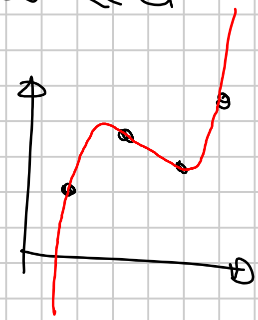
Note Title 2026-04-24

# Interpolazione polinomiale

$d+1$ coppie $(x_i, y_i) \in \mathbb{R}^2$ $i = 0, 1, \dots, d$ date

$x_i$ distinti. Cerchiamo un polinomio di grado $\leq d$

tale che $p(x_i) = y_i$ $i = 0, 1, \dots d$



Teo: se gli $x_i$ sono distinti,

esiste ed è unico il polinomio di interpolazione

(cioè, un polinomio di grado $\leq d$ t.c. $p(x_i) = y_i$

Dim: questo è equivalente a un problema di algebra lineare:

$$p(x) = \alpha_0 + \alpha_1 x + \alpha_2 x^2 + \dots + \alpha_d x^d$$

$$\underbrace{\begin{bmatrix} 1 & x_0 & x_0^2 & \cdots & x_0^d \\ 1 & x_1 & x_1^2 & \cdots & x_1^d \\ \vdots & & & & \vdots \\ 1 & x_d & x_d^2 & \cdots & x_d^d \end{bmatrix}}_{X \in \mathbb{R}^{(d+1)\times(d+1)}} \cdot \underbrace{\begin{bmatrix} \alpha_0 \\ \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \vdots \\ \alpha_d \end{bmatrix}}_{\alpha \in \mathbb{R}^{d+1}} = \underbrace{\begin{bmatrix} y_0 \\ y_1 \\ \vdots \\ y_d \end{bmatrix}}_{y \in \mathbb{R}^{d+1}}$$

Difatti, la riga $i$-esima dice che $y_i = 1 \cdot \alpha_0 + x_i \alpha_1 + \dots + x_i^d \alpha_d$
$= p(x_i)$

$X$ è detta matrice di VANDERMONDE

Per mostrare che la soluzione esiste ed è unica, ci basta mostrare che $X$ è invertibile per ogni scelta degli $x_i$ distinti

Mostriamo che $\ker(X) = \{0\}$. Prendiamo un vettore

$$\beta = \begin{bmatrix} \beta_0 \\ \beta_1 \\ \vdots \\ \beta_d \end{bmatrix}$$

tale che $X\beta = 0$, vogliamo mostrare che necessariamente vale $\beta = 0$.

Notiamo che $X\cdot\beta=0$ è un altro problema di interpolazione:

$$\begin{bmatrix} 1 & x_0 & x_0^2 & \cdots & x_0^d \\ 1 & x_1 & x_1^2 & \cdots & x_1^d \\ \vdots \\ 1 & x_d & x_d^2 & \cdots & x_d^d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \beta_0 \\ \beta_1 \\ \vdots \\ \beta_d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}$$

Se definiamo $q(x)=\beta_0+\beta_1 x+\dots+\beta_d x^d$, le righe di questo sistema mi dicono che $q(x_0)=0$, $q(x_1)=0$, $\dots$ $q(x_d)=0$

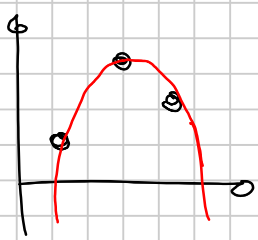
$q(x_i)=0 \iff q(x)$ è un multiplo di $(x-x_i)$

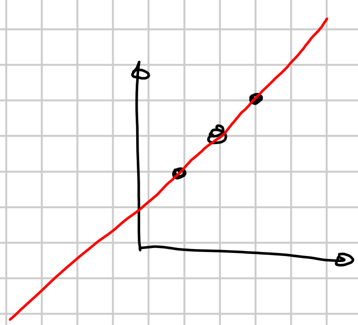
Le condizioni implicano $p(x)=\underbrace{(x-x_0)(x-x_1)(x-x_2)\cdots(x-x_d)}_{d+1 \text{ fattori}}\cdot r(x)$

Dev'essere per forza $r(x)=0$, altrimenti $p(x)$ avrebbe grado almeno $d+1$ (cioè, se un polinomio $p(x)$ di grado $\leq d$ si annulla in $d+1$ punti distinti, allora $p(x)=0$).

Abbiamo dimostrato $\beta_0=\beta_1=\beta_2=\dots=\beta_d=0$, cioè che $X\beta=0$ è possibile solo quando $\beta=0$, cioè $X$ è invertibile. $\square$

---





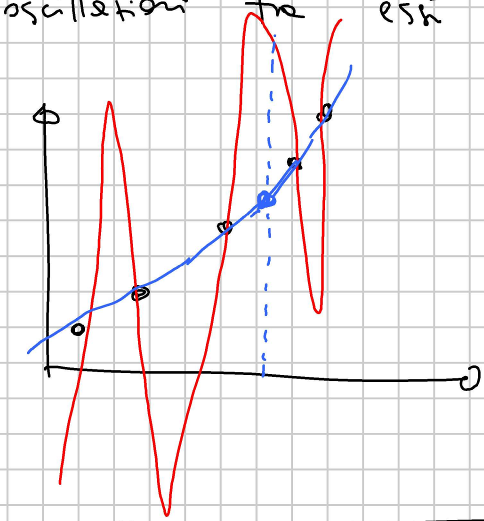
⚠ quando $d$ diventa grande, ci sono alcuni problemi:

1. La matrice $X$ spesso è mal condizionata!

Ad es. se gli $x_i$ sono $\{0,1,2,\dots 9\}$ $K(X)=9\cdot 10^{10}$

$\Rightarrow$ una perturbazione con errore relativo $\sim 10^{-10}$ sugli $y$ può far cambiare completamente gli $\alpha$.

2. Il polinomio passa per i punti dati, ma può avere oscillazioni tra essi



"Fenomeno di RUNGE" / / "overfitting"

Altro algoritmo per calcolare il polinomio di interpolazione: <u>forma di Lagrange</u> del polinomio.

Definiamo i <u>polinomi di Lagrange</u> associati a nodi distinti $x_0, x_1, \dots x_d$:

$$L_k(x) = \frac{\prod_{j=0, j\neq k}^{d} (x-x_j)}{\prod_{j=0, j\neq k}^{d} (x_k-x_j)} \qquad k=0,1,\dots d$$

<u>ES</u>: $x_0=1,\ x_1=3,\ x_2=7 \qquad (d=2)$

$$L_0(x) = \frac{(x-3)(x-7)}{(1-3)(1-7)}, \qquad L_1(x) = \frac{(x-1)(x-7)}{(3-1)(3-7)},$$

$$L_2(x) = \frac{(x-1)(x-3)}{(7-1)(7-3)}.$$

<u>Lemma</u>: Si ha

$$L_k(x_i) = \begin{cases} 1 & i=k \\ 0 & \text{altrimenti } i\neq k \end{cases}$$

Nell'esempio sopra, $L_0(x_0)=1$, $L_1(x_0)=0$, $L_2(x_0)=0$

Dim: se $i \neq k$, allora il numeratore

$$(x-x_0)(x-x_1)\cdots(x-x_{k-1})\cdot(x-x_{k+1})\cdots(x-x_d)$$

(salto il fattore $k$) contiene un fattore $x_i - x_i$ quando valutiamo il polinomio in $x_i$, e quindi si annulla.

Se $i=k$, valutando $L_k$

$$L_k(x_k) = \frac{\prod_{j\neq k}(x_k-x_j)}{\prod_{j\neq k}(x_k-x_j)} = 1 \qquad \text{(numeratore = denominatore)}$$

$\square$

Teo: il polinomio di interpolazione su $(x_0,y_0),\dots,(x_d,y_d)$ (con nodi $x_i$ distinti) si scrive come

$$p(x) = \sum_{k=0}^{d} y_k L_k(x) = y_0 L_0(x) + y_1 L_1(x) + \dots + y_d L_d(x).$$

Dim: $p(x)$ è l'unico polinomio di grado $\leq d$ tale che $p(x_i)=y_i$, $i=0,1,\dots,d$, quindi devo verificare che questa formula per $p$ soddisfi queste due proprietà

- Grado $\leq d$: ogni $L_k(x)$ ha grado $=d$, perché al numeratore ha $d$ fattori di grado 1. ✓
- $p(x_i) = y_0 \underbrace{L_0(x_i)}_{=0} + y_1 \underbrace{L_1(x_i)}_{=0} + \dots + y_i \underbrace{L_i(x_i)}_{=1} + \dots + y_d \underbrace{L_d(x_i)}_{=0} = y_i$ ✓

per il lemma appena dimostrato, $L_k(x_i) = \begin{cases} 1 & i=k \\ 0 & i\neq k \end{cases}$

$\square$

---

ES: Il polinomio di interpolazione su $(1,10), (3,5), (7,3)$ è

$x_0\ y_0 \quad x_1\ y_1 \quad x_2\ y_2$

$$p(x) = 10 \cdot \frac{(x-3)(x-7)}{(1-3)(1-7)} + 5\,\frac{(x-1)(x-7)}{(3-1)(3-7)} + 3\,\frac{(x-1)(x-3)}{(7-1)(7-3)}.$$

Oss: abbiamo usato il fatto che i nodi $x_i$ siano distinti, perché altrimenti si annulla un denominatore.

---

Costo dell'interpolazione:

Tramite polinomi di Lagrange: se voglio calcolare il valore di $p(x)$ in $m$ punti $z_1, z_2, \dots, z_m$:

devo calcolare $O(d)$ prodotti di $O(d)$ fattori in $m$ punti
$\rightarrow O(md^2)$

Tramite sistema con matrice di Vandermonde:

$O(d^3)$ per trovare i coefficienti del polinomio (sistema lineare $(d+1)\times(d+1)$)

$+$

$O(dm)$ per valutare il polinomio in $m$ punti, una volta noti i coefficienti.

(Oss: i problemi numerici di cui parlavamo sopra erano problemi di condizionamento, quindi non si risolvono cambiando algoritmo!)

---

Idea: combiniamo interpolazione polinomiale + problemi ai minimi quadrati.

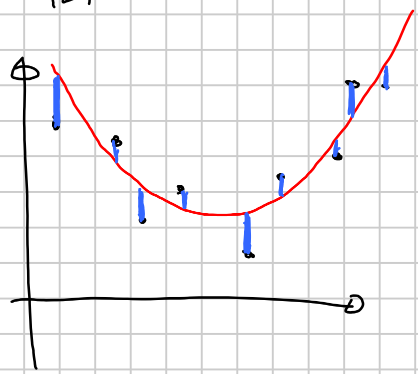
Dati $m > d+1$ punti $(x_1, y_1), \dots (x_m, y_m)$, cerchiamo un polinomio di grado $\leq d$ tale che

$$p(x_i) \approx y_i \qquad i = 1, 2, \dots m$$

Formuliamolo come problema dei minimi quadrati: cerco il polinomio $p(x)$ di grado $\leq d$ che minimizza

$$\min_{p(x)} \sum_{i=1}^{m} |p(x_i)-y_i|^2$$

<u>es</u>: $d=2$



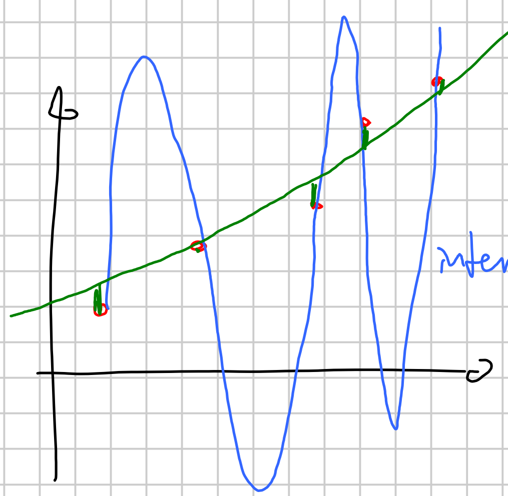
← cerco il polinomio di grado 2 per cui la somma delle <u>lunghezze al quadrato</u> dei segmenti blu sia minima.

Formula con matrici e vettori:

$$\min \left\| \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & x_1 & x_1^2 & \cdots & x_1^d \\ 1 & x_2 & x_2^2 & \cdots & x_2^d \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & x_m & x_m^2 & \cdots & x_m^d \end{bmatrix}}_{\text{Matrice di Vandermonde rettangolare } m\times(d+1)} \underbrace{\begin{bmatrix} \alpha_0 \\ \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_d \end{bmatrix}}_{\alpha\in\mathbb{R}^{d+1}} - \underbrace{\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_m \end{bmatrix}}_{y\in\mathbb{R}^m} \right\|_2^2$$

In questo caso, le potenze della x sono le "feature" di cui vogliamo andare a costruire una combinazione lineare

<u>ES</u>:

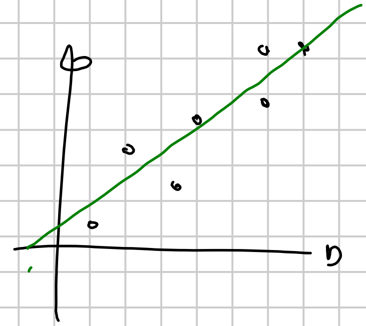


← approssimazione (o FIT polinomiale)

interpolazione

<u>Oss</u>: la retta dei minimi quadrati (regressione lineare)

è il caso $d=1$ di questo problema: cerco la retta $y = ax+b$ che approssima meglio i punti dati, cioè



$$\min \left\| \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & x_1 \\ 1 & x_2 \\ \vdots & \\ 1 & x_m \end{bmatrix}}_{X} \underbrace{\begin{bmatrix} b \\ a \end{bmatrix}}_{\alpha} - \underbrace{\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_m \end{bmatrix}}_{y} \right\|_2^2$$

Possiamo risolverlo con le equazioni normali $X^T(X\alpha - y) = 0$

cioè $$\alpha = \underbrace{(X^T X)}_{2\times 2}^{-1}(X^T y)$$

(oss: questo produce le formule che stanno su molti libri di scuola, espandendo l'inversa $2\times 2$).

---

Oss: l'interpolazione polinomiale (polinomio che passa esattamente per dati punti) si può anche usare per approssimare funzioni più complicate: data $f(x)$ definita da una formula complicata, posso calcolare un po' di coppie $(x_i, f(x_i))$ e rimpiazzare $f(x)$ con il polinomio $p(x)$.


Questo caso assomiglia molto a uno sviluppo di Taylor:

$$f(x) = \underbrace{f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0) + \dots + \frac{f^{(d)}(x_0)}{d!}(x-x_0)^d}_{\text{polinomio di grado } d} + R(x)$$

Per l'interpolazione, vale una formula analoga a quella del resto di Lagrange dello sviluppo di Taylor:

$$f(x) = \underbrace{p(x)}_{\text{polinomio di interpolazione}} + \frac{f^{(d+1)}(\xi)}{(d+1)!} \underbrace{(x-x_0)(x-x_1)(x-x_2)\cdots(x-x_d)}_{\text{questo termine "rimpiazza" } (x-x_0)^{d+1} \text{ che avrei avuto in uno sviluppo di Taylor}} .$$