

Note Title

Tutoriel: mer 21 8:00

Esercizio 2. Sia A una matrice di dimensioni $2n \times 2n$ definita come

4 4 4

- $$\boxed{y}$$

Cerch: di Gershgorin: $K_1 = \{z \in \mathbb{C} : |z+2| \leq 1\} = K_{2n}$

$$\bullet K_n = K_{n+1} = \{z \in \mathbb{C} : |z+2| \leq |K|\}$$

$$|K| < 2$$

$$M^{-1} = -\frac{1}{2}I$$

$$A = M - N$$
$$N = M - A$$

$$N = \begin{bmatrix} & & -1 \\ & -k & \\ -1 & & \end{bmatrix}$$

$$J = M^{-1}N = \begin{bmatrix} 0 & K/2 & 0 \\ K/2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$J^2 = \begin{bmatrix} 0 & K/2 & 0 \\ K/2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 & K/2 & 0 \\ K/2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & K^2/4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & K/4 & 0 \\ 0 & K^2/4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Autovaleori di $J^2 = \left(\frac{1}{4}, \frac{1}{4}, \frac{K^2}{4}, \frac{K^2}{4}, 0, 0, \dots, 0 \right)$

Autovaleori di $J = \left(\pm \frac{1}{2}, \pm \frac{1}{2}, \pm \frac{K}{2}, \pm \frac{K}{2}, 0, 0, \dots, 0 \right)$

Se $Jv = v\lambda \rightarrow J^2v = J \cdot Jv = (J \cdot v)\lambda = v \cdot \lambda^2$

Se λ autovaleore di M :

- λ^2 autovaleore di M^2
- λ^K autovaleore di M^K
- $\lambda + \alpha$ autovaleore di $M + \alpha I$
- $p(\lambda)$ autovaleore di $p(M)$

$Mv = v\lambda \Rightarrow (M + \alpha I)v = Mv + \alpha v = v(\lambda + \alpha)$

$(q_0 I + q_1 A + \dots + q_d A^d)$

Il metodo di Jacobi è convergente se $\rho(J) < 1$

$\rho(J) = \max\left(\frac{1}{2}, \left|\frac{K}{2}\right|\right)$ $\rho(J) < 1$ per $|K| < 2$.

(Oss: se $|K| < 2$, A è pred. diagonale $\Rightarrow$ Jacobi converge sicuramente)

3. $A = \begin{bmatrix} -2 & -2 & \dots & -2 \\ -2 & -2 & \dots & -2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -2 & -2 & \dots & -2 \end{bmatrix}$

sottomatrici di Leslie: $\begin{bmatrix} -2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -2 & -2 \end{bmatrix}, \dots$

$\dots \begin{bmatrix} -2 & \dots & -2K \\ -2K & -2 & \dots \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -2 & \dots & -2K \\ -2K & -2 & \dots \end{bmatrix}, \dots$

$\forall A, LU$ esiste ed è unica
se e solo se le sotto matrici
di teste $A_{1:k, 1:k}$ sono
invertibili per $k=1, 2, \dots, 2n-1$

$$\dots \begin{bmatrix} -2 & & \\ & \begin{bmatrix} -2 & k \\ k & -2 \end{bmatrix} & \\ & & \ddots & \\ & & & -2 \end{bmatrix}$$

(2n-1) x (2n-1)

Queste matrici corrispondono a sistemi lineari che coinvolgono separatamente
 $\{x_1\}, \{x_2\}, \dots, \{x_{n-1}\}, \{x_n, x_{n+1}\}, \{x_{n+2}\}, \dots$

Le matrici sono invertibili se lo sono le matrici associate a
questi sistemi lineari costituenti, cioè $\begin{bmatrix} -2 \end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix} -2 & k \\ k & -2 \end{bmatrix}$
sempre invertibile

↳ invertibile se $0 \neq \det \begin{bmatrix} -2 & k \\ k & -2 \end{bmatrix} = 4 - k^2$, cioè $k \neq \pm 2$.

In alternativa: applico direttamente il metodo di elim. di Gauss ad A :

$$U_1 = A = \left[\begin{array}{ccc|ccc} -2 & & & & & \\ & -2 & & & & \\ & & \ddots & & & \\ & & & -2 & k & \\ & & & k & -2 & \\ & & & & & \ddots \\ & & & & & & -2 \end{array} \right] \quad \text{riga } 2n \leftrightarrow \text{riga } 2n - \left(\frac{1}{-2} \right) \text{ riga } 1$$

$$\left[\begin{array}{c|c} -2 & 1 \\ \hline 1 & -2 \end{array} \right]$$

$$U_2 = \left[\begin{array}{ccc|ccc} -2 & & & & & \\ & -2 & & & & \\ & & \ddots & & & \\ & & & -2 & k & \\ & & & k & -2 & \\ & & & & & \ddots \\ & & & & & & -2 \end{array} \right] = U_3 = U_4 = \dots = U_{n-1}$$

già ten!

$$\text{riga } (n+1) \leftrightarrow \text{riga } (n+1) - \left(\frac{k}{-2} \right) \text{ riga } n$$

$$U_n = \left[\begin{array}{ccc|ccc} -2 & & & & & \\ & -2 & & & & \\ & & \ddots & & & \\ & & & -2 & k & \\ & & & k & -2 & \\ & & & & & \ddots \\ & & & & & & -2 \end{array} \right]$$

$$h = -2 - \left(\frac{k}{-2} \right) \cdot k$$

$$= \frac{-4 + k^2}{2}$$

già zero!

$$A = LU$$

$$U_{2n} = \begin{bmatrix} -2 & & & & 1 \\ & -2 & & & \\ & & \ddots & & \\ & & & -2 & \\ & & & & 1 \end{bmatrix} = U$$

$n+1$

$$L = \begin{bmatrix} 1 & & & & \\ & \ddots & & & \\ & & 1 & & \\ & & & -\frac{k}{2} & 1 \\ & & & & \ddots \\ & & & & & 1 \end{bmatrix}$$

$n+1$

$$A_{n+1, n+1} = (\text{riga } n+1 \text{ di } L) \cdot (\text{colonna } n+1 \text{ di } U) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 & -\frac{k}{2} & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix}$$

$$= -\frac{k}{2} \cdot k + 1 \cdot 1 = -\frac{k^2}{2} + \frac{-4 + k^2}{2} = \frac{-k^2 - 4 + k^2}{2} = -2.$$

$$A = LU \rightarrow \det(A) = \det(L) \cdot \det(U)$$

$$= 1 \cdot 1 \cdot \dots \cdot 1 \cdot (-2) \cdot (-2) \cdot \dots \cdot (-2) \cdot 1 \cdot (-2) \cdot (-2) \cdot \dots \cdot (-2) \cdot (-\frac{3}{2})$$

$$= (-1)^{2n-1} \cdot 2^{2n-2} \cdot \frac{3}{2} \cdot \frac{k^2-4}{2} = -2^{2n-4} \cdot 3 \cdot (k^2-4)$$

ok!

ES: per controllo: $n=2$ $A = \begin{bmatrix} -2 & -2 & k & 1 \\ & k & -2 & \\ & & 1 & -2 \\ & & & -2 \end{bmatrix}$ $U = \begin{bmatrix} -2 & -2 & \frac{k^2-k}{2} & 1 \\ & \frac{k^2-k}{2} & & \\ & & -3/2 & \\ & & & -3/2 \end{bmatrix}$ $\det U = -3(k^2-4)$

$\det A = 0$ solo questo si annulla il fattore k^2-4 , cioè $k = \pm 2$.

4. Dobbiamo calcolare

$$y = Ab = \begin{bmatrix} -2 & & & & 1 \\ & -2 & & & \\ & & \ddots & & \\ & & & -2 & \\ & & & & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \\ b_{n+1} \\ \vdots \\ b_{2n} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2b_1 + b_{2n} \\ -2b_2 \\ \vdots \\ -2b_{n-1} \\ -2b_n + kb_{n+1} \\ -2b_{n+1} + kb_n \\ -2b_{n+2} \\ \vdots \\ -2b_{2n-1} \\ -2b_{2n} + b_1 \end{bmatrix} = -2b + \begin{bmatrix} b_{2n} \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ kb_{n+1} \\ kb_n \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ b_1 \end{bmatrix}$$

function $y = \text{mat_prod}(K, b)$

$$y = -2 \times b;$$

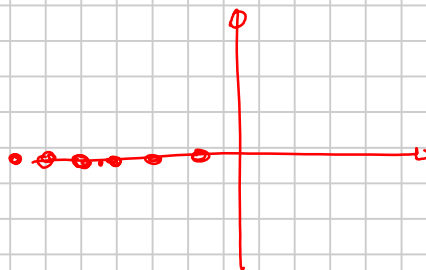
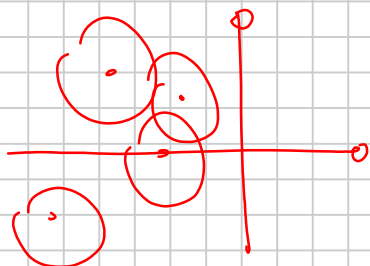
$$n = \text{length}(b) / 2;$$

$$y(1) = y(1) + b(2 \times n);$$

$$y(n) = y(n) + K \times b(n+1);$$

$$y(n+1) = y(n+1) + K \times b(n);$$

$$y(2 \times n) = y(2 \times n) + b(1);$$



ES: studiare la conv. del metodo di Gauss-Seidel per $Ax=b$ e

$$A = \begin{bmatrix} 1 & & & c \\ -\frac{1}{2} & 1 & & c \\ & -\frac{1}{2} & 1 & c \\ & & \ddots & \vdots \\ & & & -\frac{1}{2} & 1 \end{bmatrix} \rightarrow A = \begin{cases} 1 & i=j, \\ -\frac{1}{2} & i=j+1, \\ c & j=n, i=1,2,\dots,n-1, \\ 0 & \text{altrimenti.} \end{cases}$$

$$M = \begin{bmatrix} 1 & & & 0 \\ -\frac{1}{2} & 1 & & 0 \\ & -\frac{1}{2} & 1 & 0 \\ & & \ddots & \vdots \\ 0 & & & -\frac{1}{2} & 1 \end{bmatrix}$$

$$N = \begin{bmatrix} 0 & \dots & 0 & -c \\ & & & -c \\ & & & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & -c \\ & & & 0 \end{bmatrix}$$

prime $n-1$ colonne
tutte di zeri

$H = M^{-1}N$ le colonne $h_j = M^{-1} \cdot N_j$, dove N_j è la j -esima colonna di N

Quindi $h_j = 0$ per $j=1,2,\dots,n-1$ e $h_n = M^{-1} \cdot \begin{bmatrix} -c \\ -c \\ \vdots \\ -c \\ 0 \end{bmatrix}$.

L'ultima colonna h_n è la soluzione del sist. lineare $Mx = N_n = \begin{bmatrix} -c \\ -c \\ \vdots \\ -c \\ 0 \end{bmatrix}$

$$\begin{bmatrix} 1 & & & & \\ -\frac{1}{2} & 1 & & & \\ & -\frac{1}{2} & 1 & & \\ & & \ddots & \ddots & \\ & & & -\frac{1}{2} & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ \vdots \\ x_{n-1} \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -C \\ -C \\ -C \\ \vdots \\ -C \\ 0 \end{bmatrix}$$

$x_1 = -C$
 $-\frac{1}{2}x_1 + x_2 = -C \Rightarrow x_2 = \frac{1}{2}x_1 - C = -\frac{C}{2} - C = -\frac{3}{2}C$
 $-\frac{1}{2}x_2 + x_3 = -C \Rightarrow x_3 = \frac{1}{2}x_2 - C = -\frac{3}{4}C - C = -\frac{7}{4}C = -2C + \frac{1}{4}C$

riga 4:

$$-\frac{1}{2}x_3 + x_4 = -C \Rightarrow x_4 = \frac{1}{2}x_3 - C = -\frac{7}{8}C - C = -\frac{15}{8}C = -2C + \frac{1}{8}C$$

Sembra che $x_k = -2C + \frac{1}{2^{k-1}}C$:

Difatti, la k -esima riga contiene l'equazione

$$-\frac{1}{2}x_{k-1} + x_k = -C, \text{ e quindi } x_k = \frac{1}{2}x_{k-1} - C = \frac{1}{2}\left(-2C + \frac{1}{2^{k-2}}C\right) - C$$

$$= -C + \frac{1}{2^{k-1}}C - C = -2C + \frac{1}{2^{k-1}}C \quad \checkmark$$

Questo vale per ogni $k=2,3,\dots,n-1$

L'ultima riga la termine con 0 anziché C :

$$-\frac{1}{2}x_{n-1} + x_n = 0 \Rightarrow x_n = \frac{1}{2}x_{n-1} = \frac{1}{2}\left(-2C + \frac{1}{2^{n-2}}C\right) = -C + \frac{1}{2^{n-1}}C$$

$$= \frac{-2^{n-1} + 1}{2^{n-1}}C$$

$$H = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$$

$n-1$ colonne nulle

H è triangolare superiore!

autovalori di $H = \left(0, 0, 0, \dots, 0, \frac{-2^{n-1} + 1}{2^{n-1}}C\right)$

$$\rho(H) = \left| \frac{-2^{n-1} + 1}{2^{n-1}}C \right| = \frac{2^{n-1} - 1}{2^{n-1}}|C|$$

$$\rho(H) < 1 \text{ se e solo se } |C| < \frac{2^{n-1}}{2^{n-1} - 1}.$$

