Soluzione di sist. lineari con fatt. LU con pivoting:

1. Calcolare P, L, U t.c. $PA = LU$ ← triang. superiore

P: matrice di permutazione

L: triang. inf. con 1 su diagonale

$$Ax=b \Rightarrow PAx = Pb \rightarrow LUx = Pb \rightarrow \begin{cases} Ly = Pb \\ Ux = y \end{cases}$$

2. Risolvo $Ly = Pb$
3. Risolvo $Ux = y$

<u>Stabilità</u>:

$$\varepsilon_{an} = 0$$

$$\varepsilon_{in} \doteq k(A)u \sim \|A\| \cdot \|A^{-1}\| \cdot u$$

$$\varepsilon_{alg} \sim \|L\| \cdot \|U\| \cdot \|A^{-1}\| u$$

ε_{alg} è molto più grande di ε_{in} se $\|L\| \cdot \|U\| >> \|A\|$

es: $A = \begin{bmatrix} \varepsilon & * & * \\ 1 & * & * \\ 1 & * & * \end{bmatrix}$ $\quad L = \begin{bmatrix} 1 & & \\ \varepsilon^{-1} & 1 & \\ \varepsilon^{-1} & * & 1 \end{bmatrix}$ molto grande

se non ci fosse pivoting; il pivoting evita questi problemi.

Nel caso medio, $\|L\| \cdot \|U\| \approx \|A\|$

ci sono casi sfortunati in cui anche con il pivoting

$\|L\| \cdot \|U\| \approx \|A\| \cdot 2^n$ → algoritmo instabile.

ES: Sia $A = \alpha I + uu^T \in \mathbb{R}^{n \times n}$ $\quad u = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^n$

$\boxed{\alpha \in \mathbb{R}}$

$$= \begin{bmatrix} \alpha & & \\ & \ddots & \\ & & \alpha \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & \cdots & 1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \alpha & & & \\ & \alpha & & \\ & & \ddots & \\ & & & \alpha \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 1 & 1 & & \\ \vdots & & & & \\ 1 & & & \cdots & 1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \alpha+1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & \alpha+1 & 1 & \ddots & \vdots \\ 1 & 1 & \alpha+1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & 1 \\ 1 & \cdots & & 1 & \alpha+1 \end{bmatrix}$$

$$A_{ij} = \begin{cases} \alpha+1 & \text{se } i=j \\ 1 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

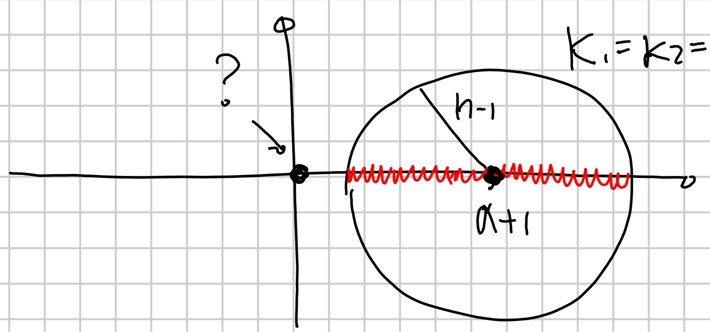
1. Determinare una condizione sufficiente (su α) per cui A è invertibile.
2. Determinare i valori di α per cui A è invertibile
3. Mostrare che A^{-1} è della forma
   $$A^{-1} = \frac{1}{\alpha} I - \gamma u u^T \quad , \text{ determinando } \gamma$$
4. Determinare $K(A) = \|A\|_\infty \cdot \|A^{-1}\|_\infty$

1. Possiamo farlo con il teorema di Gershgorin

$$A = \begin{bmatrix} \alpha+1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \\ 1 & \cdots & 1 & \alpha+1 \end{bmatrix}$$

K_i hanno tutti centro $\alpha+1$ e raggio $n-1$

$K_1 = K_2 = \dots = K_n$

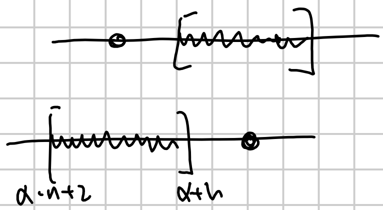


A è simmetrica $\to$ autovalori reali $\to$ stanno nell'intersezione tra il cerchio e la retta reale, cioè il segmento di estremi

$$[\alpha+1-(n-1),\ \alpha+1+(n-1)] = [\alpha-n+2,\ \alpha+n]$$

Vogliamo trovare una condizione su α che mi assicura che l'origine $0 \notin [\alpha-n+2, \alpha+n]$.

Due casi:



$0 < \alpha - n + 2 \;\to\; \boxed{\alpha > n-2}$

$\alpha + n < 0 \;\to\; \boxed{\alpha < -n}$

Per controllo, proviamo a vedere cosa succede nei due casi estremi

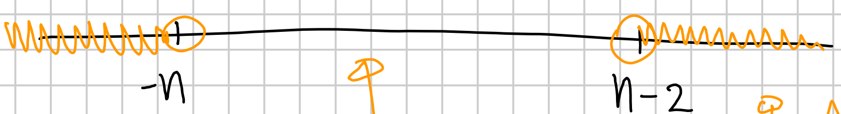
$$\alpha = n-2 \;\to\; A = \begin{bmatrix} n-1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & n-1 & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 1 \\ 1 & \cdots & & 1 & n-1 \end{bmatrix}$$

gli el. diagonali sono uguali alla somma degli altri sulla stessa riga → se α è più grande di $n-1$, pred. diagonale.

$$\alpha = -n \;\to\; A = \begin{bmatrix} -n+1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & -n+1 & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 1 \\ 1 & \cdots & & 1 & -n+1 \end{bmatrix}$$

$|-n+1| = n-1 = |1|+|1|+\dots+|1|$

se α diventa ancora minore (più negativo), A diventa pred. diagonale.



chissà!

← A invertibile se α sta in queste regioni

2. Trovare esattamente gli α per cui questa matrice è invertibile.

Tanti modi per farlo:
- $\det(A) \neq 0$
- autovalori $\neq 0$
- rango $= n$
- $\operatorname{Ker} A = \{0\}$
- n pivot nell'elim. Gauss.

$10 \cdot I_{400\times 400}$
$\det(A) = +\infty$

Vediamo se riusciamo a calcolare gli autovalori.

$A = \alpha I + uu^T$

Oss: se $A = \alpha I + B$, allora gli autovalori di A si ottengono sommando α agli autovalori di B:

$$Bv = v\lambda \rightarrow (\alpha I + B)v = v\alpha + v\lambda = v(\alpha+\lambda)$$

$$Av = v(\alpha+\lambda) \rightarrow (\alpha I + B)v = v\alpha + v\lambda \rightarrow \cancel{v\alpha} + Bv = \cancel{v\alpha} + v\lambda$$

Quindi mi basta determinare gli autovalori di

$$B = uu^T = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ \vdots & & \ddots & & \vdots \\ 1 & & \cdots & & 1 \end{bmatrix} = \text{matrice di tutti uni}$$

$$\operatorname{Im} B = \operatorname{span}(u, u, u, \dots u) = \operatorname{span}(u) \qquad rk\, B = 1$$

$$\dim \ker B = n-1$$

$\Rightarrow$ $n-1$ autovalori sono uguali a $\emptyset$

0 è un autovalore con molt. geometrica $n-1$

$$\dim \ker(B - 0 \cdot I) = n-1$$

$$1+1+\dots+1 = n = \operatorname{Tr} B = \lambda_1 + \underbrace{\lambda_2 + \lambda_3 + \dots + \lambda_n}_{\overset{\shortparallel}{0} \quad \overset{\shortparallel}{0} \quad \overset{\shortparallel}{0}}$$

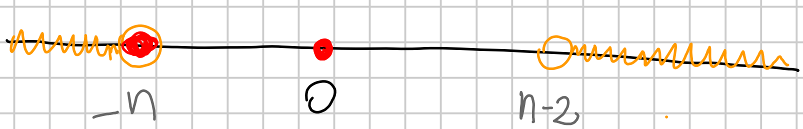
Quindi deve essere $\lambda_1 = n$.

Autovalori di $B = \{n, \underbrace{0, 0, \dots 0}_{\text{molt. } n-1}\}$

Autovalori di $A = \{\alpha+n, \underbrace{\alpha, \alpha, \dots \alpha}_{\text{molt. } n-1}\}$

A è non invertibile se $\alpha = 0$ oppure $\alpha = -n$

Valori possibili di $\alpha \in \mathbb{R}$:



Nelle regioni arancioni, A è pred. diagonale $\rightarrow$ invertibile

Nei due punti in rosso, A non è invertibile, per tutti gli altri valori reali $\alpha \neq \{0, -n\}$ la matrice è invertibile.

Metodo alternativo: determiniamo $\operatorname{Ker} A$, cioè, troviamo tutti i vettori x t.c. $Ax = 0$

$$0 = Ax = (\alpha I + uu^T)x = \underbrace{\alpha x}_{\text{multiplo di } x} + u(u^T x) = x\alpha + u\beta \qquad \beta = u^T x$$

$$[\,]([\,])$$

scalari

$0 = x\alpha + u\beta$ possibile solo se
- $\alpha = \beta = 0$
- x, u sono uno un multiplo dell'altro

- $\alpha = \beta = 0$ significa $\alpha = 0$, $0 = \beta = u^T x = x_1 + x_2 + \dots + x_n$

  se $\alpha = 0$, la matrice A non è invertibile e

  $\operatorname{Ker} A = \{x : x_1 + x_2 + \dots + x_n = 0\}$.

- x deve essere un multiplo di u, cioè $Au = 0$

$$0 = Au = (\alpha I + uu^T)u = u\alpha + u\cdot(u^T u) = u\cdot(\alpha + u^T u)$$

Possibile solo se $\alpha + u^T u = 0$, cioè $\alpha = -[1\ 1 \cdots 1]\begin{bmatrix}1\\1\\\vdots\\1\end{bmatrix} = -n$.

---

3. Per verificare che $\frac{1}{\alpha}I - \gamma uu^T$ è l'inversa di A (per un opportuno valore di γ) mi basta fare il prodotto:

$$(\alpha I + uu^T)\left(\frac{1}{\alpha}I - \gamma uu^T\right) = \underbrace{\alpha\cdot\frac{1}{\alpha}}_{=1} I - \alpha\gamma uu^T + \frac{1}{\alpha}uu^T - \gamma u\underbrace{u^T u}_{=n}u^T$$

$$= I + \underbrace{\left(-\alpha\gamma + \frac{1}{\alpha} - n\gamma\right)}uu^T$$

per un valore opportuno di γ, questa parentesi si annulla e il prodotto fa I, il che verifica che le due matrici sono l'una l'inversa dell'altra.

Il valore opportuno di γ:

$$-\alpha\gamma + \frac{1}{\alpha} - n\gamma = 0 \iff \frac{1}{\alpha} = \gamma(\alpha+n) \iff \gamma = \frac{1}{\alpha(\alpha+n)}.$$

$$\to A^{-1} = \frac{1}{\alpha} I - \frac{1}{\alpha(\alpha+n)} uu^T = \begin{bmatrix} 1/\alpha & & 0 \\ & 1/\alpha \ddots & \\ 0 & & 1/\alpha \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -\frac{1}{\alpha(\alpha+n)} & \cdots & -\frac{1}{\alpha(\alpha+n)} \\ \vdots & & \\ -\frac{1}{\alpha(\alpha+n)} & \cdots & -\frac{1}{\alpha(\alpha+n)} \end{bmatrix}.$$

---

4. Determinare $\|A\|_\infty \cdot \|A^{-1}\|_\infty$

Ricordiamo che

$$\|A\|_\infty = \max_{i=1,\dots,n} \sum_{j=1}^{n} |A_{ij}|$$

$$A = \begin{bmatrix} \alpha+1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & 1 \\ 1 & \cdots & 1 & \alpha+1 \end{bmatrix} \qquad \|A\|_\infty = \underbrace{|\alpha+1| + (n-1)}_{\text{stesso risultato su ogni riga}}$$

$$(A^{-1})_{ij} = \begin{cases} \frac{1}{\alpha} - \frac{1}{\alpha(\alpha+n)} & i=j \\ -\frac{1}{\alpha(\alpha+n)} & i\neq j \end{cases}$$

$$\|A^{-1}\|_\infty = \left| \frac{1}{\alpha}\frac{(\alpha+n)}{(\alpha+n)} - \frac{1}{\alpha(\alpha+n)} \right| + (n-1)\left| \frac{1}{\alpha(\alpha+n)} \right|$$

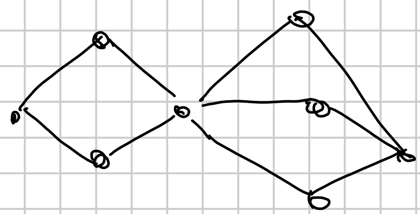
$$= \left| \frac{1}{\alpha(\alpha+n)} \right| \cdot \left(|\alpha+n-1| + (n-1) \right)$$

$$k(A) = \|A\|_\infty \cdot \|A^{-1}\|_\infty = \left(|\alpha+1| + (n-1)\right) \cdot \left| \frac{1}{\alpha(\alpha+n)} \right| \cdot \left(|\alpha+n-1| + (n-1) \right).$$

$k(A) \to \infty$ quando $\alpha \to 0$ o $\alpha \to -n$.

$$\begin{bmatrix} 1 & -\alpha & & \\ -\alpha & \ddots & \ddots & \\ & \ddots & \ddots & -\alpha \\ & & -\alpha & 1 \end{bmatrix} \qquad A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & & 0 \\ -1 & \ddots & \ddots & \\ & \ddots & \ddots & -1 \\ 0 & & -1 & 2 \end{bmatrix}$$

ES



matrice di adiacenza di un grafo: un vertice è collegato ai suoi vicini.

Molte matrici nelle applicazioni / vita reale sono *sparse*, cioè hanno molti elementi uguali zero.
Ad esempio, una *matrice tridiagonale*

$$A = \begin{bmatrix} \times & \times & & & & \\ \times & \times & \times & & & \\ & \times & \times & \times & & \\ & & \times & \times & \times & \\ & & & \ddots & \ddots & \times \\ & & & & \ddots & \times \end{bmatrix}$$

ha al massimo 3 elementi diversi da $\emptyset$ su ogni riga.

Possiamo memorizzare matrici in *formato sparso*:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{matrix} (1,1) & 1 \\ (2,2) & 2 \\ (3,3) & 3 \\ (4,4) & 4 \end{matrix}$$

$\Downarrow$

n^2 posiz. di memoria vs. $3m$ posiz. di memoria, m = numero di nonzeri.

Purtroppo, l'eliminazione di Gauss non sempre preserva gli elementi nulli. *Esempio*:

$$A = \begin{bmatrix} \times & \times & \times & \times & \times \\ \times & \times & 0 & 0 & 0 \\ \times & 0 & \times & 0 & 0 \\ \boxed{\times} & 0 & 0 & \times & 0 \\ \times & 0 & 0 & 0 & \times \end{bmatrix} \qquad U_2 = \begin{bmatrix} \times & \times & \times & \times & \times \\ 0 & \times & \times & \times & \times \\ 0 & \times & \times & \times & \times \\ 0 & \times & \times & \times & \times \\ 0 & \times & \times & \times & \times \end{bmatrix}$$

U_1

$\sim 3n$ non-zeri $\qquad \sim n^2$ non-zeri

Non preserva la sparsità della matrice!

Esistono algoritmi per risolvere sistemi lineari senza usare $O(n^2)$ memoria?

<u>ES</u>: riuscite a scrivere un algoritmo che prende in input

- $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ inserita in formato sparso, quindi con 3 array di elementi non-nulli

$$\begin{matrix} (i_1, j_1) & A(i_1, j_1) \\ \vdots & \\ (i_m, j_m) & A(i_m, j_m) \end{matrix}$$

- vettore $v = \begin{bmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{bmatrix}$,

e restituisce $w = Av$. (in $O(m+n)$ tempo e spazio).