

Tutorato pre-purt: mercoledì 15 9-11  
 martedì 21 9-11

Quiz 22 Aprile

Matrici sparse: memorizzate con tre liste

$$\begin{array}{ccc} i & j & A_{ij} \\ \left. \begin{array}{ccc} 1 & 2 & 3.5 \\ 3 & 1 & -1 \\ \vdots & \vdots & \vdots \end{array} \right\} & & \text{elementi} \neq 0 \end{array}$$

Metodi iterativi per sistemi lineari

Generano una successione di vettori  $x^{(0)}, x^{(1)}, x^{(2)}, x^{(3)}, \dots \in \mathbb{R}^n$  che converge (sotto opportune condizioni) alla soluzione di un sistema lineare  $Ax=b$

Metodi basati su splitting della matrice  $A$ :

$$A = M - N \quad A, M, N \in \mathbb{R}^{n \times n}$$

Dato uno splitting, posso scrivere

$$Ax=b \Leftrightarrow (M-N)x=b \Leftrightarrow Mx=b+Nx \Leftrightarrow x=M^{-1}(b+Nx)$$

Ricorda i metodi di punto fisso  $x=\Phi(x)$

$$\begin{cases} x^{(0)} \text{ dato} \\ x^{(k+1)} = M^{-1}(b+Nx^{(k)}) \quad k=0,1,2,\dots \end{cases}$$

$x^{(k+1)}$  risolve il sistema lineare  $Mx^{(k+1)}=b+Nx^{(k)}$

Conviene usare questi metodi solo quando risolvere un

sist. lineare con matrice  $M$  è più economico che risolverlo con la matrice  $A$ .

Metodo di Jacobi:

$$M = \begin{bmatrix} A_{11} & & & & 0 \\ & A_{22} & & & \\ & & A_{33} & & \\ & & & \ddots & \\ 0 & & & & A_{nn} \end{bmatrix} \quad N = \begin{bmatrix} 0 & A_{12} & A_{13} & \dots & A_{1n} \\ A_{21} & 0 & A_{23} & \dots & A_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ A_{n1} & \dots & A_{n,n-1} & & 0 \end{bmatrix}$$

Il sist. lineare che definisce  $X^{(k+1)}$  è

$$\begin{bmatrix} A_{11} & & & & \\ & A_{22} & & & \\ & & A_{33} & & \\ & & & \ddots & \\ & & & & A_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1^{(k+1)} \\ x_2^{(k+1)} \\ x_3^{(k+1)} \\ \vdots \\ x_n^{(k+1)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & A_{12} & A_{13} & \dots & A_{1n} \\ A_{21} & 0 & A_{23} & \dots & A_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ A_{n1} & \dots & A_{n,n-1} & & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1^{(k)} \\ x_2^{(k)} \\ x_3^{(k)} \\ \vdots \\ x_n^{(k)} \end{bmatrix}$$

L'equazione  $i$ -esima è

$$A_{ii} x_i^{(k+1)} = b_i - \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n A_{ij} x_j^{(k)} \quad i=1, 2, \dots, n$$

for  $k=0, 1, 2, \dots$

```

|   for  $i=1, 2, \dots, n$ 
|   |    $x_i^{(k+1)} = \frac{b_i - \sum_{j=1, j \neq i}^n A_{ij} x_j^{(k)}}{A_{ii}}$ 
|   |   end
|   end
end
    
```

Su una matrice piena, ogni iterazione  $k \rightarrow k+1$  richiede  $n \cdot 2n$  operazioni

$\rightarrow 2n^2 + O(n)$  per passo

Su una matrice sparse,  $2 \cdot \text{nnz}(A)$  operazioni  $(\text{nnz}(A) = \text{numero di non-zeri})$

(e serve che  $A_{11}, A_{22}, \dots, A_{nn}$  siano  $\neq 0$ ).

Metodo di Gauss-Seidel

$$M = \begin{bmatrix} A_{11} & 0 & 0 & \dots & 0 \\ A_{21} & A_{22} & 0 & & \\ A_{31} & A_{32} & \dots & \dots & \\ \vdots & & & & \\ A_{n1} & & & & A_{nn} \end{bmatrix}$$

$$N = M - A = \begin{bmatrix} 0 & A_{12} & A_{13} & \dots & A_{1n} \\ 0 & 0 & A_{23} & \dots & A_{2n} \\ \vdots & & 0 & \dots & \vdots \\ 0 & \dots & \dots & \dots & 0 \end{bmatrix}$$

$$Mx^{(k+1)} = b + Nx^{(k)}$$

$$\begin{bmatrix} A_{11} & & & & \\ A_{21} & A_{22} & & & \\ A_{31} & A_{32} & A_{33} & & \\ \vdots & & & \ddots & \\ A_{n1} & & & & A_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1^{(k+1)} \\ x_2^{(k+1)} \\ x_3^{(k+1)} \\ \vdots \\ x_n^{(k+1)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & A_{12} & A_{13} & \dots & A_{1n} \\ 0 & 0 & A_{23} & \dots & A_{2n} \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \vdots \\ \vdots & & & \ddots & A_{n-1,n} \\ 0 & \dots & \dots & \dots & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1^{(k)} \\ x_2^{(k)} \\ x_3^{(k)} \\ \vdots \\ x_n^{(k)} \end{bmatrix}$$

$$A_{11}x_1^{(k+1)} = b_1 - A_{12}x_2^{(k)} - A_{13}x_3^{(k)} - \dots - A_{1n}x_n^{(k)}$$

$$A_{21}x_1^{(k+1)} + A_{22}x_2^{(k+1)} = b_2 - A_{23}x_3^{(k)} - \dots - A_{2n}x_n^{(k)}$$

$$A_{31}x_1^{(k+1)} + A_{32}x_2^{(k+1)} + A_{33}x_3^{(k+1)} = \dots$$

...

Posso risolverla per sostituzioni in avanti:

for  $k=0,1,2,\dots$

for  $i=1,2,\dots,n$

$$x_i^{(k+1)} = \frac{b_i - \sum_{j=1}^{i-1} A_{ij}x_j^{(k+1)} - \sum_{j=i+1}^n A_{ij}x_j^{(k)}}{A_{ii}} \quad (GS)$$

end

end

È molto simile al metodo di Jacobi, che posso scrivere volendo anche come

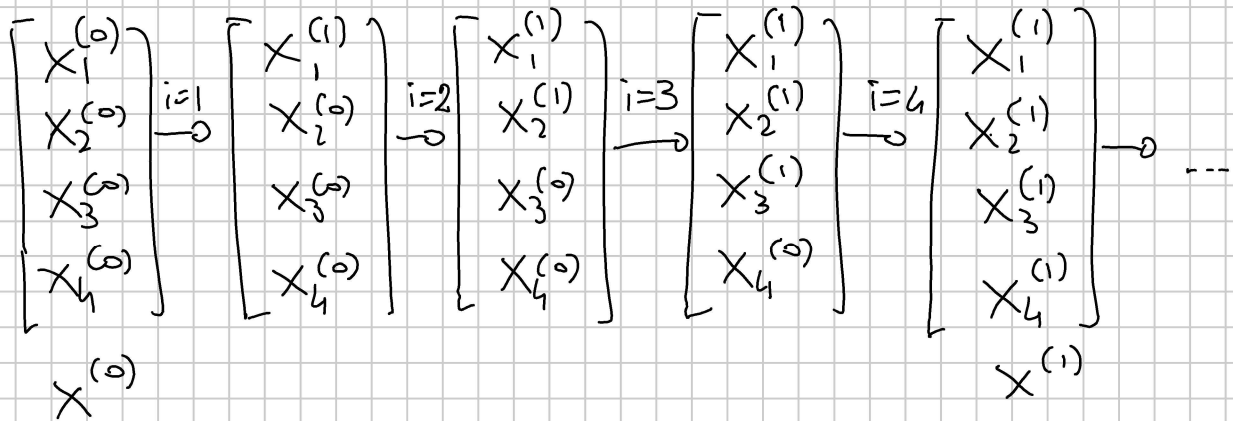
$$x_i^{(k+1)} = \frac{b_i - \sum_{j=1}^{i-1} A_{ij}x_j^{(k)} - \sum_{j=i+1}^n A_{ij}x_j^{(k)}}{A_{ii}} \quad (J)$$

ES:  $n=4$

Jacobi:  $x_1^{(k+1)}$  usato  $x_2^{(k)}, x_3^{(k)}, x_4^{(k)}$   
 $x_2^{(k+1)}$  usato  $x_1^{(k)}, x_3^{(k)}, x_4^{(k)}$   
 $x_3^{(k+1)}$   $x_1^{(k)}, x_2^{(k)}, x_4^{(k)}$   
 $x_4^{(k+1)}$   $x_1^{(k)}, x_2^{(k)}, x_3^{(k)}$

Gauss-Seidel:  $X_1^{(k+1)}$  usato  $X_2^{(k)}, X_3^{(k)}, X_4^{(k)}$   
 $X_2^{(k+1)}$  usato  $X_1^{(k+1)}, X_3^{(k)}, X_4^{(k)}$   
 $X_3^{(k+1)}$  usato  $X_1^{(k+1)}, X_2^{(k+1)}, X_4^{(k)}$   
 $X_4^{(k+1)}$  usato  $X_1^{(k+1)}, X_2^{(k+1)}, X_3^{(k+1)}$

Oss: posso implementare Gauss-Seidel con un vettore solo:



Caso (sia per J. che G.S.):  $2N^2$  / posso su una matrice piena,  $2N^2(A)$  su una A sparse

Convergenza dei metodi iterativi  $\begin{cases} X^{(0)} \in \mathbb{R}^n \\ X^{(k+1)} = M^{-1}(b + NX^{(k)}) \end{cases} \quad (1)$

Diciamo che il metodo è convergente se  $\lim_{k \rightarrow \infty} X^{(k)} = x$ ,  $\Phi(x^{(k)})$   
 la soluzione esatta del sistema, indipendentemente dalla scelta di  $X^{(0)}$ .

Teo: il metodo iterativo (1) è convergente (per ogni scelta di  $X^{(0)}$ ) **se e solo se**  $\rho(H) < 1$ , dove  $H = M^{-1}N$  (matrice di iterazione del metodo).

Dim: Definiamo  $e^{(k)} = X^{(k)} - x$ , dove  $X^{(k)}$  è l'iterata

$k$ -esima, e  $x$  è la soluzione esatta di  $Ax=b$ .

$$e^{(k)} \in \mathbb{R}^n$$

$$e^{(k+1)} = x^{(k+1)} - x = M^{-1}(b + Nx^{(k)}) - M^{-1}(b + Nx)$$

$$= M^{-1}(\cancel{b} + Nx^{(k)} - \cancel{b} - Nx)$$

$$= M^{-1}N(x^{(k)} - x) = H(x^{(k)} - x) = He^{(k)}$$

$$e^{(1)} = He^{(0)}$$

$$e^{(2)} = He^{(1)} = H^2 e^{(0)}$$

$$e^{(3)} = He^{(2)} = H^3 e^{(0)}$$

⋮

$$e^{(k)} = H^k e^{(0)}$$

Continuano le dimostrazioni solo nel caso in cui  $H$

è diagonalizzabile, cioè,  $H = VDV^{-1}$

dove  $D = \begin{bmatrix} \lambda_1 & & & \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_n \end{bmatrix}$  matrice diagonale di autovalori,

$V$  matrice di autovettori di  $H$ .

$$H^k = \underbrace{H \cdot H \cdot \dots \cdot H}_{k \text{ volte}} = \underbrace{VDV^{-1} \cdot VDV^{-1} \cdot \dots \cdot VDV^{-1}}_{k \text{ volte}} = VD^k V^{-1}$$

$$= V \begin{bmatrix} \lambda_1^k & & & \\ & \lambda_2^k & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & \lambda_n^k \end{bmatrix} V^{-1}$$

Se supponiamo  $\rho(H) < 1$ , cioè  $\max(|\lambda_1|, |\lambda_2|, \dots, |\lambda_n|) < 1$   
allora  $|\lambda_i| < 1$  per ogni  $i$ , e quindi

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \lambda_i^k = 0$$

In particolare allora  $\lim_{k \rightarrow \infty} H^k = V \begin{bmatrix} \lim \lambda^k & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lim \lambda^k \end{bmatrix} V^{-1} = 0$

e anche  $\lim_{k \rightarrow \infty} e^{(k)} = \lim_{k \rightarrow \infty} H^k e^{(0)} = 0$ .

Quindi se  $\rho(H) < 1$ , lo che  $\lim_{k \rightarrow \infty} X^{(k)} = X$ , indipendentemente del valore di  $X^{(0)}$ .

Questo dimostra una freccia del teorema:  $\rho(H) < 1 \Rightarrow$  il metodo converge  $\forall X^{(0)}$

Vogliamo dimostrare anche l'altra implicazione:

se  $\rho(H) \geq 1 \Rightarrow \exists X^{(0)}$  per cui il metodo non converge.

Perciò  $\rho(H) \geq 1$ , esiste un autovalore di  $H$  con  $|\lambda| \geq 1$ , cioè  $Hv = v\lambda$ ,  $|\lambda| \geq 1$

Scelgo  $X^{(0)} = X + v$   $e^{(0)} = X^{(0)} - X = v$

Allora,  $e^{(1)} = He^{(0)} = Hv = v\lambda$

$e^{(2)} = He^{(1)} = H v \lambda = v \lambda^2$

$\vdots$

$e^{(k)} = v \cdot \lambda^k$

$\lim_{k \rightarrow \infty} e^{(k)} = \lim_{k \rightarrow \infty} v \cdot \lambda^k = v \cdot \lim_{k \rightarrow \infty} \lambda^k$

$v \neq 0$   
perché è un autovettore.

non è 0, perché  $|\lambda| \geq 1$ ,  
quindi o diverge o non converge  $\square$

Conclusione: se  $\|H\|_p < 1$  per una qualunque norma matriciale indotta, allora il metodo <sup>(1)</sup> è convergente (per ogni  $X^{(0)} \in \mathbb{R}^n$ ).

Segue dal fatto visto in una lezione precedente, che  
 $\rho(H) \leq \|H\|_p$  per ogni norma indotta.

ES: Se  $\|H\|_p < 1 \Rightarrow \rho(H) < 1$

Se  $\|H\|_p \geq 1 \Rightarrow$  non posso concludere nulla se  
 $\rho(H)$  è negativa o minore di 1

$$\rho(H) = 0.8, \quad \left. \begin{array}{l} \|H\|_1 = 1.2 \\ \|H\|_\infty = 0.9 \end{array} \right\}$$

È possibile mostrare che

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{\|e^{(k+1)}\|_p}{\|e^{(k)}\|_p} \leq \rho(H) \quad \left( \text{e vale l'uguaglianza} \right. \\ \left. \text{per quasi tutte le scelte} \right. \\ \left. \text{di } x^{(0)} \right)$$

Quindi il raggio spettrale  $\rho(H)$  è il tasso di convergenza!

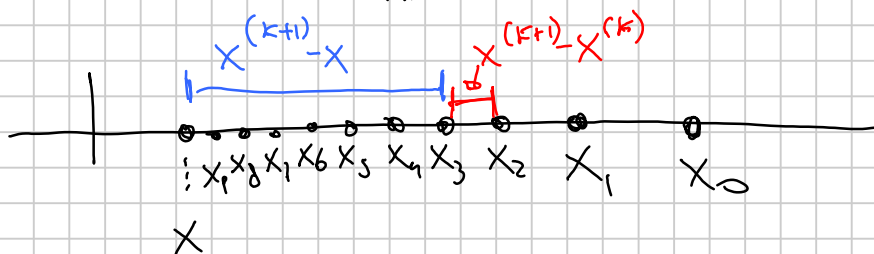
Condizione di arresto:

due scelte naturali:

$$1. \|x^{(k+1)} - x^{(k)}\| < \varepsilon$$

$$2. \|Ax^{(k)} - b\| < \varepsilon$$

Come visto nel caso scelte,  $\|x^{(k+1)} - x^{(k)}\| < \varepsilon$  non  
 garantisce che  $\|x^{(k+1)} - x\| < \varepsilon$



Il secondo criterio coinvolge il residuo  $r = A\tilde{x} - b \in \mathbb{R}^n$

Teo: (relazione tra errore e residuo)

Siano  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ,  $b \in \mathbb{R}^n$ ,  $x$  la soluzione di  $Ax = b$ ,  
e  $\tilde{x} \in \mathbb{R}^n$  un qualunque altro vettore.

Poniamo  $r = A\tilde{x} - b$ . Allora

$$\frac{\|\tilde{x} - x\|}{\|x\|} \leq \kappa(A) \frac{\|r\|}{\|b\|}$$

per ogni norma vettoriale  $\|\cdot\|$  (con  $\kappa(A)$  misurato usando la norma matriciale indotta).

Dim: questo è un caso particolare del teorema che abbiamo visto in una lezione precedente.

$$r = A\tilde{x} - b \Leftrightarrow A\tilde{x} = b + r$$

cioè,  $\tilde{x}$  è la soluzione del sistema lineare  $A\tilde{x} = \tilde{b}$ , in cui ho rimpiazzato il termine noto  $b$  con  $\tilde{b} = b + r$ .

Il teorema ci dice che dati due sist. lineari  $Ax = b$ ,  $A\tilde{x} = \tilde{b}$   
l'errore su  $x$  è legato all'errore su  $b$  tramite

$$\frac{\|\tilde{x} - x\|}{\|x\|} \leq \kappa(A) \cdot \frac{\|\tilde{b} - b\|}{\|b\|} = \kappa(A) \cdot \frac{\|r\|}{\|b\|}. \quad \square$$

Quindi se lo  $\tilde{x}$  (comunque calcolato) tale che

$A\tilde{x}$  e  $b$  sono vicini, allora anche  $\tilde{x}$  è vicino alla soluzione  $x$  del sist. lineare  $Ax = b$ , ma il rapporto tra questi due errori dipende da  $\kappa(A)$ .

Se arresto un metodo iterativo per sistemi lineari quando  $\|Ax^{(k)} - b\| \leq \epsilon$ , allora lo garantisco che

$$\frac{\|x^{(k)} - x\|}{\|x\|} \leq K(A) \cdot \frac{\varepsilon}{\|b\|}.$$