Esercizio 2. Sia $A \in \mathbb{R}^{2n\times 2n}$, $n \geq 2$, con la seguente struttura

$$A = \left[\begin{array}{c|c} I_n & \alpha I_n \\ \hline \alpha I_n & I_n \end{array}\right],$$

con α parametro reale e I_n matrice identità di dimensione n.

1. Si dica per quali valori del parametro α la matrice è a predominanza diagonale.
2. * Si dica per quali valori del parametro α la matrice è fattorizzabile LU e nel caso se ne determinino i due fattori triangolari.
3. Si dica per quali valori del parametro α il metodo di Gauss-Seidel risulta convergente
4. Si dimostri che la matrice di iterazione del metodo di Jacobi è tale per cui $J^2 = \alpha^2 I_{2n}$. Sfruttando tal;e relazione si dica per quali valori di α il metodo di Jacobi risulta convergente.
5. Si scriva una funzione Matlab che implementa un passo del metodo di Gauss-Seidel. La funzione prende in ingresso il parametro α, il vettore b e l'iterazione x_{old} restituendo l'iterazione successiva x_{new}. La funzione deve avere costo lineare in n e non richiedere la memorizzazione di matrici.

1. Su ogni riga, 1 su diagonale e un α fuori e poi tutti 0

$$|1| > |\alpha| + 0 + 0 + \dots + 0 \quad \text{su ogni riga}$$

Pred. diagonale per righe se $|\alpha| < 1$, cioè $\alpha \in (-1,1)$

La matrice è simmetrica, $A^T = A$, quindi la pred. diag. per colonne è equivalente a quella per righe su $A^T = A$ e quindi la condizione è la stessa, $\alpha \in (-1,1)$.

2.

$$A = \left[\begin{array}{cccc|cccc} 1 & & & & \alpha & & & \\ & 1 & & & & \alpha & & \\ & & \ddots & & & & \ddots & \\ & & & 1 & & & & \alpha \\ \hline \alpha & & & & 1 & & & \\ & \alpha & & & & 1 & & \\ & & \ddots & & & & \ddots & \\ & & & \alpha & & & & 1 \end{array}\right]$$

Le prime n sottomatrici pr. di testa sono I

Quelli successivi, non è chiaro.

Proviamo a effettuare la fattorizzazione:

Passo 1: $R_{n+1} \leftarrow R_{n+1} - \boxed{\alpha} R_1$ produce

$$U_2 = \left[\begin{array}{cccc|cccc} 1 & & & & \alpha & & & \\ & 1 & & & & \alpha & & \\ & & \ddots & & & & \ddots & \\ & & & 1 & & & & \alpha \\ \hline 0 & & & & 1-\alpha^2 & & & \\ & \alpha & & & & 1 & & \\ & & \ddots & & & & \ddots & \\ & & & \alpha & & & & 1 \end{array}\right]$$

$R_{n+2} \leftarrow R_{n+2} - \boxed{\alpha} R_2$

$$U_3 = \left[\begin{array}{ccccc|ccccc} 1 & & & & & \alpha & & & & \\ & 1 & & & & & \alpha & & & \\ & & \ddots & & & & & \ddots & & \\ & & & & 1 & & & & & \alpha \\ \hline 0 & & & & & 1-\alpha^2 & & & & \\ & 0 & & & & & 1-\alpha^2 & & & \\ & & \alpha & & & & & 1 & & \\ & & & \ddots & & & & & \ddots & \\ & & & & \alpha & & & & & 1 \end{array}\right]$$

Gli altri passi sono analoghi; al termine dei primi n passi ho

$$U_{n+1} = \left[\begin{array}{cccc|cccc} 1 & & & & \alpha & & & \\ & 1 & & & & \alpha & & \\ & & \ddots & & & & \ddots & \\ & & & 1 & & & & \alpha \\ \hline 0 & & & & 1-\alpha^2 & & & \\ & 0 & & & & 1-\alpha^2 & & \\ & & \ddots & & & & \ddots & \\ & & & 0 & & & & 1-\alpha^2 \end{array}\right]$$

← questa è già triangolare superiore!

sono già zeri!

$$L_{n+1} = \left[\begin{array}{cccc|cccc} 1 & & & & & & & \\ & 1 & & & & 0 & & \\ & & \ddots & & & & & \\ & & & 1 & & & & \\ \hline \alpha & & & & 1 & & & \\ & \alpha & & & & 1 & & \\ & & \ddots & & & & \ddots & \\ & & & \alpha & & & & 1 \end{array}\right]$$

Per verificare, facciamo il prodotto:

$$L_{n+1} U_{n+1} = \left[\begin{array}{c|c} I_n & 0 \\ \hline \alpha I_n & I_n \end{array}\right] \cdot \left[\begin{array}{c|c} I_n & \alpha I_n \\ \hline 0 & (1-\alpha^2) I_n \end{array}\right] = \left[\begin{array}{c|c} I_n I_n + 0 \cdot 0 & I_n \cdot \alpha I_n + 0 \cdot \ldots \\ \hline \alpha I_n \cdot I_n + I_n \cdot 0 & \alpha I_n \cdot \alpha I_n + I_n \cdot (1-\alpha^2) I_n \end{array}\right]$$

$$= \left[\begin{array}{c|c} I_n & \alpha I_n \\ \hline \alpha I_n & (\cancel{\alpha^2}+(1-\cancel{\alpha^2}))I_n \end{array}\right] = A$$

Riusciamo a fare questi passaggi per ogni $\alpha \in \mathbb{R}$, non servono condizioni particolari (anche se quando $\alpha = \pm 1$ il blocco $(2,2)$ è di tutti zeri).

Altra possibile verifica: il punto 1 mi diceva che A è invertibile per $\alpha \in (-1,1)$. Il punto 2 mi permette di concludere che

$$\det A = \det L \cdot \det U = \underbrace{1 \cdot 1 \cdot 1 \cdot \ldots \cdot 1}_{\det L} \cdot \underbrace{1 \cdot 1 \cdot \ldots \cdot 1 (1-\alpha^2) \cdot \ldots \cdot (1-\alpha^2)}_{\det U} = (1-\alpha^2)^n$$

e quindi A è singolare per $\alpha = \pm 1$, invertibile altrimenti.

---

3. $A = \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & & & \alpha & & \\ & \ddots & & & \ddots & \\ & & 1 & & & \alpha \\ \hline \alpha & & & 1 & & \\ & \ddots & & & \ddots & \\ & & \alpha & & & 1 \end{array}\right]$ $\quad M = \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & & & & & \\ & \ddots & & & 0 & \\ & & 1 & & & \\ \hline \alpha & & & 1 & & \\ & \ddots & & & \ddots & \\ & & \alpha & & & 1 \end{array}\right]$ $\quad N = \left[\begin{array}{ccc|ccc} 0 & & & -\alpha & & \\ & \ddots & & & \ddots & \\ & & 0 & & & -\alpha \\ \hline 0 & & & 0 & & \\ & \ddots & & & \ddots & \\ & & 0 & & & 0 \end{array}\right]$

$\Downarrow$

tutti gli el. diagonali sono $\neq 0$, quindi il metodo è applicabile

<u>Convergente</u> se e solo se $\rho(H) < 1$, $\quad H = M^{-1}N$

La colonna j-esima di H è $M^{-1} \cdot$ (colonna j-esima di N)

cioè la soluzione del sistema $\quad M h_j = n_j$

Per $j = 1, \ldots n$, $\quad n_j = 0$ quindi $h_j = 0$

Calcoliamo h_{n+1}:

$j = n+1$

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & & & & & \\ & \ddots & & & 0 & \\ & & 1 & & & \\ \hline \alpha & & & 1 & & \\ & \ddots & & & \ddots & \\ & & \alpha & & & 1 \end{array}\right] \begin{bmatrix} h_{j,1} \\ h_{j2} \\ \vdots \\ h_{j,2n} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\alpha \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{cases} h_{j1} = -\alpha \\ h_{j2} = 0 \\ \vdots \\ h_{jn} = 0 \\ \alpha h_{j1} + h_{j,n+1} = 0 \\ \alpha h_{j2} + h_{j,n+2} = 0 \\ \vdots \\ \alpha h_{jn} + h_{j,2n} = 0 \end{cases} \qquad h_j = \begin{bmatrix} -\alpha \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 0 \\ \hline \alpha^2 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$h_{j,n+1} = -\alpha h_{j1} = -\alpha \cdot (-\alpha) = \alpha^2$$

$j = n+2$

$$\begin{cases} h_{j1} = 0 \\ h_{j2} = -\alpha \\ h_{j3} = 0 \\ \vdots \\ h_{jn} = 0 \\ h_{j,n+1} = -\alpha h_{j1} \\ h_{j,n+2} = -\alpha h_{j2} \\ \vdots \\ h_{j,2n} = -\alpha h_{jn} \end{cases} \qquad h_j = \begin{bmatrix} 0 \\ -\alpha \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ \hline 0 \\ \alpha^2 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}$$

Quindi, complessivamente,

$$H = M^{-1} N = \left[\begin{array}{c|ccc} & -\alpha & & \\ 0 & & \ddots & \\ & & & -\alpha \\ \hline & \alpha^2 & & \\ 0 & & \ddots & \\ & & & \alpha^2 \end{array}\right].$$

In alternativa, calcolo M^{-1}:

$$M = \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & & & & & \\ & 1 & & & 0 & \\ & & \ddots & & & \\ & & 1 & & & \\ \hline \alpha & & & 1 & & \\ & \alpha & & & 1 & \\ & & \ddots & & & \ddots \\ & & \alpha & & & 1 \end{array}\right]$$

è come avere tanti blocchi indipendenti della forma $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ \alpha & 1 \end{bmatrix}$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ \alpha & 1 \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -\alpha & 1 \end{bmatrix}$$

Analogamente

$$M^{-1} = \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & & & & & \\ & \ddots & & & 0 & \\ & & 1 & & & \\ \hline -\alpha & & & 1 & & \\ & \ddots & & & \ddots & \\ & & -\alpha & & & 1 \end{array}\right]$$

(si può verificare calcolando $M^{-1} \cdot M = I$)

(Ricorda un po' le inverse delle matrici elementari di Gauss:

$$E_k^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & & & & \\ & \ddots & & & \\ & & 1 & & \\ & & -L_{k+1,k} & \ddots & \\ & & \vdots & & \\ & & -L_{nk} & & 1 \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & & & & \\ & \ddots & & & \\ & & 1 & & \\ & & L_{k+1,k} & \ddots & \\ & & \vdots & & \\ & & L_{n,k} & & 1 \end{bmatrix}$$

Anche in questo modo, possiamo calcolare

$$H = M^{-1}N = \left[\begin{array}{ccc|ccc} 0 & & & -\alpha & & \\ & \ddots & & & \ddots & \\ & & 0 & & & -\alpha \\ \hline 0 & & & \alpha^2 & & \\ & \ddots & & & \ddots & \\ & & 0 & & & \alpha^2 \end{array}\right]$$

(tutti gli altri elementi non disegnati sono 0)

$\rho(H) = \max |\lambda|$, tra tutti i λ autovalori di H

H è triang. superiore $\rightarrow$ i suoi autovalori sono gli elementi sulla diagonale (contati con molt. algebrica).

Infatti, $\det(H - \lambda I) = \det \left[\begin{array}{ccc|ccc} 0-\lambda & & & -\alpha & & \\ & \ddots & & & \ddots & \\ & & 0-\lambda & & & -\alpha \\ \hline & & & \alpha^2-\lambda & & \\ & 0 & & & \ddots & \\ & & & & & \alpha^2-\lambda \end{array}\right] = (0-\lambda)^n (\alpha^2 - \lambda)^n$

Quindi gli autovalori di H sono 0 (con $m_a = n$)

α^2 (con $m_a = n$)

$\rho(H) = \max(|0|, |\alpha^2|) = |\alpha|^2$

$\rho(H) < 1$ quando $|\alpha| < 1$, cioè $\boxed{\alpha \in (-1, 1).}$

4:

$$A=\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & & & \alpha & & \\ & \ddots & & & \ddots & \\ & & 1 & & & \alpha \\ \hline \alpha & & & 1 & & \\ & \ddots & & & \ddots & \\ & & \alpha & & & 1 \end{array}\right]$$

Jacobi:

$$M=\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & & & & & \\ & \ddots & & & 0 & \\ & & 1 & & & \\ \hline & & & 1 & & \\ & 0 & & & \ddots & \\ & & & & & 1 \end{array}\right]=I_{2n}$$

$$N=\left[\begin{array}{ccc|ccc} & & & -\alpha & & \\ & 0 & & & \ddots & \\ & & & & & -\alpha \\ \hline -\alpha & & & & & \\ & \ddots & & & 0 & \\ & & -\alpha & & & \end{array}\right]=\left[\begin{array}{c|c} 0 & -\alpha I_n \\ \hline -\alpha I_n & 0 \end{array}\right]$$

$$H=M^{-1}N=I^{-1}\cdot N=N=\left[\begin{array}{c|c} 0 & -\alpha I_n \\ \hline -\alpha I_n & 0 \end{array}\right]=J$$

$$J^2=\left[\begin{array}{c|c} 0 & -\alpha I_n \\ \hline -\alpha I_n & 0 \end{array}\right]\cdot\left[\begin{array}{c|c} 0 & -\alpha I_n \\ \hline -\alpha I_n & 0 \end{array}\right]=\left[\begin{array}{c|c} \alpha^2 I_n & 0 \\ \hline 0 & \alpha^2 I_n \end{array}\right]=\alpha^2 I_{2n}$$

Oss: se λ autovalore di J, allora λ^2 è un autovalore di J^2

J^2 ha $2n$ autovalori uguali a α^2 $\Rightarrow$ J ha autovalori uguali a $\pm\alpha$

Quindi $\rho(H)=\max|\lambda|=|\alpha|$.

Il metodo di Jacobi è convergente se e solo se $|\alpha|<1$, cioè $\alpha\in(-1,1)$.

Oss: per Jacobi, $\rho(H)=|\alpha|$. Per G-S, $\rho(H)=|\alpha|^2$

Avevamo visto che $\lim \dfrac{\|x^{(k+1)}-x\|}{\|x^{(k)}-x\|}\leq\rho(H)$ (quasi sempre $=$)

Se $|\alpha|<1$, $|\alpha|^2<|\alpha|$, quindi Gauss-Seidel è più veloce!

---

5. Un passo del metodo di G-S equivale a risolvere

$$Mx^{(new)} = b + Nx^{(old)}$$

$$\left[\begin{array}{cccc|cccc} 1 & & & & & & & \\ & 1 & & & & & 0 & \\ & & \ddots & & & & & \\ & & & 1 & & & & \\ \hline \alpha & & & & 1 & & & \\ & \alpha & & & & 1 & & \\ & & \ddots & & & & \ddots & \\ & & & \alpha & & & & 1 \end{array}\right] \begin{bmatrix} x_1^{new} \\ x_2^{new} \\ \vdots \\ \vdots \\ x_{2n}^{new} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ \vdots \\ b_{2n} \end{bmatrix} + \left[\begin{array}{c|c} 0 & \begin{matrix} -\alpha & & & \\ & -\alpha & & \\ & & \ddots & \\ & & & -\alpha \end{matrix} \\ \hline 0 & 0 \end{array}\right] \begin{bmatrix} x_1^{old} \\ x_2^{old} \\ \vdots \\ \vdots \\ x_{2n}^{old} \end{bmatrix}$$

cioè

$$\begin{cases} x_1^{new} = b_1 - x_{n+1}^{old} \cdot \alpha \\ x_2^{new} = b_2 - x_{n+2}^{old} \cdot \alpha \\ \vdots \\ x_n^{new} = b_n - x_{2n}^{old} \cdot \alpha \\ \hline \alpha x_1^{new} + x_{n+1}^{new} = b_{n+1} + 0 \\ \alpha x_2^{new} + x_{n+2}^{new} = b_{n+2} + 0 \\ \vdots \\ \alpha x_n^{new} + x_{2n}^{new} = b_{2n} + 0 \end{cases}$$

$$\boxed{x_i^{new} = b_i - x_{n+i}^{old} \alpha \quad i=1,\dots n}$$

$$\boxed{x_{n+i}^{new} = b_{n+i} - \alpha x_i^{new} \quad i=1,\dots n}$$