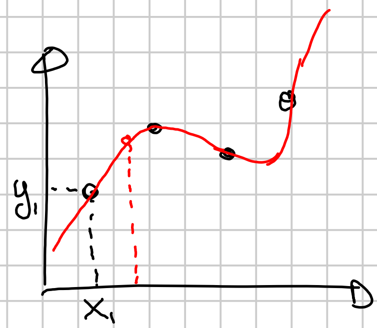
Problemi di interpolazione

$(x_i, y_i) \in \mathbb{R}^2$

Cerchiamo una funzione f che interpoli i dati, $y_i = f(x_i)$ $\forall i$



Interpolazione polinomiale: f è un polinomio di grado $\leq d$ ("degree")

$$p(x) = \alpha_0 + \alpha_1 x + \alpha_2 x^2 + \dots + \alpha_d x^d$$

Risultato: siano dati $d+1$ punti nel piano

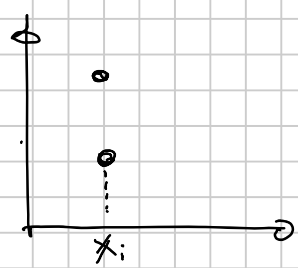
$(x_0, y_0), (x_1, y_1), \dots, (x_d, y_d) \in \mathbb{R}^2$.

Supponiamo che gli x_i siano distinti ($x_i \neq x_j$ quando $i \neq j$).

Allora esiste ed è unico un polinomio di grado $\leq d$ il cui grafico passi per i punti dati, cioè $p(x_i) = y_i$ $i = 0, 1, \dots, d$.

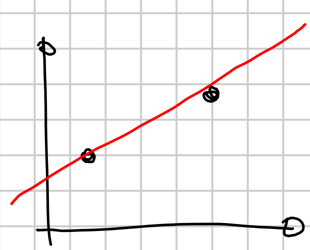
(Dim: dopo)

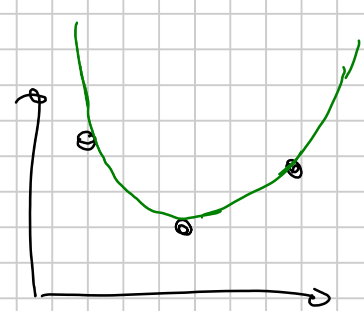
Perché x_i distinti?



Casi semplici:

per due punti passa una e una sola retta (grafico di un polinomio di grado ≤ 1)





Gli x_i sono detti <u>nodi</u>, gli y_i sono <u>valori</u> da interpolare

<u>Osservazione</u>: le condizioni da verificare formano un sistema lineare nelle incognite $\alpha_0, \alpha_1, \dots \alpha_d$, ad es.
se $(x_i, y_i) = (2,3)$:

$$p(x_i) = y_i \Rightarrow \alpha_0 + 2\alpha_1 + 4\alpha_2 + \dots + 2^d \alpha_d = 3$$

Possiamo scrivere il sistema lineare nella forma

$$\underbrace{\begin{bmatrix} 1 & x_0 & x_0^2 & \dots & x_0^d \\ 1 & x_1 & x_1^2 & \dots & x_1^d \\ 1 & x_2 & x_2^2 & \dots & x_2^d \\ \vdots & & & & \vdots \\ 1 & x_d & x_d^2 & \dots & x_d^d \end{bmatrix}}_{(d+1)\times(d+1)} \cdot \begin{bmatrix} \alpha_0 \\ \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \vdots \\ \alpha_d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y_0 \\ y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_d \end{bmatrix}$$

$(d+1)\times(d+1)$ quadrata

Difatti, la riga i-esima corrisponde a

$$p(x_i) = 1 \cdot \alpha_0 + x_i \cdot \alpha_1 + x_i^2 \alpha_2 + \dots + x_i^d \alpha_d = y_i$$

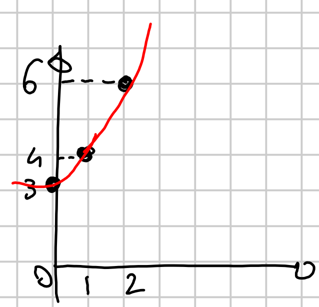
$$X \cdot \alpha = y$$

X è detta matrice di VANDERMONDE

È possibile mostrare che X è invertibile se e solo se gli x_i sono distinti.

Se X è invertibile, esiste ed è unico $\alpha \in \mathbb{R}^{d+1}$ che risolve il sistema lineare $\Rightarrow$ esiste ed è unico il polinomio di interpolazione

es: $(x_0, y_0) = (0,3)$
$(x_1, y_1) = (1,4)$
$(x_2, y_2) = (2,6)$



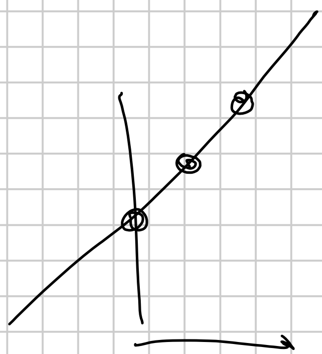
$$p(x) = \alpha_0 + \alpha_1 x + \alpha_2 x^2$$

$$\underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 4 \end{bmatrix}}_{X} \underbrace{\begin{bmatrix} \alpha_0 \\ \alpha_1 \\ \alpha_2 \end{bmatrix}}_{\alpha} = \underbrace{\begin{bmatrix} 3 \\ 4 \\ 6 \end{bmatrix}}_{y} \qquad 1 \cdot \alpha_0 + 0 \cdot \alpha_1 + 0 \cdot \alpha_2 = 3$$

Da Matlab: $\alpha = \begin{bmatrix} 3 \\ 0.5 \\ 0.5 \end{bmatrix}$

$$p(x) = 3 + 0.5x + 0.5x^2$$

$$p(2) = 3 + \frac{1}{2} \cdot 2 + \frac{1}{2} \cdot 2^2 = 6 \quad \checkmark$$



Se invece $y_3 = 5$, ho 3 punti allineati e

$$\alpha = \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \quad p(x) = 3 + 1 \cdot x + 0x^2$$