Esercizio: Dato $\alpha \in \mathbb{C}$, consideriamo

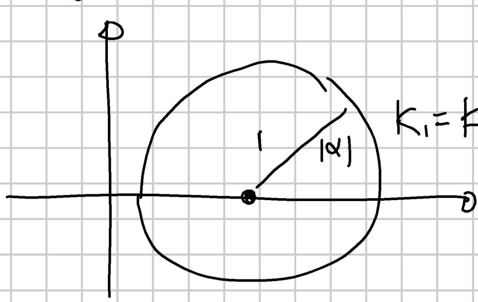
$$A_\alpha = \begin{bmatrix} 1 & & & & -\alpha \\ -\alpha & 1 & & & \\ & -\alpha & 1 & & \\ & & -\alpha & \ddots & \\ & & & -\alpha & 1 \end{bmatrix} \in \mathbb{C}^{n\times n}$$

$$(A_\alpha)_{ij} = \begin{cases} 1 & i=j \\ -\alpha & i=j+1 \text{ oppure } (i,j)=(1,n) \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

1. Disegniamo i cerchi di Gershgorin
2. Per quali $\alpha \in \mathbb{C}^n$ possiamo usare il teorema di Gershgorin per concludere che la matrice è invertibile.
3. Per quali α è soddisfatta la condizione di esistenza della fatt. LU
4. Trovare la fatt. LU di A_α
5. Per quali $\alpha \in \mathbb{C}$ la matrice è invertibile?

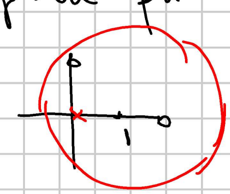
---

1. $K_i = \left\{ z \in \mathbb{C} : |z - A_{ii}| \leq \sum_{\substack{j \neq i \\ j=1,\dots,n}} |A_{ij}| \right\}.$



$$\begin{bmatrix} 1 & & & -\alpha \\ -\alpha & \ddots & & \\ & \ddots & \ddots & \\ & & -\alpha & 1 \end{bmatrix}$$

2. Se $|\alpha|<1$, l'unione dei cerchi di Gershgorin non contiene 0 e quindi la matrice è invertibile (e anzi è dominante diagonale per righe). Se $|\alpha| \geq 1$, 0 sta nell'unione e il teorema non permette di concludere se A_α è invertibile o no.



3. <u>Teo</u>: se le sottomatrici principali di testa $A_{1:k,1:k}$ sono tutte invertibili per $k=1,2,\dots n-1$, allora esiste la fatt. LU di A_α

$$\begin{bmatrix} \boxed{1} & 0 & 0 & & & -\alpha \\ -\alpha & 1 & 0 & & & \\ 0 & -\alpha & 1 & & & \\ & & -\alpha & 1 & & \\ & & & \ddots & \ddots & \\ & & & & -\alpha & 1 \\ & & & & & -\alpha \quad 1 \end{bmatrix}$$

$A_{1:1,1:1} = [1]$

$A_{1:2,1:2} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -\alpha & 1 \end{bmatrix}$

$A_{1:3,1:3} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -\alpha & 1 & 0 \\ 0 & -\alpha & 1 \end{bmatrix}$

$\vdots$

Sono tutte triangolari inferiori!

$\det A_{1:k,1:k} = 1\cdot 1\cdot 1\cdot \dots \cdot 1 = 1 \neq 0$ quindi sono invertibili. (per ogni α).

La fatt. LU esiste per ogni $\alpha \in \mathbb{C}$.

---

4. Determinare la fatt. LU:

$$U_1 = A = \begin{bmatrix} 1 & & & & & -\alpha \\ -\alpha & 1 & & & & \\ 0 & -\alpha & 1 & & & \\ 0 & & \ddots & \ddots & & \\ \vdots & & & & & \\ 0 & & & & -\alpha & 1 \end{bmatrix} \quad \mathrm{II} - (-\alpha)\cdot \mathrm{I}$$

$$U_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & -\alpha \\ 0 & 1 & 0 & 0 \cdots & 0 & -\alpha^2 \\ 0 & -\alpha & 1 & & & \\ & & -\alpha & 1 & & \\ & & & \ddots & \ddots & \\ & & & & -\alpha & 1 \end{bmatrix} \quad \mathrm{III} - (-\alpha)\mathrm{II}$$

$$U_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & -\alpha \\ 0 & 1 & 0 & 0 \cdots & 0 & -\alpha^2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \cdots & 0 & -\alpha^3 \\ 0 & & \cancel{-\alpha} & 1 & & \boxed{0} \\ \vdots & & & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & & & & & \vdots \\ 0 & \cdots & & 0 & -\alpha & 1 \end{bmatrix}$$

$\vdots$

$$U_{n-1} = \begin{bmatrix} 1 & & & & -\alpha \\ 0 & 1 & & & -\alpha^2 \\ & 0 & \ddots & & \vdots \\ & & \ddots & \ddots & \\ & & 0 & 1 & -\alpha^{n-1} \\ & & & -\alpha & 1 \end{bmatrix} \quad -\alpha$$

$$U_n = \begin{bmatrix} 1 & & & & -\alpha \\ 0 & 1 & & & -\alpha^2 \\ & 0 & 1 & & \vdots \\ & & 0 & \ddots & \\ & & & 1 & -\alpha^{n-1} \\ & & & 0 & 1-\alpha^n \end{bmatrix} = U$$

La matrice dei moltiplicatori è

$$L = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & & 0 \\ -\alpha & 1 & 0 & \cdots & & 0 \\ 0 & -\alpha & 1 & & & \\ 0 & 0 & \ddots & \ddots & & \\ \vdots & \vdots & & \ddots & \ddots & \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & -\alpha & 1 \end{bmatrix} \qquad L \cdot U = A$$

Metodo alternativo per questo punto 4:

Avevamo detto che $A_{1:k,1:k} = L_{1:k,1:k} \cdot U_{1:k,1:k}$

$$A_{1:n-1,1:n-1} = \begin{bmatrix} 1 & & & & \\ -\alpha & 1 & & 0 & \\ & -\alpha & \ddots & & \\ & & \ddots & \ddots & \\ & 0 & & -\alpha & 1 \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & & & \\ -\alpha & 1 & & \\ & -\alpha & \ddots & \\ & & \ddots & \ddots \\ & & & -\alpha & 1 \end{bmatrix}}_{L_{1:n-1,1:n-1}} \cdot \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & & & \\ & 1 & & \\ & & \ddots & \\ & & & 1 \end{bmatrix}}_{U_{1:n-1,1:n-1} = I}$$

La fatt. LU di $A_{1:n-1,1:n-1}$ è facile da intuire: è lei $\cdot I$

Quindi la fatt. LU di A è della forma

$$A = \left[\begin{array}{c|c} L_{1:n-1,1:n-1} & 0 \\ \hline v^T & 1 \end{array}\right] \cdot \left[\begin{array}{c|c} U_{1:n-1,1:n-1} & w \\ \hline 0 & z \end{array}\right]$$

con v^T, w, z da determinare.

$$\left[\begin{array}{c|c} L_{1:n-1,1:n-1} & 0 \\ \hline v^T & 1 \end{array}\right] \cdot \left[\begin{array}{c|c} U_{1:n-1,1:n-1} & w \\ \hline 0 & z \end{array}\right] = \begin{array}{cc} \left[\begin{array}{c|c} A_{1:n-1,1:n-1} & L_{1:n-1,1:n-1} w \\ \hline v^T U_{1:n-1,1:n-1} & v^T w + z \end{array}\right] & \begin{array}{c} n-1 \\ 1 \end{array} \\ \begin{array}{cc} n-1 & \quad 1 \end{array} & \end{array}$$

$$= A_\alpha = \begin{array}{cc} \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & & & & -\alpha \\ -\alpha & \ddots & & & 0 \\ & \ddots & \ddots & & \vdots \\ & & -\alpha & 1 & 0 \\ \hline 0 & 0 \cdots & 0 & -\alpha & 1 \end{array}\right] & \begin{array}{c} n-1 \\ 1 \end{array} \\ \begin{array}{cc} n-1 & \quad 1 \end{array} & \end{array}$$

$$\underbrace{v^T U_{1:n-1,1:n-1}}_{=I} = [0\ 0\ 0\ \cdots\ -\alpha]$$

$$\Rightarrow \quad v^T = [0\ 0\ 0\ \cdots\ 0\ -\alpha]$$

$$L_{1:n-1,1:n-1}\, w = \begin{bmatrix} -\alpha \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & & & \\ -\alpha & 1 & & \\ & -\alpha & \ddots & \\ & & -\alpha & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} w_1 \\ w_2 \\ \vdots \\ w_{n-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\alpha \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}$$

È un sistema con matrice triangolare inferiore!
Per sostituzione in avanti ho

$$w_1 = -\alpha$$
$$-\alpha w_1 + w_2 = 0 \Rightarrow w_2 = \alpha w_1 = -\alpha^2$$
$$-\alpha w_2 + w_3 = 0 \Rightarrow w_3 = \alpha w_2 = -\alpha^3$$
$$\vdots \qquad\qquad \vdots$$

$$w = \begin{bmatrix} -\alpha \\ -\alpha^2 \\ \vdots \\ -\alpha^{n-1} \end{bmatrix}$$

Infine, pongo uguali gli elementi di posto (n,n):

$$1 = v^T w + z = [0\ 0\ \cdots\ -\alpha] \cdot \begin{bmatrix} -\alpha \\ -\alpha^2 \\ \vdots \\ -\alpha^{n-1} \end{bmatrix} + z = \alpha^n + z$$

da cui ricavo

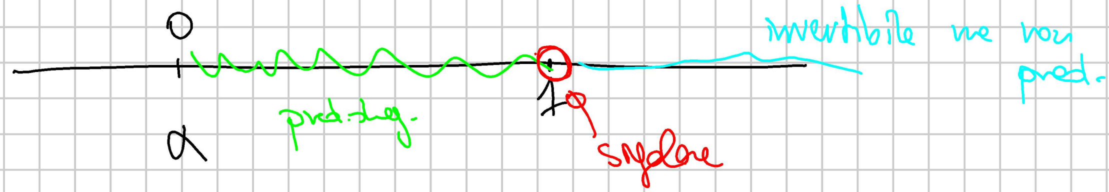
$z = 1 - \alpha^n$. Quindi anche con questo metodo ottengo

$$A = LU \qquad L = \begin{bmatrix} 1 & & & \\ -\alpha & 1 & & \\ & -\alpha & \ddots & \\ & & \ddots & \\ & & -\alpha & 1 \end{bmatrix} \qquad U = \begin{bmatrix} 1 & & & -\alpha \\ 0 & \ddots & & -\alpha^2 \\ & \ddots & \ddots & \vdots \\ & & 1 & -\alpha^{n-1} \\ & & 0 & 1-\alpha^n \end{bmatrix}$$

5. Per quali α la matrice A_α è invertibile?

$$\det A = \det L \cdot \det U = (1 \cdot 1 \cdot 1 \cdots 1) \cdot (1 \cdot 1 \cdot 1 \cdot \ldots \cdot 1 \cdot (1-\alpha^n)) = 1 - \alpha^n$$

La matrice è singolare se e solo se $\boxed{1-\alpha^n = 0}$.
Che vale se $\alpha = 1$, e in generale le n soluzioni complesse (radici dell'unità).



Def: A è predom. diagonale (per righe) se

$$|A_{ii}| > \sum_{\substack{j \neq i \\ j=1}}^{n} |A_{ij}|$$

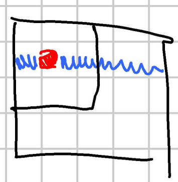
es: $A = \begin{bmatrix} -5 & -2 & 1 \\ 1 & -3 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ $\quad |5| > |2| + |1|$

A è pred. diag. per colonne se A^T è pred. diag. per righe,
cioè per ogni $j = 1, \dots n$ si ha $\quad |A_{jj}| > \sum_{\substack{i=1,\dots n \\ i \neq j}} |A_{ij}|$

⇒ Se A è pred. diagonale (per righe o per colonne) allora è invertibile.

⇒ Se A è pred. diagonale (per righe o per colonne), allora esiste la sua fattorizzazione LU.

Questo perché se A è pred. diagonale, allora lo sono anche le sue sottomatrici principali di testa.



Difatti, se $|A_{ii}| > \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{n} |A_{ij}|$,

allora a maggior ragione

$$|A_{ii}| > \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{k} |A_{ij}|$$

e quindi è soddisfatto il criterio di esistenza.

Vogliamo ora trovare una variante della fattorizzazione LU che esiste per tutte le matrici (invertibili).

__Idea__: voglio evitare di avere pivot troppo piccoli, per questo __scambio__ le righe di A.

Vogliamo ottenere un algoritmo che costruisce una fatt. LU non per forza di A, ma di una matrice che si ottiene __permutando__ le righe di A.

La chiameremo PA.

__Oss__: una matrice ottenuta permutando le righe di A si può scrivere come prodotto di A per una matrice P (a sinistra)

__ES__: $A = \begin{bmatrix} a_1 \\ \hline a_2 \\ \hline a_3 \\ \hline a_4 \end{bmatrix} \in \mathbb{C}^{4\times 4}$ $\qquad \begin{bmatrix} a_4 \\ \hline a_2 \\ \hline a_3 \\ \hline a_1 \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}}_{\text{matrice di permutazione}} \cdot \begin{bmatrix} a_1 \\ \hline a_2 \\ \hline a_3 \\ \hline a_4 \end{bmatrix}$

__matrice di permutazione__

(ottenuta prendendo le righe di I nell'ordine che mi interessa)

Vogliamo costruire una fattorizz. LU di una versione permutata per righe di A.

Ad ogni passo, selezioniamo tra tutti i pivot possibili quello __più grande__ in valore assoluto.

__ES__: passo $k=1$: $\quad A = \begin{bmatrix} -2 & \times & \times & \times \\ \boxed{4} & \times & \times & \times \\ 3 & \times & \times & \times \\ -1 & \times & \times & \times \end{bmatrix} \qquad P_1 A = \begin{bmatrix} 4 & \times & \times & \times \\ -2 & \times & \times & \times \\ 3 & \times & \times & \times \\ -1 & \times & \times & \times \end{bmatrix}$

Faccio un passo di elim. Gauss con questo ordine di righe

$L_2 = \begin{bmatrix} 1 & & & \\ \times & 1 & & \\ \times & & 1 & \\ \times & & & 1 \end{bmatrix} \qquad U_2 = \begin{bmatrix} 4 & \times & \times & \times \\ 0 & \times & \times & \times \\ 0 & \times & \times & \times \\ 0 & \times & \times & \times \end{bmatrix}$ $\mapsto$ sto effettuando gli __stessi__ calcoli su tutte le righe $2 \dots n$.

$P_1 A = L_2 U_2$

$$P_2A = \begin{bmatrix} \\ \\ \\ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & & & \\ X & 1 & & \\ X & & 1 & \\ X & & & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} X & X & X & X \\ 0 & X & X & X \\ 0 & X & X & X \\ 0 & X & X & X \end{bmatrix}$$

Ora faccio un secondo passo di elim. Gauss,

$$P_2A = \begin{bmatrix} 1 & & & \\ X & 1 & & \\ X & X & 1 & \\ X & X & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X & X & X & X \\ 0 & X & X & X \\ 0 & 0 & X & X \\ 0 & 0 & X & X \end{bmatrix}.$$

$\vdots$

<u>Oss.</u>: In questo metodo incontriamo divisioni per $\emptyset$ solo se tutti i candidati pivot sono $\emptyset$, cioè solo se siamo in una situazione del tipo

$$\begin{bmatrix} X & X & X & X \\ 0 & \boxed{0} & X & X \\ 0 & \boxed{0} & X & X \\ 0 & \boxed{0} & X & X \end{bmatrix}$$

cioè, se durante l'eliminazione di Gauss incontro una colonna senza pivot $\Rightarrow$ la matrice è singolare.

> La fatt. LU con pivoting arriva a successo per tutte le matrici invertibili e produce $PA = LU$

Come usare la fatt. LU con pivoting per risolvere un sistema lineare:

$$Ax = b \iff PAx = Pb \iff L\underbrace{Ux}_{y} = Pb$$

$$\iff \begin{cases} Ly = Pb \\ Ux = y \end{cases}$$

<u>Algoritmo completo</u>:

1. Calcolo P, L, U t.c. $PA = LU$ $\qquad O(n^3)$ $\left(\frac{2}{3}n^3\right)$
2. Calcolo Pb permutando gli elem. di b $\qquad O(n)-O(n^2)$
3. Risolvo il sist. triang. inf. $Ly = Pb$ ottenendo y $\qquad O(n^2)$

4. Risolvo $Ux=y$ ottenendo x. $O(n^2)$

Questo algoritmo è quello usato anche da Matlab in $A \backslash b$

fattorizzazioneLU_pivoting.m *

```
function [L,U,P] = fattorizzazioneLU_pivoting(A)
% calcola fattorizzazione LU di A

[m, n] = size(A);

if not(m==n)
    error('non quadrata')
end
S
L = eye(n);
U = A;
P = eye(n); % permutazione
for k = 1:n-1
    [val, pos] = max(abs(U(k:n,k)));
    p = pos + k - 1; % riga dove sta il pivot
    L([p k], 1:k-1) = L([k p], 1:k-1);
    U([p k], k:n) = U([k p], k:n);
    P([p k], 1:n) = P([k p], 1:n);

    if U(k,k) == 0
        error('pivot nullo')
    end
    % scrive moltiplicatori
    L(k+1:n,k) = U(k+1:n,k) / U(k,k);
    U(k+1:n,k) = 0;

    % sottrae multipli di righe
    for i = k+1:n
        U(i,k+1:n) = U(i,k+1:n) - L(i,k) * U(k,k+1:n);
    end
    % L, U, L*U
end
```