

# Esercizi su metodi iterativi

Note Title

2026-02-13

1) Determinare il comportamento del metodo di Newton

su  $f(x) = \log(x) + 2x - 1$

$(\log(x) + 2x - 1 = 0)$ .

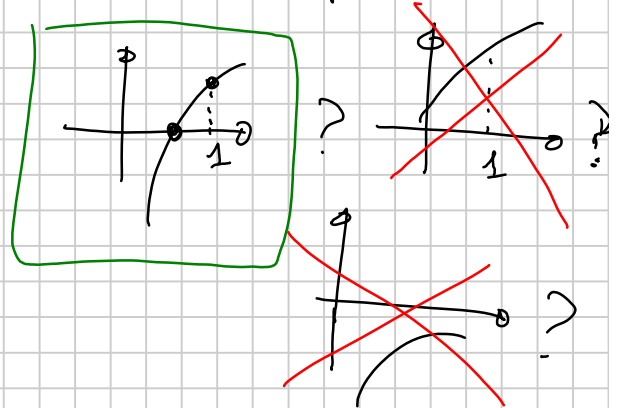
Oss: c'è  $\log x$ , quindi  $f(x)$  è definita solo per  $x > 0$ .

$f'(x) = \frac{1}{x} + 2$

crescente

$f''(x) = -\frac{1}{x^2}$

concava



$f(1) = 0 + 2 - 1 = 1 > 0$

$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = -\infty + 0 - 1 = -\infty$

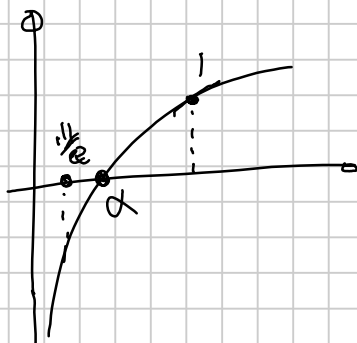
So fare anche  $f\left(\frac{1}{e}\right) = -1 + 2e^{-1} - 1 = 2(e^{-1} - 1) < 0$

$e^{-1} = \frac{1}{2.7} \approx 0.37$

$\Rightarrow \left[\frac{1}{e}, 1\right]$  è un intervallo di separazione.

La funzione ha un solo zero  $\alpha$  compreso in  $\left(\frac{1}{e}, 1\right)$ .

*Lo strett. crescente.*



Convergenza locale:  $f \in C^2 \checkmark$

$f(\alpha) = 0, f'(\alpha) \neq 0 \checkmark$

$\Rightarrow$  esiste  $I = [\alpha - \rho, \alpha + \rho]$  tale che il metodo di Newton converge (almeno quadraticamente) per  $x_0 \in I$

$\Phi(x) = x - \frac{f(x)}{f'(x)} \quad \Phi'(x) = \frac{f(x)f''(x)}{[f'(x)]^2}$

Per determinare esplicitamente un  $\rho$ , devo vedere presto

$$|\Phi'(x)| < 1$$

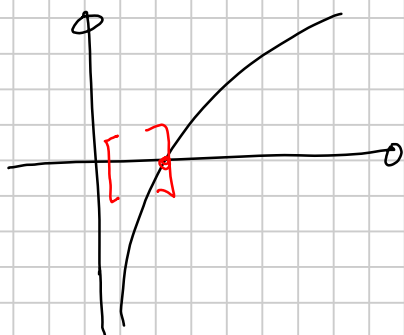
$$\left| \frac{(\log(x) + 2x - 1) \cdot \left(-\frac{1}{x^2}\right)}{\left(\frac{1}{x} + 2\right)^2} \right| < 1 \quad ???$$

$$\Phi'(1) = \frac{1 \cdot (-1)}{3^2} = -\frac{1}{9}$$

Non dico come risolvere

Altre note: teorema di convergenza su intervalli:

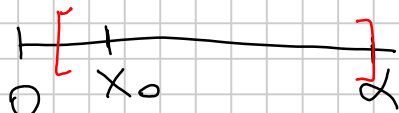
- $f \in C^2 \vee$
- $I = [a, b]$  che abbia un estremo in  $\alpha$
- $f(x) f''(x) \geq 0$



$$f''(x) = -\frac{1}{x^2} < 0$$

Va bene un qualunque intervallo della forma  $[a, \alpha]$  con  $0 < a < \alpha$

Per ogni  $x_0$  t.c.  $0 < x_0 < \alpha$ , posso trovare un intervallo di questo tipo, ad es.  $[x_0/2, \alpha]$  oppure  $[x_0, \alpha]$  che contiene  $x_0$



$\Rightarrow$  per ogni  $x_0 \in (0, \alpha)$  il metodo converge

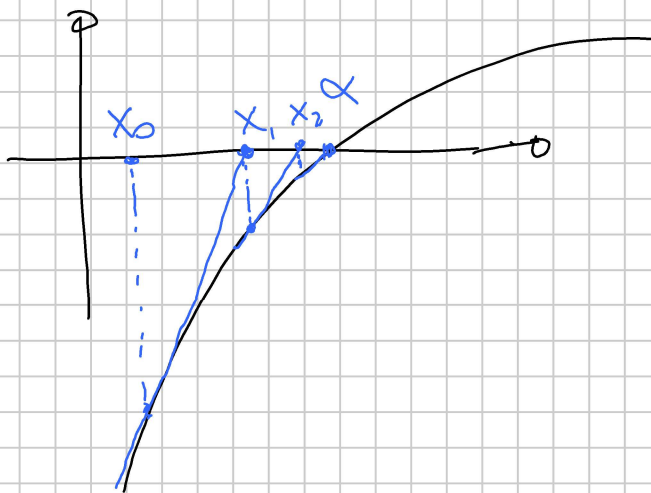
$$x = x - \frac{f(x)}{f'(x)}$$

se  $x_n \rightarrow l$ , allora posso scrivere

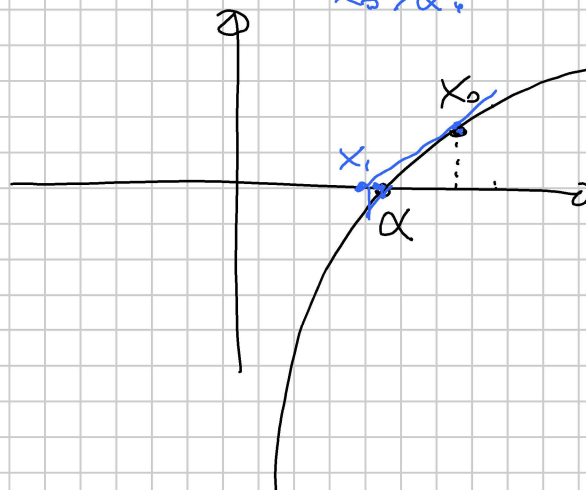
$$l = \lim x_{n+1} = \lim \Phi(x_n) = \Phi(l)$$

Per esempio, con  $x_0 = \frac{1}{e}$ , il metodo converge, perché lo dimostro che  $\frac{1}{e} < \alpha$ .

$x_0 < \alpha$ :

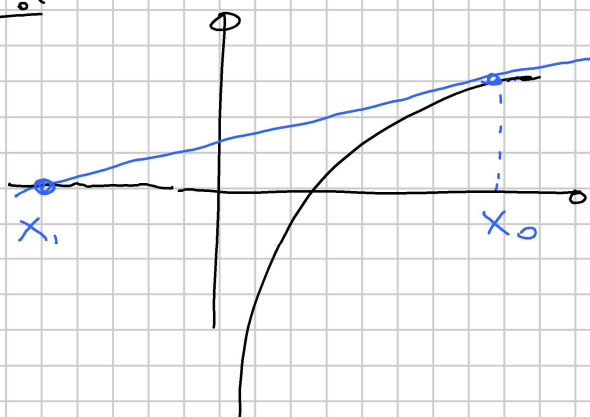


$x_0 > \alpha$ :



la retta tangente sta sopra  $f$   
 $\Rightarrow x_1 < \alpha$ .

Se  $x_0 > \alpha$  è più grande,  $x_1 < 0$



Riusciamo a calcolare esplicitamente per quali  $x_0$  si ha  $x_1 \leq 0$ ?

$$x_1 = x_0 - \frac{\log(x_0) + 2x_0 - 1}{\frac{1}{x_0} + 2} = \frac{1 + 2x_0 - \log(x_0) - 2x_0 + 1}{\frac{1}{x_0} + 2}$$

$$x_1 \leq 0 \Leftrightarrow \text{num} \leq 0 \Leftrightarrow 2 - \log x_0 \leq 0 \Leftrightarrow x_0 \geq e^2$$

Comportamento del metodo di Newton:

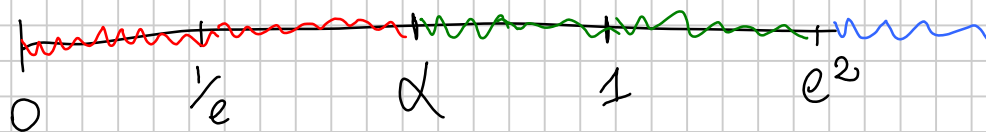
$0 < x_0 < \alpha$ : il metodo genera una successione crescente, che converge ad  $\alpha$  (quadraticamente)

$$x_0 = \alpha$$

$$x_0 = x_1 = x_2 = \dots = \alpha$$

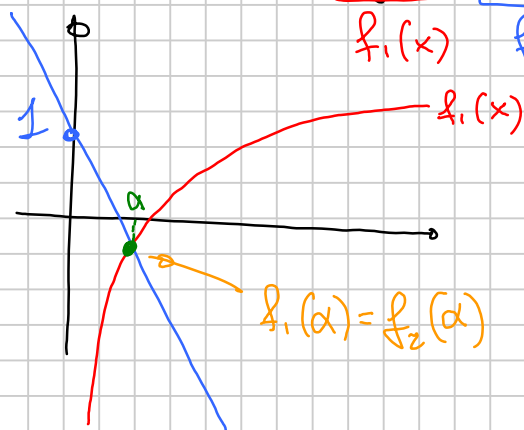
$\alpha < x_0 < e^2$ :  $x_1$  è compreso tra 0 e  $\alpha$ , e poi la successione è crescente:  $x_1 \leq x_2 \leq x_3 \leq \dots \leq \alpha$

$x_0 > e^2$ :  $x_1 \leq 0$ , e il metodo non può proseguire.



Oss: altra tecnica per dire che esiste uno zero:

$$\log x + 2x - 1 = 0 \iff \underbrace{\log x}_{f_1(x)} = \underbrace{1 - 2x}_{f_2(x)} \quad \text{"metodo grafico"}$$



$\hookrightarrow$  i grafici di  $f_1(x)$  e  $f_2(x)$  si intersecano

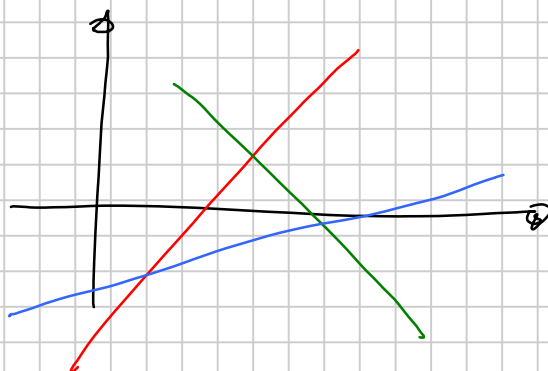
$$f_1(x) = \log x$$

$$f_2(x) = -2x$$

$$f_3(x) = -x^2$$

$$f_1(\alpha) = f_2(\alpha) = f_3(\alpha) \Rightarrow f_1(\alpha) + f_2(\alpha) + f_3(\alpha) = 0 \Rightarrow \log \alpha + 2\alpha + \alpha^2 = 0$$

ma non vale l'altra freccia!



Studiamo le convergenze del metodo del punto fisso

$$x = \Phi(x) \quad \text{con} \quad \Phi(x) = \frac{1}{3} + \frac{2}{3}x^2$$

Invariabilmente, troviamo i possibili punti fissi  $\alpha = \Phi(\alpha)$

$$x = \frac{1}{3} + \frac{2}{3}x^2 \Leftrightarrow 3x = 1 + 2x^2 \Leftrightarrow 2x^2 - 3x + 1 = 0$$

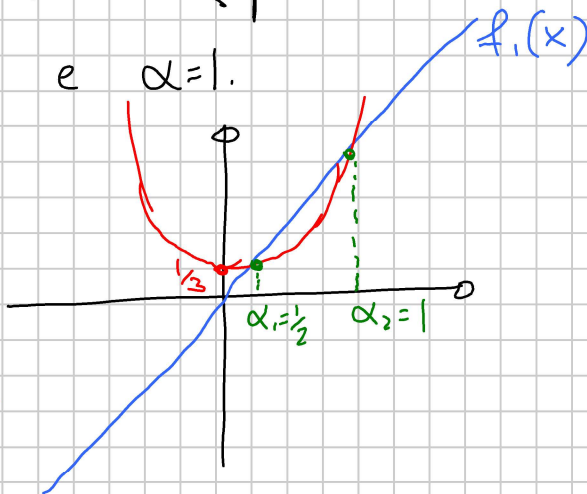
$$x_{1,2} = \frac{3 \pm \sqrt{9-8}}{2 \cdot 2} = \frac{3 \pm 1}{4} = \begin{cases} \frac{1}{2} \\ 1 \end{cases}$$

Due punti fissi,  $\alpha = \frac{1}{2}$  e  $\alpha = 1$ .

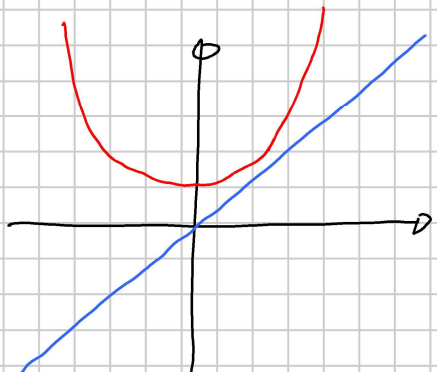
Graficamente:

$$x = \frac{1}{3} + \frac{2}{3}x^2$$

$f_1(x)$   $f_2(x)$



oppure:



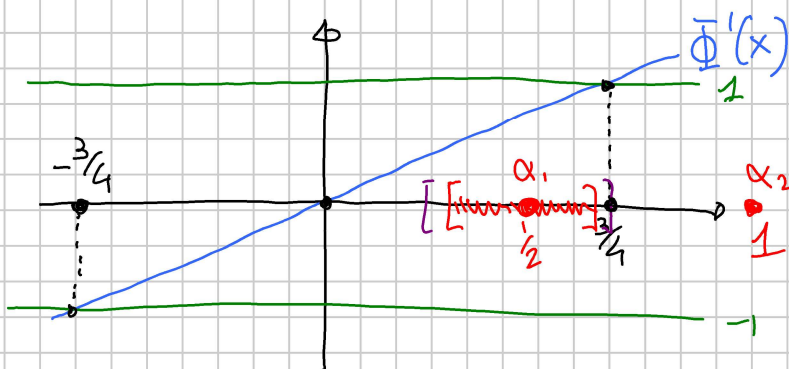
non c'è un modo ovvio di escludere questo caso

Teo. di convergenza locale:  $\Phi \in C^1 \checkmark$

$\Phi(\alpha) = \alpha$  (vero sia per  $\frac{1}{2}$  che per 1)

$|\Phi'(x)| < 1$

$$\Phi'(x) = \frac{2}{3} \cdot 2x = \frac{4}{3}x$$



$|\Phi'(x)| < 1$  se e solo  
se  $x \in \left(-\frac{3}{4}, \frac{3}{4}\right)$

Come posso scegliere un intervallo centrato in  $\alpha_1 = \frac{1}{2}$ ,

$I = \left[\frac{1}{2} - p, \frac{1}{2} + p\right]$  in modo che  $|\Phi'(x)| < 1$  su tutto  $I$ ?

Basta prendere  $p < \frac{1}{4}$ .

Ribalutando il discorso, se ho  $x_0 \in \left(\frac{1}{4}, \frac{3}{4}\right)$  posso trovare un intervallo  $I = \left[\frac{1}{2} - p, \frac{1}{2} + p\right]$  che contiene  $x_0$  e su tutto

In  $[-\frac{3}{4}, \frac{3}{4}] \Rightarrow$  il metodo converge e perire da

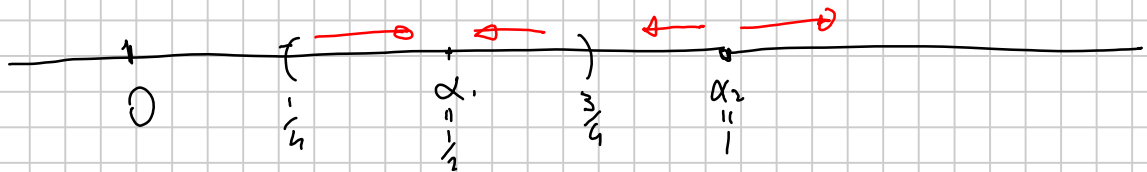
$x_0 \in (\frac{1}{4}, \frac{3}{4})$ , e converge a  $\alpha = \frac{1}{2}$ .

Il metodo converge linearmente con tasso  $r = |\Phi'(\alpha)| = \frac{4}{3} \cdot \frac{1}{2} = \frac{2}{3}$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|x_{n+1} - \alpha|}{|x_n - \alpha|} = \frac{2}{3}$$

Invece, per  $\alpha_2 = 1$  abbiamo  $\Phi'(\alpha_2) = \frac{4}{3} \cdot 1 = \frac{4}{3} > 1$

$\rightarrow$  non esiste nessun  $\rho > 0$  per cui la derivata  $\Phi'(x)$  sia minore di 1 in val. ess. per ogni  $x \in [\alpha_2 - \rho, \alpha_2 + \rho]$



Se  $x_0 \in (0, \frac{1}{4})$ , allora  $x_1 = \frac{1}{3} + \frac{2}{3}x_0^2 \geq \frac{1}{3}$

$\Rightarrow x_1 \in (\frac{1}{4}, \frac{3}{4})$  e converge  
a  $\alpha = \frac{1}{2}$

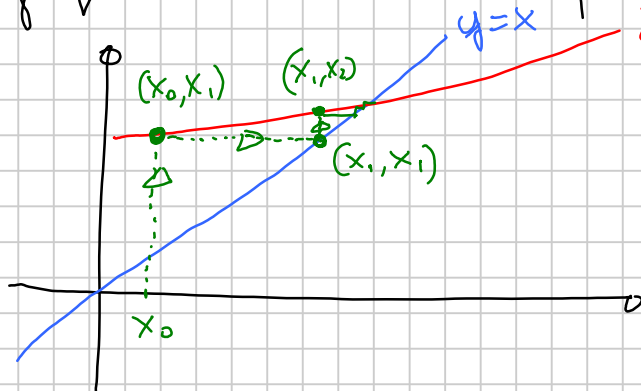
$$\leq \frac{1}{3} + \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{4^2} =$$

$$= \frac{1}{3} + \frac{1}{24} = \frac{9}{24} < \frac{3}{4}$$

Se parto da  $x_0 < 0$ , è come se

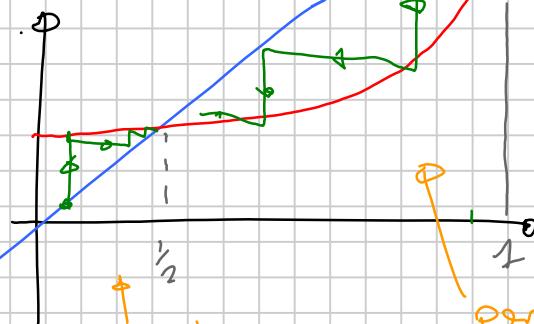
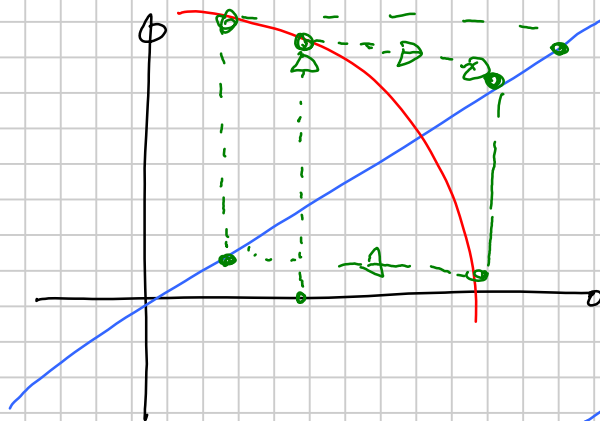
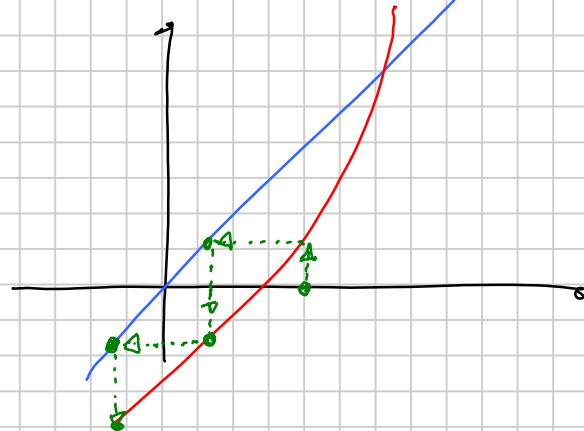
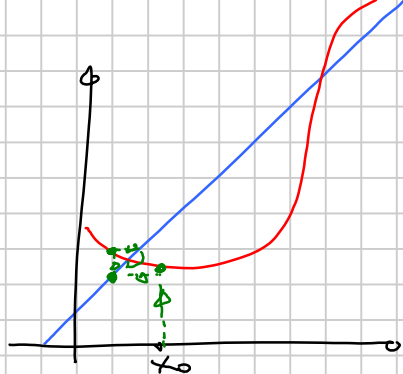
partissi da  $-x_0$ , perché la funzione è simmetrica rispetto all'asse y.

Studio grafico del metodo di punto fisso per visualizzare il metodo, partendo da x



Disposto:

- in verticale verso  $\Phi$
- in orizzontale verso la bisettrice



$$\frac{1}{3} + \frac{2}{3}x^2$$

partendo de  $x < \frac{1}{2}$  converge a  $\frac{1}{2}$

partendo em  $[\frac{1}{2}, 1)$  converge a  $\frac{1}{2}$

partendo de  $(1, \infty)$  diverge

131