

Metodo del punto fisso

Note Title

2026-02-06

Risolve problemi nella forma $x = \Phi(x)$
dove Φ è una funzione

es: $x = \frac{1}{\underbrace{\mu - \lambda 2^{-x}}_{\Phi(x)}}$

es: $x^3 - 2 = 0 \rightarrow x = \frac{2}{x^2} \Phi(x)$
 $\rightarrow x = x + (x^3 - 2) \Phi(x)$
 $\rightarrow x = x - \frac{1}{6}(x^3 - 2) \Phi(x)$

$$f(\alpha) = 0$$



$$\alpha = \Phi(\alpha)$$

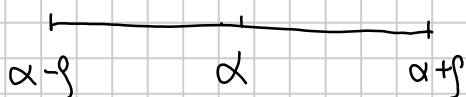
α punto fisso
della funzione Φ

Metodo

$$\begin{cases} x_0 \text{ dato} \\ x_{k+1} = \Phi(x_k) \end{cases} \quad k = 0, 1, 2, 3, \dots$$

$$x_1 = \Phi(x_0), \quad x_2 = \Phi(x_1), \dots$$

$$I = \{x : |\alpha - x| \leq \rho\} = [\alpha - \rho, \alpha + \rho]$$



Definizione Φ tale che $\Phi(\alpha) = \alpha$ $\Phi \in C^1$ (derivabile, Φ' continua)

$$L = \max_{x \in I} |\Phi'(x)|.$$

Teo (Weierstrass): se I è un intervallo chiuso e limitato, e g è una funzione continua su I , allora esiste $\max_{x \in I} g(x)$

I chiuso e limitato $\checkmark$ $I = [\alpha - \rho, \alpha + \rho]$

g continua: $|\Phi'(x)|$ composizione di $\Phi'(x)$ che è continua, e $x \mapsto |x|$ che è continua.

Con questi agili a disposizione,

Teo (convergenza locale del metodo di punto fisso):

siano dati: $\alpha, \rho > 0$ reali, Φ una funzione definita su $I = [\alpha - \rho, \alpha + \rho]$ di classe C^1 con $\Phi(\alpha) = \alpha$, e supponiamo che $L = \max_{x \in I} |\Phi'(x)|$ sia strettamente minore di 1 ($L < 1$). Allora per ogni $x_0 \in I$ la successione generata soddisfa

- $x_k \in I$ per ogni k
- $\lim_{k \rightarrow \infty} x_k = \alpha$

Dim: consideriamo l'errore $|x_k - \alpha|$

$$\left| \frac{x_{k+1} - \alpha}{x_k - \alpha} \right| = \left| \frac{\Phi(x_k) - \Phi(\alpha)}{x_k - \alpha} \right| = \left| \Phi'(\xi_k) \right|$$

per il teorema di Lagrange, esiste ξ_k compreso tra x_k e α che soddisfa questo approssimante.

- Il punto ξ_k dipende da k
- Questo è vero indipendentemente dall'ordine in cui sono α e x_k : $\xi_k \in (\alpha, x_k)$ oppure (x_k, α) .

Dimostriamo per induzione che per ogni k si ha

$$|x_k - \alpha| \leq L^k \rho.$$

• $k=0$ $|x_0 - \alpha| \leq \rho \iff x_0 \in I$ vero per ipotesi

• $k \Rightarrow k+1$

$$|x_{k+1} - \alpha| = |\Phi'(\xi_k)| \cdot |x_k - \alpha| \stackrel{\text{ip. induttiva}}{\leq} L \cdot L^k \rho = L^{k+1} \rho$$

$$|x_k - \alpha| \leq L^k \rho \leq \rho \text{ per ipotesi induttiva + } L < 1 \Rightarrow x_k \in I$$

ξ_k compreso tra x_k e α , che sono entrambi in I , quindi $\xi_k \in I$.

Quindi $|\Phi'(\xi_k)| \leq \max_{x \in I} |\Phi'(x)| = L$.

$$\left[\begin{array}{c} \alpha \\ \xi_k \\ x_k \end{array} \right]$$

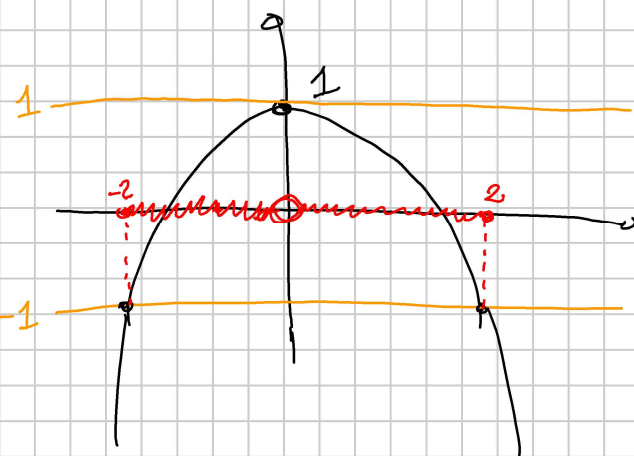
Poiché $L < 1$, $L^k \rho \rightarrow 0$, quindi $|x_k - \alpha| \rightarrow 0$

Esempio: $\Phi(x) = x - \frac{1}{6}(x^3 - 2)$ punto fisso $\alpha = \sqrt[3]{2} \approx 1.26$

$$\Phi'(x) = 1 - \frac{1}{6}3x^2 = 1 - \frac{1}{2}x^2$$

Quanto x che $|\Phi'(x)| < 1$?

$$1 - \frac{1}{2}x^2 = -1 \iff \frac{1}{2}x^2 = 2 \iff x^2 = 4$$



Quando $x \in (-2, 0) \cup (0, 2)$.

Per applicare il teorema, mi serve un intervallo chiuso e centrato in $\alpha \approx 1.26$ in cui si abbia $|\Phi'(x)| < 1$

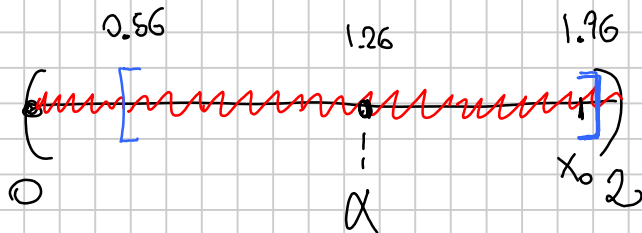
Ad esempio, $\rho = 0.5$ produce

$$[\alpha - \rho, \alpha + \rho] \approx [0.76, 1.76]. \text{ Sta tutto compreso in } (0, 2)$$

$$\Rightarrow |\Phi'(x)| < 1 \text{ su tutti i punti dell'intervallo} \Rightarrow L < 1$$

Il teorema dimostrato mi assicura che per ogni $x_0 \in I \approx [0.56, 1.96]$ l'algoritmo converge ad $\alpha = \sqrt[3]{2}$

Il metodo converge per $x_0 = 1.9$? Possiamo trovare un intervallo su cui valgono le ipotesi del teorema?

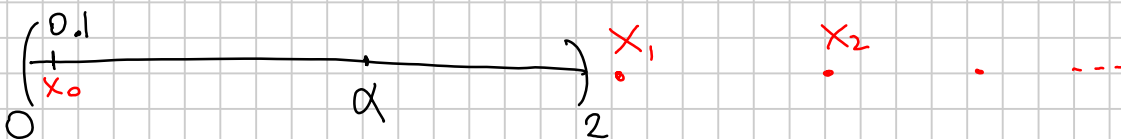


Possiamo prendere ogni intervallo della forma

$$\sqrt[3]{2} + \rho = 2 - \varepsilon \Leftrightarrow \rho = 2 - \sqrt[3]{2} - \varepsilon$$

$$\alpha - \rho = \sqrt[3]{2} - 2 + \sqrt[3]{2} + \varepsilon \approx 0.52 + \varepsilon.$$

Il metodo converge se prendo $x_0 = 0.1$?

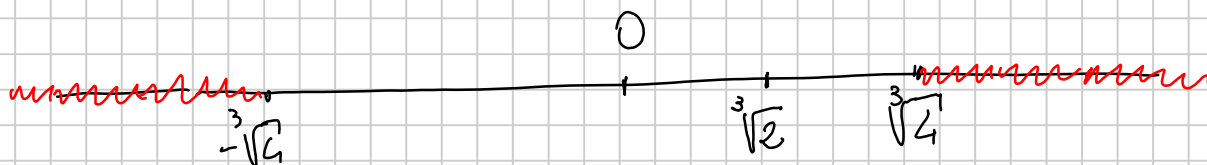


Il teorema non ci permette di concluderlo: non riusciamo a trovare un intervallo centrato in α , tutto compreso in $(0, 2)$, e che contenga $x_0 = 0.1$.

ES: $x = \frac{2}{x^2}$ $\Phi(x) = \frac{2}{x^2}$ $x^3 - 2 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{2}{x^2}$

$$\Phi'(x) = \frac{d}{dx} 2x^{-2} = 2(-2)x^{-3} = -\frac{4}{x^3}.$$

Riusciamo a trovare un intervallo $[\alpha - \rho, \alpha + \rho]$ in cui $|\Phi'(x)| < 1$?

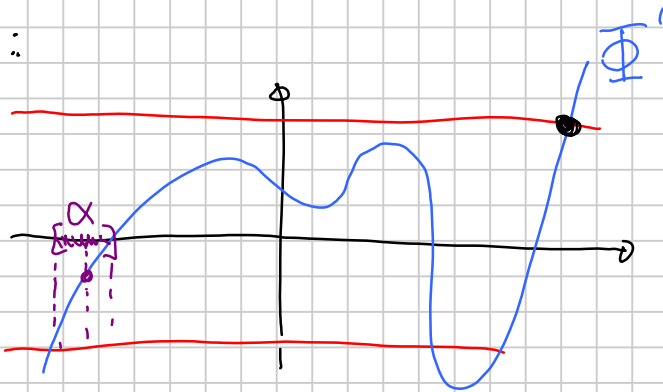


$$\Phi'(\alpha) = -\frac{4}{\alpha^3} = -2$$

Già $|\Phi'(\alpha)|$ è maggiore di 1, non riuscivò mai a trovare un intervallo su cui $\max_{x \in [\alpha-\rho, \alpha+\rho]} |\Phi'(x)| < 1$.

Oss: se $|\Phi'(\alpha)| \geq 1$, allora non riuscivò mai a trovare un intervallo che verifichi le ipotesi del teorema.

Oss: se $|\Phi'(\alpha)| < 1$, riesco sempre a trovare un ρ (eventualmente molto piccolo) che soddisfa le ipotesi del teorema:



Poiché Φ' è continua, se $|\Phi'(\alpha)| < 1$ esiste sempre un intervallo centrato in α su cui $|\Phi'(x)| < 1$ su tutto l'intervallo.

```
function x = puntofisso(phi, x0, n)
x(1) = x0;
for k = 1:n
    x(k+1) = phi(x(k));
end
```

Contro: non c'è una scelta semplice di x_0 che funzioni; convergenza non garantita.

Pro: potrebbe essere molto più veloce della bisezione.

Oss: l'errore si visualizza molto meglio su un grafico in scale logaritmica.

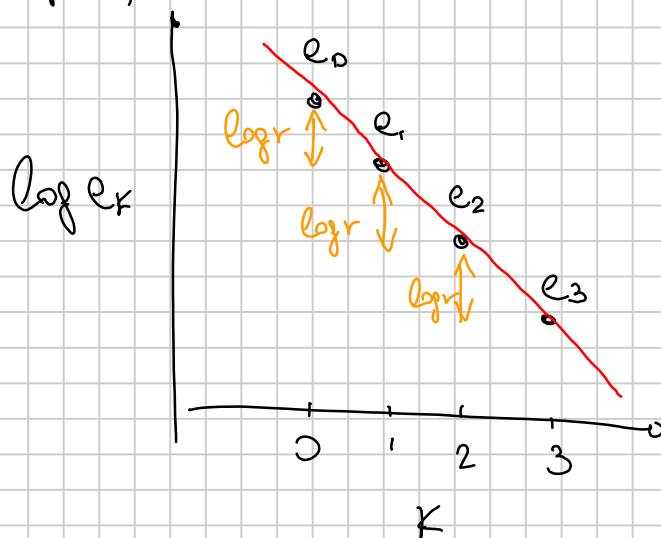
Osservazione: Una progressione geometrica

$$e_0 = a \quad e_1 = ar \quad e_2 = ar^2, \quad e_3 = ar^3, \quad \dots \quad e_k = ar^k$$

(r = "rate", tasso, ragione)

se plottata su un grafico in scala logaritmica corrisponde a una retta.

Difetti, $e_{k+1} = e_k \cdot r \rightarrow \log e_{k+1} = \log e_k + \log r$



Quando $r < 1$,
 $\log r < 0$, e la retta
 "punta verso il basso",
 $e_k \rightarrow 0$

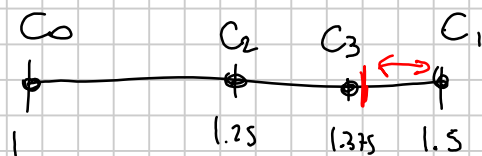
Definizione: un metodo iterativo converge linearmente
 (con ordine di convergenza 1) quando gli errori
 $e_k = |x_k - \alpha|$ soddisfano

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{e_{k+1}}{e_k} = r \quad r \in (0, 1)$$

Teo: il metodo del punto fisso, sotto le stesse ipotesi del
 teorema precedente ($\Phi \in C^1$), converge almeno linearmente
 con $r = |\Phi'(\alpha)|$.

Oss: la linea rossa è a "zig-zag"

$C_0 = 1,$	$C_1 = 1.5$	$C_2 = 1.25,$	$C_3 = 1.375$	$x^2 - 2$
$ 1 - \alpha $	$ 1.5 - \alpha $	$ 1.25 - \alpha $	$ 1.375 - \alpha $	$\alpha = \sqrt{2}$
$ 1.5 - 1.414 < 1.25 - 1.414 $				



Dim del teorema: per il metodo del punto fisso

$$\frac{|X_{k+1} - \alpha|}{|X_k - \alpha|} = |\Phi'(\xi_k)|$$

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{|X_{k+1} - \alpha|}{|X_k - \alpha|} = \lim_{k \rightarrow \infty} |\Phi'(\xi_k)|$$

$\lim_{k \rightarrow \infty} \xi_k = \alpha$ perché ξ_k è compreso tra α e X_k

quindi possiamo scrivere

$$0 \leq |\xi_k - \alpha| \leq |X_k - \alpha|$$

[Per il teorema dei carabinieri, $|\xi_k - \alpha| \rightarrow 0$, cioè $\xi_k \rightarrow \alpha$.

[Se $\xi_k \rightarrow \alpha$, allora anche $|\Phi'(\xi_k)| \rightarrow |\Phi'(\alpha)|$.
(perché $|\Phi'(x)|$ è continua).

$\Rightarrow$ per il metodo del punto fisso,

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{|X_{k+1} - \alpha|}{|X_k - \alpha|} = |\Phi'(\alpha)| = r$$

Quando $r = \Phi'(\alpha) = 0$, la distanza verticale tra due punti successivi del grafico non converge a una costante $\log r$, ma a $\log 0 = -\infty$, quindi le iterazioni

converge a 0 più velocemente di ogni retta.

convergenza superlineare