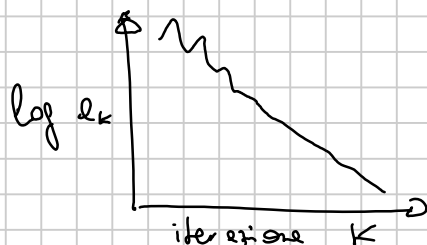


$$\begin{cases} X_0 \text{ dato} \\ X_{k+1} = \Phi(X_k) \quad k=0,1,2,\dots \end{cases}$$

Convergente per $X_0 \in I = [\alpha - \rho, \alpha + \rho]$ se $\max_{x \in I} |\Phi'(x)| = L < 1$

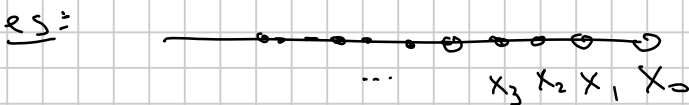
$$\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{|X_{k+1} - \alpha|}{|X_k - \alpha|} = |\Phi'(\alpha)| \quad \text{quinto ci è convergente}$$



Criteri di arresto: il più naturale è arrestarsi quando

$$|X_{k+1} - X_k| < \varepsilon$$

⚠ Non garantisce nulla sull'errore $|X_k - \alpha|$:



Svantaggi del metodo:

- non è semplice trovare X_0 che garantisce convergenza
- non c'è un criterio di arresto affidabile se $L \approx 1$

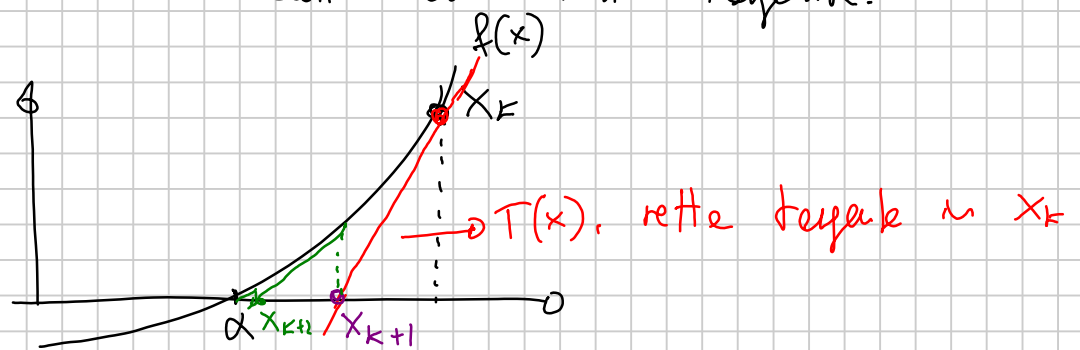
Vantaggi:

può essere più veloce della bisezione,
non richiede un intervallo di separazione

Metodo della tangenti (o di Newton)

Idea: per approssimare uno zero di $f(x)$,

cerchiamo uno zero della sua retta tangente.



Algebricamente:

Sviluppo di Taylor:

$$f(x) = \underbrace{f(x_k) + f'(x_k)(x - x_k)}_{T(x)} + \frac{f''(\xi)}{2} (x - x_k)^2$$

x_{k+1} è il punto tale che

$$0 = T(x_{k+1}) = f(x_k) + f'(x_k)(x_{k+1} - x_k).$$

$$\Leftrightarrow -f(x_k) = f'(x_k)(x_{k+1} - x_k)$$

$$\Leftrightarrow -\frac{f(x_k)}{f'(x_k)} = x_{k+1} - x_k \Leftrightarrow$$

$$x_{k+1} = x_k - \frac{f(x_k)}{f'(x_k)}$$

Metodo di Newton:

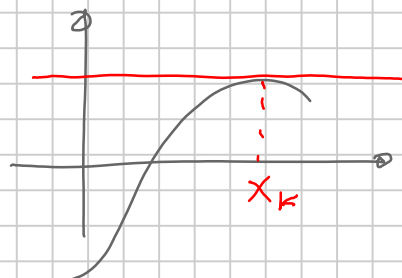
$$\begin{cases} x_0 \text{ dato} \\ x_{k+1} = x_k - \frac{f(x_k)}{f'(x_k)} \end{cases}$$

$\rightarrow$

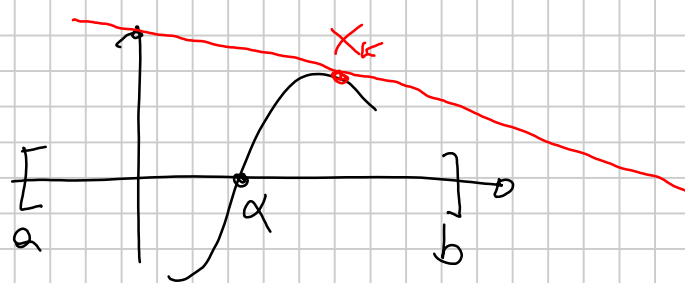
È un metodo del punto fisso con
 $\Phi(x) = x - \frac{f(x)}{f'(x)}$

Serve calcolare anche f' , non solo f !

Se $f'(x_k) = 0$, il
 metodo non può calcolare
 x_{k+1}



Anche se $f'(x_k) \neq 0$, potrei andare a finire in un punto in cui f non è definita!



Il metodo di Newton è un metodo del punto fisso con $\Phi(x) = x - \frac{f(x)}{f'(x)}$

Oss: se $\alpha = \Phi(\alpha) \Leftrightarrow \cancel{\alpha = \alpha - \frac{f(\alpha)}{f'(\alpha)}}$

e quindi $f(\alpha) = 0$ (almeno se supponiamo $f'(\alpha) \neq 0$)

Teo: sia $f \in C^2$ su $[a, b]$ (ammette derivata seconda $f''(x)$, e la derivata seconda è continua)

e $\alpha \in (a, b)$ t.c. $f(\alpha) = 0$, $f'(\alpha) \neq 0$.

Allora, esiste un intervallo $I = [\alpha - \delta, \alpha + \delta] \subset [a, b]$ tale che questo applichiamo il metodo con $x_0 \in I$, si ha

$$x_k \in I$$

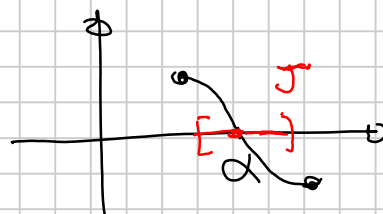
$$\lim_{k \rightarrow \infty} x_k = \alpha.$$

Dim: Vediamo Newton come un metodo di punto fisso

$$\text{con } \Phi(x) = x - \frac{f(x)}{f'(x)}$$

Poiché $f'(\alpha) \neq 0$, e $f'(x)$ è continua, esisterà un intervallo $J = [\alpha - s, \alpha + s]$ tale che $f'(x) \neq 0$ su tutto J ,

quindi $\Phi(x)$ è definita su J .



Calcoliamo:

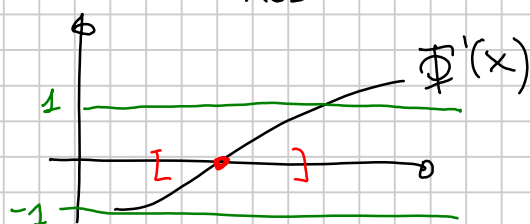
$$\Phi'(x) = \frac{d}{dx} \left(x - \frac{f(x)}{f'(x)} \right) = 1 - \frac{f'(x) \cdot f'(x) - f(x) f''(x)}{[f'(x)]^2}$$

$$= \frac{\cancel{[f'(x)]^2} - \cancel{[f'(x)]^2} + f(x) f''(x)}{[f'(x)]^2} = \frac{f(x) f''(x)}{[f'(x)]^2}.$$

$$\Phi'(\alpha) = \frac{f(\alpha) f''(\alpha)}{[f'(\alpha)]^2} = 0 \quad \text{perché } f(\alpha) = 0 \quad (\text{e } f'(\alpha) \neq 0).$$

Poiché $|\Phi'(\alpha)| < 1$ in valore assoluto, riesco a trovare un intervallo $I = [\alpha - \rho, \alpha + \rho]$ in cui $|\Phi'(x)| < 1$

e quindi anche $\max_{x \in I} |\Phi'(x)| = L < 1$. (per la continuità di $\Phi'(x)$).

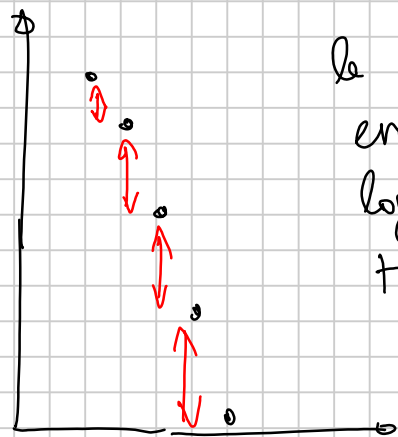


Su questo intervallo valgono le ipotesi del tes. del punto fisso, quindi anche la tesi: $x_k \in I \quad \forall k$

$$\lim_{k \rightarrow \infty} x_k = \alpha.$$

□

Poiché $|\Phi'(\alpha)| = 0$, il metodo di Newton è un metodo di punto fisso per cui si ha convergenza superlineare.



la distanza verticale tra due errori successivi (in scala logaritmica sulle y) tende a $\log 0 = -\infty$

ES: $f(x) = x^2 - 2$

$$f'(x) = 2x \quad X_{k+1} = X_k - \frac{X_k^2 - 2}{2X_k}$$

Abbiamo detto che un metodo (o una successione) converge linearmente se

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{|X_{k+1} - \alpha|}{|X_k - \alpha|} = r \in (0, 1) \quad (\text{tasso di convergenza})$$

Nuova definizione: dato un $p \geq 1$, diciamo che un metodo (o una successione) converge ad α con ordine p se

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{|X_{k+1} - \alpha|}{|X_k - \alpha|^p} = s \in (0, \infty)$$

errore al passo $k+1 \approx s \cdot (\text{errore al passo } k)^p$.

Oss: se un metodo ha convergenza di ordine $p \geq 1$, allora ha convergenza superlineare:

$$\begin{aligned} \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{|X_{k+1} - \alpha|}{|X_k - \alpha|} &= \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{|X_{k+1} - \alpha|}{|X_k - \alpha|^p} \cdot \lim_{k \rightarrow \infty} |X_k - \alpha|^{p-1} \\ &= s \cdot 0 = 0 \end{aligned}$$

Si dice anche che un metodo converge con ordine almeno p se

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{|X_{k+1} - \alpha|}{|X_k - \alpha|^p} = s \in [0, \infty).$$

Teo: (convergenza quadratica del metodo di Newton):

Sia $f(x) \in C^2$ su $[a, b]$, e $\alpha \in (a, b)$ t.c. $f(\alpha) = 0$, $f'(\alpha) \neq 0$. Allora, se x_0 è scelto in modo da avere convergenza, si ha

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|x_{n+1} - \alpha|}{|x_n - \alpha|^2} = S \in [0, \infty).$$

(convergente di ordine almeno 2)

Dim: facciamo uno sviluppo di Taylor di f nel punto x_n :

$$f(x) = f(x_n) + f'(x_n)(x - x_n) + \frac{f''(\xi_n)}{2}(x - x_n)^2$$

Sostituiamo $x = \alpha$:

$$0 = f(\alpha) = f(x_n) + f'(x_n)(\alpha - x_n) + \frac{f''(\xi_n)}{2}(\alpha - x_n)^2$$

(esiste ξ_n compreso tra α e x_n per cui vale questa relazione)

Dividiamo per $f'(x_n)$:

$$0 = \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} + \alpha - x_n + \frac{f''(\xi_n)}{2f'(x_n)}(\alpha - x_n)^2$$

$$x_{n+1} - \alpha = \frac{f''(\xi_n)}{2f'(x_n)}(\alpha - x_n)^2$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{x_{n+1} - \alpha}{(x_n - \alpha)^2} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{f''(\xi_n)}{2f'(x_n)} \right| = \left| \frac{f''(\alpha)}{2f'(\alpha)} \right| = S \in [0, \infty)$$

* $f'(x_n) \rightarrow f'(\alpha)$ perché $x_n \rightarrow \alpha$ e f' è continua

* Poiché ξ_n sta tra α e x_n , $0 \leq |\xi_n - \alpha| \leq |x_n - \alpha|$

quindi $\xi_n \rightarrow \alpha$, e perciò $f''(\xi_n) \rightarrow f''(\alpha)$ (continuità di f'')

```
function x = newton(f, df, x0, epsilon)
% esegue passi del metodo di Newton finché'
% |x_{n+1} - x_n| < epsilon
```

```
x = x0;
err = inf;
while (err >= epsilon)
    xold = x;
    x = x - f(x) / df(x);
    err = abs(x - xold);
end
```

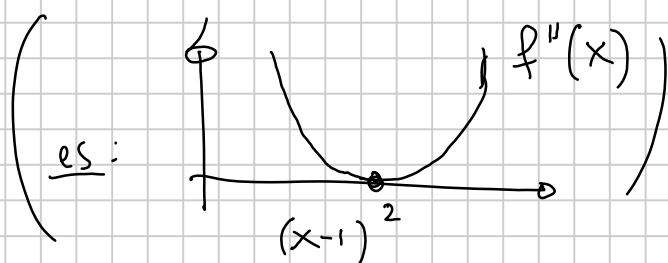
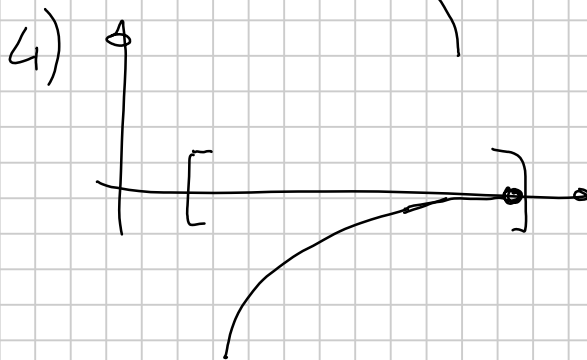
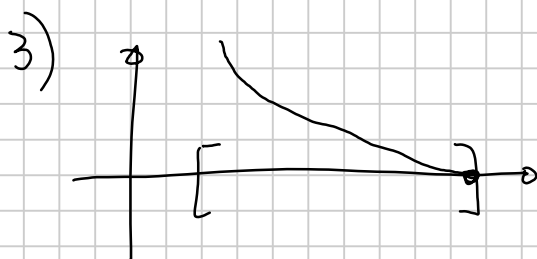
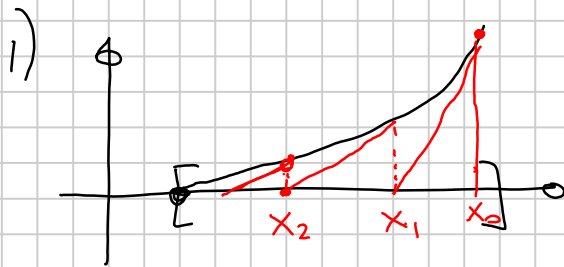
Teo: sia f di classe C^2 su $[a, b]$ intervallo
in cui α è uno degli estremi ($\alpha=a$ o $\alpha=b$),
e in più $f(x)f''(x) \geq 0$ per ogni $x \in [a, b]$

Allora, il metodo di Newton converge in modo
monotono (crescente o decrescente) ad α .

(α è l'unico zero di f nell'intervallo $f(\alpha)=0$).

4 casi:

- $\alpha=a$, $f(x), f''(x) \geq 0$ entrambe
- $\alpha=a$, $f(x), f''(x) \leq 0$
- $\alpha=b$, $f(x), f''(x) \geq 0$
- $\alpha=b$, $f(x), f''(x) \leq 0$



Si dice che α è uno zero della funzione f con

multiplicità m se

$$f(\alpha)=0, f'(\alpha)=0, \dots, f^{(m-1)}(\alpha)=0, f^{(m)}(\alpha) \neq 0.$$

(Questa definizione dà gli stessi risultati sui polinomi di quelle che già conoscete: es. $p(x) = (x-2)^5(x+1)^7$

$\alpha=2$ è uno zero di molteplicità 5, $\alpha=-1$ è di molteplicità 7.)

La nostra ipotesi che $f(\alpha)=0, f'(\alpha) \neq 0$ sotto cui abbiamo dimostrato la convergenza quadratica del metodo significa che α è uno zero di molteplicità 1 ("zero semplice").

Cosa succede se applico Newton a una funzione che ha uno zero di molteplicità ≥ 2 ?

R: converge (almeno localmente), ma linearmente.

ES: $f(x) = x^2$ ha uno zero in $\alpha=0$ di molteplicità 2.

$$\text{Newton: } \begin{cases} x_0 \text{ dato} \\ x_{k+1} = x_k - \frac{x_k^2}{2x_k} = \frac{x_k}{2} \end{cases}$$

Ad es. se $x_0=1, x_1=\frac{1}{2}, x_2=\frac{1}{4}, x_3=\frac{1}{8}, \dots$

che è una convergenza lineare con $r=\frac{1}{2}$.