Analisi dell'errore

Note Title 2026-02-20

Supponiamo di avere $x \neq 0$, $\tilde{x}$ e calcolare $y = f(x)$, $\tilde{y} = f(\tilde{x})$. ($f$ dipende da $x$, altri parametri/argomenti restano costanti).

Come sono legati $\varepsilon_x = \dfrac{\tilde{x} - x}{x}$, $\varepsilon_y = \dfrac{\tilde{y} - y}{y}$ ?

Lemma: Supponiamo che $f$ sia di classe $C^2$ (continua, derivabile 2 volte, $f''$ continua). Allora,

$$\underbrace{\frac{\tilde{y} - y}{y}}_{\varepsilon_y} \doteq \underbrace{\boxed{f'(x)\frac{x}{f(x)}}}_{\text{coefficiente di amplificazione}} \cdot \underbrace{\frac{\tilde{x} - x}{x}}_{\varepsilon_x} .$$

Con la notazione $A \doteq B$ intendiamo che $A = B + O(\varepsilon^2)$, cioè per quantità che contengono il prodotto di due errori quando $\varepsilon$ = (massimo degli errori) tende a $\emptyset$.

dim: Sviluppo di Taylor

$$\underbrace{f(\tilde{x})}_{\tilde{y}} = \underbrace{f(x)}_{y} + f'(x)\underbrace{(\tilde{x} - x)}_{x\varepsilon_x} + \underbrace{\frac{f''(\xi)}{2}\underbrace{(\tilde{x} - x)^2}_{x^2\varepsilon_x^2}}_{O(\varepsilon_x^2)}$$

$O(\varepsilon_x^2)$, possiamo ignorarlo nella notazione $\doteq$

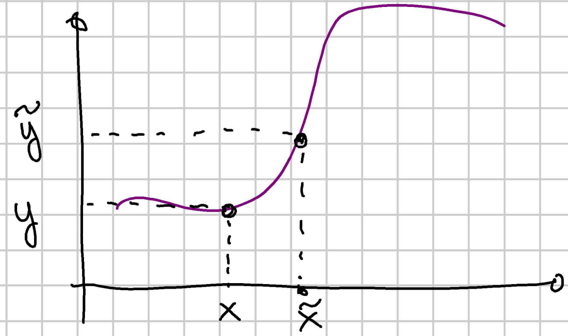
$$\boxed{\varepsilon_x = \frac{\tilde{x} - x}{x}}$$

$$f(\tilde{x}) \doteq f(x)\left[1 + \underbrace{\boxed{f'(x)\frac{x}{f(x)}\varepsilon_x}}_{\text{lo chiamo } \varepsilon_y}\right]$$

$$\tilde{y} = y(1 + \varepsilon_y) \iff \varepsilon_y = \frac{\tilde{y} - y}{y}. \qquad \square$$

$$\varepsilon_y = \boxed{f'(x)\,\frac{x}{f(x)}}\,\varepsilon_x$$

coeff. di amplificazione




**Def**: il numero di condizionamento di $f$ nel punto $x$ è il val. assoluto del coeff. di amplificazione

$$K_{f,x} = \left| f'(x)\,\frac{x}{f(x)} \right|$$ ← non c'è $\varepsilon_x$ !

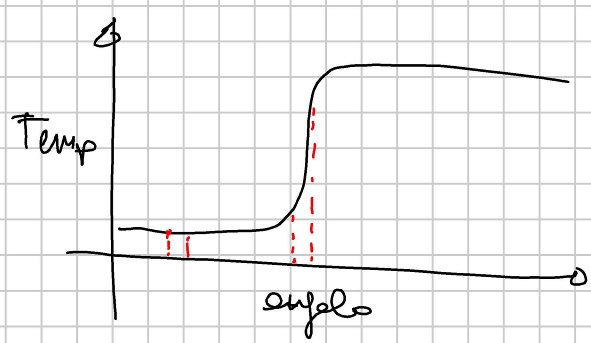
Una funzione si dice mal condizionata (in un punto $x$) se il suo numero di condizionamento è grande

ES: $f(x) = \dfrac{x}{1-x}$ ha numero di condizionamento

$$K_{f,x} = \left| f'(x)\,\frac{x}{f(x)} \right| = \left| \frac{1\cdot(1\cancel{-x}) \cancel{-x\cdot(-1)}}{(1-x)^2} \cdot \frac{\cancel{x}}{\frac{\cancel{x}}{1-x}} \right| = \left| \frac{1-x}{(1-x)^2} \right| = \left| \frac{1}{1-x} \right|$$

Questo numero di condizionamento è grande quando $x \approx 1$

[Esperimenti Matlab]




---

Errori successivi: A perturbato in B, poi B perturbato in C

$$0.9991 \to 0.999 \to 0.998$$
$$A \to B \to C$$

due errori relativi si combinano: $\varepsilon_1 = \dfrac{B-A}{A}$ $\quad \varepsilon_2 = \dfrac{C-B}{B}$

L'errore relativo dovuto alla composizione delle due perturbazioni è

$$\frac{C-A}{A} \doteq \varepsilon_1+\varepsilon_2$$

Dim:

$$\frac{B-A}{A} = \varepsilon_1 \iff \boxed{B = A(1+\varepsilon_1)}$$

$$\frac{C-B}{B} = \varepsilon_2 \iff \boxed{C = B(1+\varepsilon_2)}$$

$O(\varepsilon^2)$

$\varepsilon = \max(\varepsilon_1, \varepsilon_2)$

Allora, $C = B(1+\varepsilon_2) = A(1+\varepsilon_1)(1+\varepsilon_2) = A(1+\varepsilon_1+\varepsilon_2+\boxed{\varepsilon_1\varepsilon_2})$

$$\doteq A(1+\varepsilon_1+\varepsilon_2)$$

$$C \doteq A(1+\varepsilon_1+\varepsilon_2) \iff \frac{C-A}{A} \doteq \varepsilon_1+\varepsilon_2 .$$

$\square$

---

$z = f(x,y) = x^2-y^2$, calcoliamo l'errore di macchina commesso nel suo calcolo (al primo ordine)

$z = x*x - y*y$

$A = x*x$
$B = y*y$
$z = A-B$

In aritmetica di macchina, abbiamo errori da:

$\tilde{x}$, $\tilde{y}$ approssimano $x, y$ con numeri di macchina $\quad \tilde{x} = x(1+\varepsilon_x)$, $\tilde{y} = y(1+\varepsilon_y)$

$\tilde{A} = \tilde{x} \circledast \tilde{x}$ $\qquad \tilde{A} = \tilde{x}^2(1+\varepsilon_1)$

$\tilde{B} = \tilde{y} \circledast \tilde{y}$ $\qquad \tilde{B} = \tilde{y}^2(1+\varepsilon_2)$

$\tilde{z} = \tilde{A} \ominus \tilde{B}$ $\qquad \tilde{z} = (\tilde{A}-\tilde{B})(1+\varepsilon_3)$

→ errori nelle operazioni di macchina

---

Cerchiamo di calcolare gli errori sulle varie quantità senza perderci nei conti:

$$\tilde{A} = \tilde{x}^2(1+\varepsilon_1) = x^2(1+\varepsilon_x)^2(1+\varepsilon_1) = x^2(1+2\varepsilon_x+\cancel{\varepsilon_x^2})(1+\varepsilon_1)$$

$$\doteq x^2(1+2\varepsilon_x+\varepsilon_1+\cancel{2\varepsilon_x\varepsilon_1}) \doteq \underbrace{x^2}_{=A}(1+\underbrace{2\varepsilon_x+\varepsilon_1}_{\varepsilon_A})$$

$$\frac{\tilde{A}-A}{A} = \varepsilon_A = 2\varepsilon_x+\varepsilon_1$$

Se $|\varepsilon_x|, |\varepsilon_1| \leq u \approx 2.2\cdot 10^{-16}$ (precisione di macchina), allora

$$|\varepsilon_A| \leq 2|\varepsilon_x|+|\varepsilon_1| \leq 3u$$

Allo stesso modo, ho

$$\tilde{B} = \tilde{y}^2(1+\varepsilon_2) = y^2(1+\varepsilon_y)^2(1+\varepsilon_2) \qquad \varepsilon_B = 2\varepsilon_y+\varepsilon_2$$

$$\tilde{Z} = (\tilde{A}-\tilde{B})(1+\varepsilon_3) = \left(A(1+\varepsilon_A)-B(1+\varepsilon_B)\right)(1+\varepsilon_3)$$

$$=(A-B)\left(\frac{A}{A-B}+\frac{A}{A-B}\varepsilon_A-\frac{B}{A-B}-\frac{B}{A-B}\varepsilon_B\right)(1+\varepsilon_3)$$

$$=(A-B)\left(1+\frac{A}{A-B}\varepsilon_A-\frac{B}{A-B}\varepsilon_B\right)(1+\varepsilon_3)$$

$$\doteq \underbrace{(A-B)}_{Z}\left(1+\frac{A}{A-B}\varepsilon_A-\frac{B}{A-B}\varepsilon_B+\varepsilon_3\right)$$

$$\boxed{\begin{aligned}\varepsilon_Z &= \frac{A}{A-B}\varepsilon_A-\frac{B}{A-B}\varepsilon_B+\varepsilon_3 = \frac{A}{A-B}(2\varepsilon_x+\varepsilon_1)-\frac{B}{A-B}(2\varepsilon_y+\varepsilon_2)+\varepsilon_3\\ &= \boxed{\frac{2x^2}{x^2-y^2}}\varepsilon_x+\frac{x^2}{x^2-y^2}\varepsilon_1-\boxed{\frac{2y^2}{x^2-y^2}}\varepsilon_y-\frac{y^2}{x^2-y^2}\varepsilon_2+\varepsilon_3.\end{aligned}}$$

Usando il fatto che $|\varepsilon_x|, |\varepsilon_y|, |\varepsilon_1|, |\varepsilon_2|, |\varepsilon_3| \leq u$

$$|\varepsilon_Z| \leq \left|\frac{2x^2}{x^2-y^2}\right|u+\left|\frac{x^2}{x^2-y^2}\right|u+\left|\frac{2y^2}{x^2-y^2}\right|u+\left|\frac{y^2}{x^2-y^2}\right|u+|u|$$

Quando $x^2, y^2$ sono molto vicini tra loro (ad es. $x=1$, $y=0.999$), l'errore di macchina diventa grande.

$\to$ Errore di macchina grande per $x \approx \pm y$.

Siamo in grado di prevedere alcuni di questi coefficienti: ad esempio, concentriamoci sul coefficiente davanti a $\varepsilon_x$.

Se tutti gli altri errori $\varepsilon_y, \varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3$ fossero $0$, avremmo solo

$\tilde{z} = \tilde{x}^2 - y^2 = f(\tilde{x}, y)$ $\leftarrow$ errore ottenuto calcolando $f$ non in $x$, ma in $\tilde{x}$

$z = x^2 - y^2$

L'errore è

$$\varepsilon_z = \frac{\tilde{z}-z}{z} = \frac{\partial z}{\partial x} \cdot \frac{x}{z} \cdot \varepsilon_x = 2x \, \frac{x}{x^2-y^2} \, \varepsilon_x = \boxed{\frac{2x^2}{x^2-y^2}} \varepsilon_x$$

stesso coefficiente trovato sopra!

Allo stesso modo, il termine con $\varepsilon_y$ è l'errore che commetto se calcolo $\tilde{z} = f(x, \tilde{y})$ e ignoro tutti gli altri errori, ed è uguale a

$$\varepsilon_z = \frac{\partial z}{\partial y} \cdot \frac{y}{z} \varepsilon_y = -2y \cdot \frac{y}{x^2-y^2} \varepsilon_y = \boxed{-\frac{2y^2}{x^2-y^2}} \varepsilon_y$$

Possiamo pensare l'errore di macchina come la composizione di due errori successivi:

1) errore sugli input: $x \to \tilde{x}$, $\quad y \to \tilde{y}$

2) errore nelle operazioni commesse: $\tilde{x}^2 - \tilde{y}^2 \to (\tilde{x} \otimes \tilde{x}) \ominus (\tilde{y} \otimes \tilde{y})$

1) è detto <u>errore inerente</u> $\to$ $\dfrac{f(\tilde{x},\tilde{y}) - f(x,y)}{f(x,y)} = \varepsilon_{in}$

2) è detto <u>errore algoritmico</u> $\to$ $\dfrac{g(\tilde{x},\tilde{y}) - f(\tilde{x},\tilde{y})}{f(\tilde{x},\tilde{y})} = \varepsilon_{alg}$

dove $g(\tilde{x},\tilde{y})$ è la funzione che ottengo se rimpiazzo le operazioni dentro $f$ con operazioni di macchina.

Errori successivi:

$$f(x,y) \to f(\tilde{x},\tilde{y}) \to g(\tilde{x},\tilde{y})$$
$$A \to B \to C$$

$$\varepsilon_{mac} = \frac{g(\tilde{x},\tilde{y}) - f(x,y)}{f(x,y)} \doteq \varepsilon_{in} + \varepsilon_{alg}$$

$$\varepsilon_z \doteq \underbrace{\boxed{\frac{2x^2}{x^2-y^2}\varepsilon_x - \frac{2y^2}{x^2-y^2}\varepsilon_y}}_{\varepsilon_{in}} + \underbrace{\boxed{\frac{x^2}{x^2-y^2}\varepsilon_1 - \frac{y^2}{x^2-y^2}\varepsilon_2 + \varepsilon_3}}_{\varepsilon_{alg}}.$$

---

Supponiamo ora di cambiare algoritmo per calcolare le stesse quantità:

$$z = f(x,y) = x^2 - y^2 = (x+y)(x-y)$$ stessa funzione

La seconda forma propone un algoritmo diverso:

$$\begin{aligned} C &= x+y \\ D &= x-y \\ z &= C * D \end{aligned} \quad \longmapsto \quad \begin{aligned} \tilde{C} &= \tilde{x} \oplus \tilde{y} \\ \tilde{D} &= \tilde{x} \ominus \tilde{y} \\ \tilde{z} &= \tilde{C} \otimes \tilde{D} \end{aligned}$$

Qui $\tilde{x}, \tilde{y}$ sono gli stessi di sopra (approssimazioni di $x, y$ con numeri di macchina), però $\tilde{z}$ è diverso, perché lo calcolo con una sequenza diversa di operazioni.

$$\varepsilon_{in} = \frac{f(\tilde{x},\tilde{y}) - f(x,y)}{f(x,y)}$$ resta lo stesso, ma

$$\varepsilon_{alg} = \frac{g(\tilde{x},\tilde{y}) - f(\tilde{x},\tilde{y})}{f(\tilde{x},\tilde{y})}$$ è diverso perché è diversa la $g$!

$$\tilde{C} = (\tilde{x}+\tilde{y})(1+\varepsilon_4) \qquad \tilde{z} = (\tilde{C} * \tilde{D})(1+\varepsilon_6) \qquad |\varepsilon_4|, |\varepsilon_5|, |\varepsilon_6| \leq u$$
$$\tilde{D} = (\tilde{x}-\tilde{y})(1+\varepsilon_5)$$

$$\varepsilon_z \doteq \underbrace{\boxed{\frac{2x^2}{x^2-y^2}\varepsilon_x - \frac{2y^2}{x^2-y^2}\varepsilon_y}}_{\varepsilon_{in} \text{ (uguale a prima)}} + \underbrace{\boxed{\varepsilon_4 + \varepsilon_5 + \varepsilon_6}}_{\varepsilon_{alg} \text{ (diverso)}}$$

$\varepsilon_{in}$ è sempre presente indipendentemente da qualunque algoritmo

$\varepsilon_{alg}$ varia a seconda dell'algoritmo.

```
def calcolo(x: float, y: float)
    ⋮
```

già affetti da $\varepsilon_{in}$ !