}^{n} |A_{ij}|$$

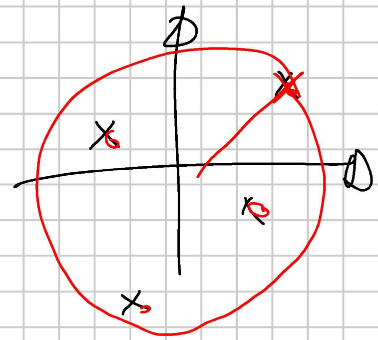
$$\|A\|_\infty = \max_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} |A_{ij}|.$$

$$\|A\|_2 = \sqrt{\rho(A^T A)}$$

dove $\rho(M) = \max_{\lambda \text{ autoval. di } M} |\lambda|$ è il <u>raggio spettrale</u> di M

$\underset{\mathbb{C}}{\underset{\cap}{\lambda}}$ si dice <u>autovalore</u> di M se esiste $\underset{\mathbb{C}^n}{\underset{\cap}{v \neq 0}}$ t.c. $Mv = v\lambda$.

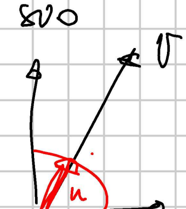
Per calcolare autovalori in Matlab:
eig, da "eigenvalue"
("eigenvector").



<u>Teo</u>: (compatibilità delle norme matriciali indotte):
Siano date una norma vettoriale $v \mapsto \|v\|_p$, e la corrispondente norma matriciale indotta $A \mapsto \|A\|_p$.
Allora, vale che

$$\underset{\text{vettore}}{\|Av\|_p} \leq \underset{\text{matrice}}{\|A\|_p} \cdot \underset{\text{vettore}}{\|v\|_p} \qquad \text{per ogni } A \in \mathbb{C}^{n \times n},\ v \in \mathbb{C}^n$$

<u>Dim</u>: partiamo dal caso $v \neq 0$. Allora, esiste un suo multiplo $u = v \cdot \alpha$ tale che $\|u\|_p = 1$:
basta prendere $\alpha = \frac{1}{\|v\|_p}$, difatti



$$\|v\alpha\|_p \underset{\uparrow}{=} \|v\|_p \cdot |\alpha| = \|v\|_p \cdot \frac{1}{\|v\|_p} = 1$$

propr. 2 norme vett.

$$\frac{1}{\|v\|_p}\|Av\|_p \underset{\uparrow}{=} \|Av\alpha\|_p = \|Au\|_p \leq \max_{u \text{ t.c. } \|u\|_p=1} \|Au\|_p \underset{\uparrow}{=} \|A\|_p$$

propr. 2 delle norme vettoriali

definizione di norma matriciale indotta

$\|Av\|_p \leq \|A\|_p \cdot \|v\|_p$, moltiplicando per $\|v\|_p$ da entrambi i lati.

Mi rimane il caso $v=0$. Ma in questo caso, $Av=0$, quindi

devo mostrare $\underbrace{\|Av\|_p}_{0} \leq \underbrace{\|A\|_p \cdot \|v\|_p}_{\substack{\| \\ 0}}$ che è ovvio $\square$

⚠ La disuguaglianza $\|Av\|_p \leq \|A\|_p \cdot \|v\|_p$ è vera solo se uso la norma di matrice indotta dalla norma vettoriale, in generale non è vero che $\|Av\|_2 \leq \|A\|_\infty \cdot \|v\|_2$.

⚠ Non tutte le norme matriciali sono indotte da una norma vettoriale, per esempio la norma di Frobenius non è una norma indotta.

Disuguaglianza tra raggio spettrale e norme:

Teo: (teorema di HIRSCH)

$$\rho(A) \leq \|A\|_p$$

per ogni norma matriciale indotta $\|\cdot\|_p$.

Dim: ricordiamo che $\lambda \in \mathbb{C}$, $v \in \mathbb{C}^n$ sono un autovalore e un autovettore associato della matrice A se

$$Av = v \cdot \lambda \qquad \text{e} \qquad v \neq 0$$

Prendiamo un autovalore λ, e prendiamo la norma da entrambi i lati dell'equazione sopra, la norma vettoriale che induce la norma che ci interessa.

$$\|A\|_p \cdot \|v\|_p \geq \|Av\|_p = \|\lambda v\|_p = \|v\|_p \, |\lambda|$$

teo. di compatibilità.

propr. 2 delle norme vett.

Posso semplificare $\|v\|_p > 0$: $v \neq 0$, quindi anche la sua norma lo è.

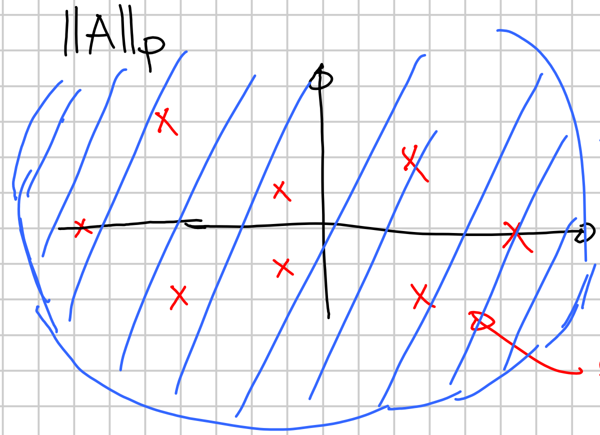
Quindi ottengo che

$$|\lambda| \leq \|A\|_p .$$

Questa disuguaglianza vale per tutti gli autovalori λ, quindi

$$\rho(A) = \max_{\substack{\lambda \text{ autoval.} \\ \text{di } A}} |\lambda| \leq \|A\|_p . \qquad \square$$

Oss: da questi risultati, segue che tutti gli autovalori di A stanno dentro un cerchio centrato nell'origine di raggio $\|A\|_p$



Con queste norme, possiamo definire ad esempio errori relativi tra vettori e matrici: dato $v \in \mathbb{C}^n$, e una sua perturbazione $\tilde{v} \in \mathbb{C}^n$, posso definire

$$\varepsilon_{rel} = \frac{\|\tilde{v} - v\|_p}{\|v\|_p} \qquad v = \begin{bmatrix} 5.1 \\ 4.2 \end{bmatrix} \quad \tilde{v} = \begin{bmatrix} 5.2 \\ 4.3 \end{bmatrix}$$

Recap: sistemi di equazioni lineari

$$\begin{bmatrix} A_{11} & \cdots & A_{1n} \\ \vdots & \ddots & \\ A_{n1} & & A_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix}$$

$A \in \mathbb{C}^{n \times n}$ $\qquad$ $x \in \mathbb{C}^n$ $\qquad$ $b \in \mathbb{C}^n$

Dati $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$, $b \in \mathbb{C}^n$, trovare $x \in \mathbb{C}^n$ tale che
$$Ax = b$$

Il sistema ha una e una sola soluzione se e solo se A è invertibile

$x = A^{-1}b$, dove A^{-1} è la matrice inversa di A, cioè una matrice t.c. $A^{-1}A = AA^{-1} = I = \begin{bmatrix} 1 & & \\ & \ddots & \\ & & 1 \end{bmatrix}$

(gli elementi che ometto sono 0).

⚠ inv(A) * b non è il modo migliore per risolvere un sistema lineare, né come costo, né come stabilità

⚠ I prodotti in algebra lineare non sono commutativi!

$x = b \cdot A^{-1}$ non ha senso!

$x = \dfrac{b}{A}$ non ha senso!

$\varepsilon_{rel} = \left\| \dfrac{\tilde{v} - v}{v} \right\|_p$ non ha senso! (non si può dividere per vettori/matrici!)

Matlab ha due operatori di divisione:

$5 / 2 = 2.5$

$5 \backslash 2 = \frac{2}{5} = 0.4$

mnemonica: si divide per il numero "sotto" la barra

Funzionano anche su matrici:

$A \backslash b = A^{-1}b$

$B / A = B \cdot A^{-1}$