Su un metodo di punto fisso (ad esempio) due fonti di errore:

- ci arrestiamo dopo K iterazioni, quindi abbiamo x_k anziché α

$$e_{an} = \frac{|x_k - \alpha|}{|\alpha|} \qquad \text{ERRORE ANALITICO}$$

indipendente dalle approssimazioni di macchina

$$|x_k - \alpha| \sim r^k$$

- eseguiamo le operazioni su un computer in virgola mobile

$$\begin{cases} x_0 & \text{dato} \\ x_{k+1} = \Phi(x_k) \end{cases} \longrightarrow \begin{cases} \tilde{x}_0 & \text{appross. di } x_0 \\ \tilde{x}_{k+1} = \tilde{\Phi}(\tilde{x}_k) \end{cases}$$

versione di Φ con operazioni di macchina

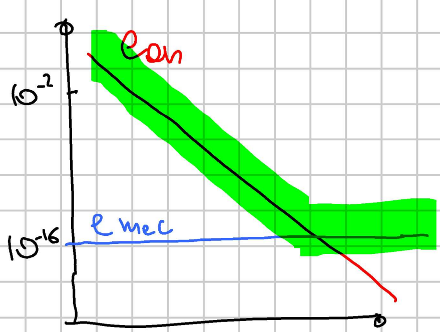
e partire da $\tilde{x}_k$ affetto da errori

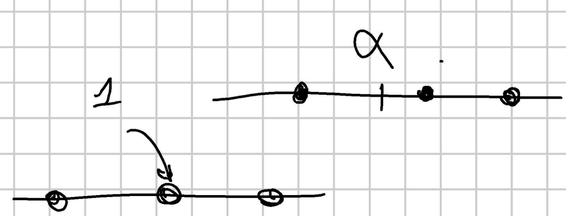
$$e_{mec} = \frac{|\tilde{x}_k - x_k|}{|x_k|}$$

$$e_{tot} = \left| \frac{\tilde{x}_k - \alpha}{\alpha} \right| \qquad e_{tot} \doteq e_{an} + e_{mec}$$

perché le due approssimazioni successive:

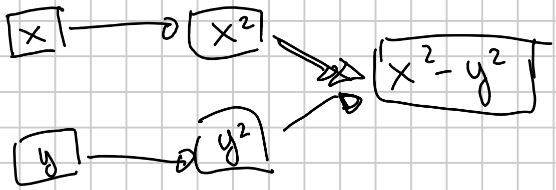
$$\alpha \to x_k \to \tilde{x}_k$$



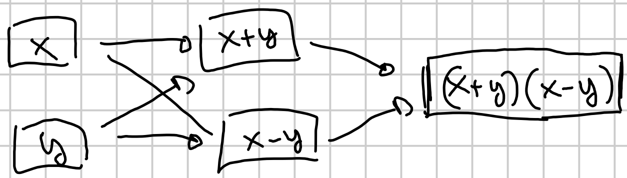


Grafo computazionale:

$$f(x,y) = x^2 - y^2$$



$$f(x,y) = (x+y)(x-y)$$



Posso analizzare ogni singola parte del grafo utilizzando i teoremi visti la scorsa settimana. Ad es.,

$$\overset{\varepsilon_x}{\boxed{x}} \xrightarrow{2} \overset{\varepsilon_1}{\boxed{A=x^2}}$$

Per vedere come impatta ε_x sull'errore ε_A, posso usare il teorema sul coefficiente di amplificazione: ~~sto~~ calcolando $f(x)=x^2$

ε_x produce un errore su x^2 pari a $2\cancel{x}\,\frac{\cancel{x}}{\cancel{x^2}} \cdot \varepsilon_x = 2\varepsilon_x$

Questo si combina con l'errore dovuto all'operazione di macchina $\tilde{x} \odot \tilde{x} = \tilde{x}^2(1+\varepsilon_1)$

$$\underset{2\varepsilon_x}{x^2 \to \tilde{x}^2} \to \underset{\varepsilon_1}{\tilde{x} \odot \tilde{x}}$$

$$\varepsilon_A = 2\varepsilon_x + \varepsilon_1$$

Allo stesso modo:

$$\overset{\varepsilon_y}{\boxed{y}} \xrightarrow{2} \overset{\varepsilon_2}{\boxed{B=y^2}}$$

$$\varepsilon_B = 2\varepsilon_y + \varepsilon_2$$

Infine, studio l'errore sulla differenza:

$$\begin{array}{ccc} \boxed{A=x^2} & \xrightarrow{\frac{A}{A-B}} & \\ & & \overset{\varepsilon_3}{\boxed{A-B}} \\ \boxed{B=y^2} & \xrightarrow[\frac{-B}{A-B}]{} & \end{array}$$

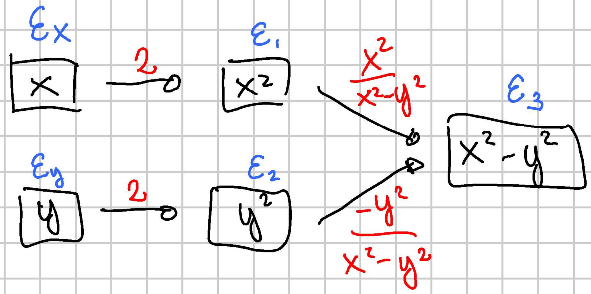
Posso calcolare i coeff. di amplificazione di $C=A-B$ rispetto ad A e B:

$$\frac{\partial C}{\partial A}\cdot\frac{A}{C} = 1\cdot\frac{A}{A-B} \quad , \quad \frac{\partial C}{\partial B}\cdot\frac{B}{C} = -1\cdot\frac{B}{A-B}$$

L'errore su $C=A-B$ è $\frac{A}{A-B}\varepsilon_A - \frac{B}{A-B}\varepsilon_B + \varepsilon_3$

$$\varepsilon_{mac} = \frac{x^2}{x^2-y^2}(2\varepsilon_x+\varepsilon_1) - \frac{y^2}{x^2-y^2}(2\varepsilon_y+\varepsilon_2)+\varepsilon_3$$

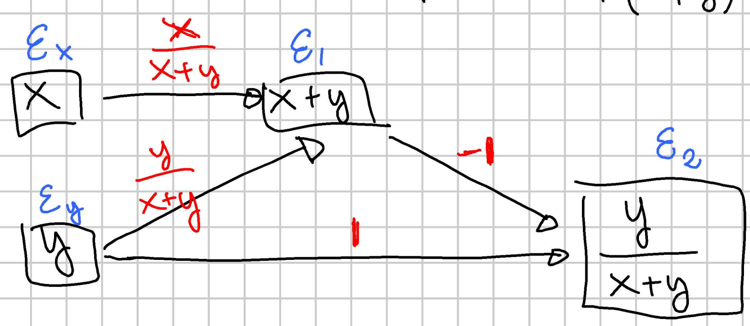
Riscrivendo il grafo tutto intero con le etichette che abbiamo aggiunto, abbiamo:



Per ottenere i coefficienti dovuti al singolo errore, mi basta moltiplicare tra loro le etichette su ogni percorso che lo collega al risultato finale, e poi sommare i contributi di tutti i percorsi.

$$\varepsilon_{mac} = 2\,\frac{x^2}{x^2-y^2}\varepsilon_x + 2\cdot\frac{-y^2}{x^2-y^2}\varepsilon_y + \frac{x^2}{x^2-y^2}\varepsilon_1 + \frac{-y^2}{x^2-y^2}\varepsilon_2 + \varepsilon_3$$

Vediamo un altro esempio: $f(x,y) = \frac{y}{x+y}$



Coeff. di propagazione da x a $x+y$: $\frac{\partial(x+y)}{\partial x}\cdot\frac{x}{x+y} = \frac{x}{x+y}$

Coeff. di propagazione per un rapporto: $A,B \to A/B$

$$\frac{\partial A/B}{\partial A}\cdot\frac{A}{A/B} = \frac{1}{B}\cdot\frac{A}{A/B} = 1 \quad \Big| \quad \frac{\partial A/B}{\partial B}\cdot\frac{B}{A/B} = -\frac{A}{B^2}\cdot\frac{B}{A/B} = -1$$

$$\varepsilon_{mac} = \frac{x}{x+y}\cdot(-1)\cdot\varepsilon_x + \frac{y}{x+y}\cdot(-1)\,\varepsilon_y + 1\cdot\varepsilon_y + (-1)\,\varepsilon_1 + \varepsilon_2$$

$$|\varepsilon_{mac}| \leq \left|\frac{x}{x+y}\right| \cdot |\varepsilon_x| + \left|1 - \frac{y}{x+y}\right| |\varepsilon_y| + |-1| \cdot |\varepsilon_1| + |\varepsilon_2|$$

$$\leq \underbrace{\left|\frac{x}{x+y}\right| \cdot u + \left|\frac{x}{x+y}\right| u}_{\varepsilon_{in}} + \underbrace{u + u}_{\varepsilon_{alg}}.$$

$$\frac{\partial \frac{y}{x+y}}{\partial x} \cdot \frac{x}{\frac{y}{x+y}} = \frac{-\cancel{y}}{(x+y)^{\cancel{2}}} \cdot \frac{x}{\frac{\cancel{y}}{\cancel{x+y}}} = -\frac{x}{x+y}$$

Quando $x+y$ è molto più piccolo di x, il problema è mal condizionato: errori su x, y in ingresso determinano grandi errori sul risultato   es. $x=1$, $y=-0.999$

ε_{alg} è sempre dell'ordine della prec. di macchina.

Sull'esempio precedente:

$$\varepsilon_{mac} = 2\,\frac{x^2}{x^2-y^2}\varepsilon_x + 2\cdot\frac{-y^2}{x^2-y^2}\varepsilon_y + \frac{x^2}{x^2-y^2}\varepsilon_1 + \frac{-y^2}{x^2-y^2}\varepsilon_2 + \varepsilon_3$$

$$|\varepsilon_{mac}| \leq \underbrace{\left|\frac{2x^2}{x^2-y^2}\right| u + \left|\frac{2y^2}{x^2-y^2}\right| u}_{\varepsilon_{in}} + \underbrace{\left|\frac{x^2}{x^2-y^2}\right| u + \left|\frac{y^2}{x^2-y^2}\right| u + u}_{\varepsilon_{alg}}$$

ε_{alg} è sempre al più grande come il nostro bound su ε_{in} (più la precisione di macchina u) $\Rightarrow$ algoritmo stabile

Un algoritmo si dice stabile se
$$\frac{\varepsilon_{in}}{\max_i(K_{output,\, input_i})\, u + u}$$
è moderato.

Esempio: un algoritmo instabile

$$f(x) = (1+x)^2 - 1 = 2x + x^2$$

$$\overset{\varepsilon_x}{\boxed{x}} \xrightarrow{\frac{x}{1+x}} \overset{\varepsilon_1}{\boxed{1+x}} \xrightarrow{2} \overset{\varepsilon_2}{\boxed{(1+x)^2}} \xrightarrow{\frac{(1+x)^2}{(1+x)^2-1}} \overset{\varepsilon_3}{\boxed{(1+x)^2-1}}$$

$$\varepsilon_{mec} = \cancel{\frac{x}{1+x}}\, 2\, \frac{(1+x)^{\cancel{2}}}{2\cancel{x}+x^{\cancel{2}}}\, \varepsilon_x + \frac{2(1+x)^2}{2x+x^2}\, \varepsilon_1 + \frac{(1+x)^2}{2x+x^2}\, \varepsilon_2 + \varepsilon_3$$

$$= \underbrace{\frac{2(1+x)}{2+x}\, \varepsilon_x}_{\varepsilon_{in}} + \underbrace{\frac{2(1+x)^2}{2x+x^2}\, \varepsilon_1 + \frac{2(1+x)^2}{2x+x^2}\, \varepsilon_2 + \varepsilon_3}_{\varepsilon_{alg}}$$

Il problema è mal condizionato quando $x \approx -2$.
Però, ε_{alg} è grande anche quando $x \approx 0$
$\Rightarrow$ l'algoritmo è instabile quando $x \approx 0$

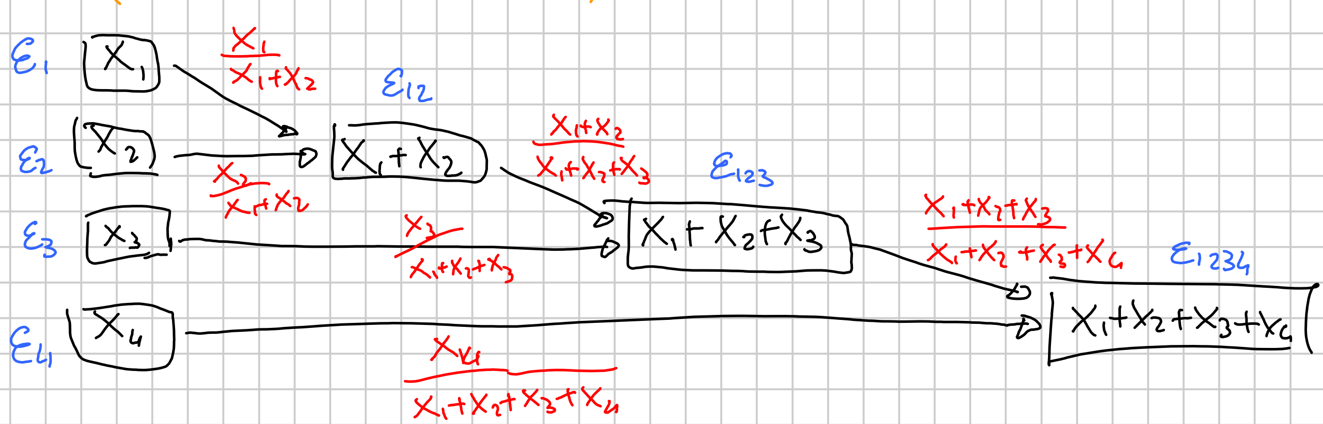
Esempio: somma di n numeri:

$$S = x_1 + x_2 + x_3 + \dots + x_n .$$

Condizionamento: $K_{S, x_k} = \frac{\partial S}{\partial x_k} \cdot \frac{x_k}{S} = 1 \cdot \frac{x_k}{S} = \frac{x_k}{S}$ $\quad k = 1, 2, \dots n$

Il problema è mal condizionato quando la somma è molto più piccola degli addendi, es. $1 - 0.999 = 0.001$

$$S = (((x_1 + x_2) + x_3) + x_4)$$



$$\frac{x_1}{\cancel{x_1+x_2}} \cdot \frac{\cancel{x_1+x_2}}{\cancel{x_1+x_2+x_3}} \cdot \frac{\cancel{x_1+x_2+x_3}}{x_1+x_2+x_3+x_4}\, \varepsilon_1 = \frac{x_1}{x_1+x_2+x_3+x_4} = \frac{x_1}{S}$$ come calcolato sopra.

I coefficienti dell'errore algoritmico sono

$$\frac{x_1+x_2}{S}\varepsilon_{12}+\frac{x_1+x_2+x_3}{S}\varepsilon_{123}+\underbrace{\frac{x_1+x_2+x_3+x_4}{S}}_{=1}\varepsilon_4$$

Un conto analogo per n addendi produce

$$\varepsilon_{alg}=\frac{x_1+x_2}{S}\varepsilon_{..}+\frac{x_1+x_2+x_3}{S}\varepsilon_{..}+\dots+\frac{x_1+x_2+\dots+x_{n-1}}{S}\varepsilon_{..}+\varepsilon_n$$

Se x_1 è molto più grande degli altri, $\varepsilon_{alg}\approx(n-1)u$

Se x_n è molto più grande degli altri, $\varepsilon_{alg}\approx u$

$\Rightarrow$ l'ordine degli addendi conta!

Supponiamo $x_1, x_2, \dots x_n \geq 0$

$$|\varepsilon_{alg}|\leq\frac{x_1+x_2}{S}u+\frac{x_1+x_2+x_3}{S}u+\dots+\frac{x_1+x_2+\dots+x_{n-1}}{S}u+\frac{S}{S}u$$

$$=\frac{(n-1)x_1+(n-1)x_2+(n-2)x_3+(n-3)x_4+\dots+2x_{n-1}+x_n}{S}u$$