Fattorizzazione LU

Note Title 2026-03-20

Eliminazione di Gauss

- lavoriamo solo su $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$
- operazioni su righe
- riduciamo A in forma triangolare (non diagonale)
- (per ora) assumiamo tutti i pivot non nulli, niente scambi di righe

Per eliminare l'elemento al posto (i,k) al passo k-esimo facciamo

$$(\text{riga } i) \leftarrow (\text{riga } i) - \underbrace{\boxed{L_{ik}}}_{\text{moltiplicatore}} (\text{riga } k)$$

Dopo aver introdotto zeri nelle prime $k-1$ colonne, abbiamo una matrice U_k

$$U_k = \begin{bmatrix} u_{11}^k & u_{12}^k & \cdots & u_{1,k-1}^k & u_{1,k}^k & \cdots & u_{1n}^k \\ 0 & u_{22}^k & & & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \ddots & u_{k-1,k-1}^k & & & \\ 0 & \vdots & \ddots & 0 & u_{k,k}^k & & \\ \vdots & \vdots & & \vdots & u_{k+1,k}^k & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 \cdots & 0 & u_{n,k}^k & \cdots & u_{nn}^k \end{bmatrix}$$

Per eliminare u_{ik}^k, con $i = k+1, k+2, \dots n$, sottraiamo alla riga i-esima

$$L_{ik} = \frac{u_{ik}^k}{u_{kk}^k}$$ volte la riga k-esima

Mostriamo l'eliminazione per $n=4$, e intanto "annotiamo" i moltiplicatori in una matrice L, che inizialmente vale

$L = I$

$$L_1 = I = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad U_1 = A = \begin{bmatrix} x & x & x & x \\ x & x & x & x \\ x & x & x & x \\ x & x & x & x \end{bmatrix}$$

$$L_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ x & 1 & 0 & 0 \\ x & 0 & 1 & 0 \\ x & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad U_2 = \begin{bmatrix} x & x & x & x \\ 0 & x & x & x \\ 0 & x & x & x \\ 0 & x & x & x \end{bmatrix}$$

$$L_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ x & 1 & 0 & 0 \\ x & x & 1 & 0 \\ x & x & 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad U_3 = \begin{bmatrix} x & x & x & x \\ 0 & x & x & x \\ 0 & 0 & x & x \\ 0 & 0 & x & x \end{bmatrix}$$

$$L_4 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ x & 1 & 0 & 0 \\ x & x & 1 & 0 \\ x & x & x & 1 \end{bmatrix} \qquad U_4 = \begin{bmatrix} x & x & x & x \\ 0 & x & x & x \\ 0 & 0 & x & x \\ 0 & 0 & 0 & x \end{bmatrix}$$

Invariante (non ovvio da vedere, lo dimostreremo): $L_k U_k = A$

Al passo $k=1$, $A = I \cdot A$ è ovvio

Al passo $k=n$, $A = L_n \cdot U_n = \underbrace{L}_{\text{triang. inferiore con diagonale 1 (lower)}} \; \underbrace{U}_{\text{triang. superiore (upper)}}$

Abbiamo scritto A come prodotto di due matrici con questa struttura, fattorizzazione LU.

Costo computazionale: l'operazione più costosa è l'aggiornamento della matrice U.

Al passo 1, aggiorno una sottomatrice $(n-1) \times (n-1)$

Al passo 2, una sottomatrice $(n-2) \times (n-2)$

$\vdots$

Al passo $n-1$ $\quad 1 \times 1$

Costo: $2(n-1)^2 + 2(n-2)^2 + \dots + 2 \cdot 2^2 + 2 \cdot 1^2$

$$= 2 \cdot \left(\frac{1}{6}(n-1)n(2n-1) \right) = \frac{2}{3}n^3 + O(n^2)$$

Soluzione di sistemi lineari:

Una volta calcolata la fattorizzazione LU di A, posso scrivere

$$Ax = b \Leftrightarrow L\underbrace{Ux}_{y} = b \Leftrightarrow \begin{cases} Ly = b \\ Ux = y \end{cases}$$

Algoritmo:

1. Calcolo $A = LU$ $\sim \frac{2}{3}n^3$
2. Calcolo y risolvendo $Ly = b$ (sist. triang. inferiore) n^2
3. Calcolo x risolvendo $Ux = y$ (sist. triang. superiore) n^2

Il passo più costoso è il primo, che dipende solo da A. Se devo risolvere s sistemi lineari con la stessa A, ma b diversi, calcolo una volta solo la fatt. LU e poi la uso per risolvere tutti i sistemi, costo $\frac{2}{3}n^3 + n^2 s$.

Oss: il passo k di eliminazione di Gauss, quello che introduce zeri nella colonna k, si può vedere come prodotto

$$U_{k+1} = E_k \cdot U_k$$

dove

$$E_k = \begin{bmatrix} 1 & & & & & & \\ 0 & \ddots & & & & & \\ 0 & & 1 & & & & \\ 0 & \cdots & 0 & 1 & & & \\ \vdots & & \vdots & -L_{k+1,k} & 1 & & \\ \vdots & & \vdots & -L_{k+2,k} & 0 & \ddots & \\ \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \\ 0 & \cdots & 0 & -L_{n,k} & 0 & \cdots\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

(Matrici elementari di Gauss)

colonna k-esima

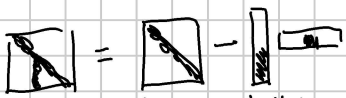
Difetti,

$$E_k x = \begin{bmatrix} 1 & & & & & & \\ & \ddots & & & & & \\ & & 1 & & & & \\ & & & 1 & & & \\ & & & -l_{k+1,k} & 1 & & \\ & & & \vdots & & \ddots & \\ & & & -l_{n,k} & & & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_{k-1} \\ x_k \\ x_{k+1} \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_{k-1} \\ x_k \\ x_{k+1} - l_{k+1,k} x_k \\ x_{k+2} - l_{k+2,k} x_k \\ \vdots \\ x_n - l_{nk} x_k \end{bmatrix}$$

Quindi ho
$$U_2 = E_1 U_1$$
$$U_3 = E_2 U_2$$
$$\vdots$$
$$U_n = E_{n-1} U_{n-1}$$

Oss:

$$E_k = I - l_k e_k^T \qquad I = \begin{bmatrix} 1 & & \\ & \ddots & \\ & & 1 \end{bmatrix} \qquad l_k = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ l_{k+1,k} \\ l_{k+2,k} \\ \vdots \\ l_{n,k} \end{bmatrix} \begin{matrix} \\ \\ \\ k \\ \\ \\ \\ \\ \end{matrix} \qquad e_k = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} \begin{matrix} \\ \\ \\ \\ k \\ \\ \\ \\ \\ \end{matrix}$$

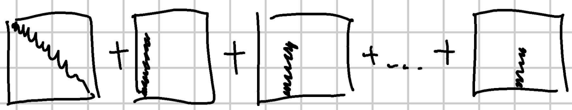


$n \times n \quad n \times 1 \quad 1 \times n$

Lemma: proprietà delle matrici elementari di Gauss

1. $E_k^{-1} = I + l_k e_k^T$

2. $E_1^{-1} E_2^{-1} E_3^{-1} \cdots E_k^{-1} = I + l_1 e_1^T + l_2 e_2^T + \ldots + l_k e_k^T$



$$= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & & & & \\ l_{21} & 1 & 0 & \cdots & & & & \\ l_{31} & l_{32} & 1 & & & & & \\ \vdots & \vdots & & \ddots & & & & \\ & & & & 1 & & & \\ \vdots & \vdots & & & l_{k+1,k} & 1 & & \\ & & & & \vdots & 0 & \ddots & \\ l_{n1} & l_{n2} & \cdots & & l_{n,k} & 0 & 0 \cdots & 1 \end{bmatrix} = L_{k+1}$$

già incontrata sopra!

Dim: 1. $(I + l_k e_k^T)(I - l_k e_k^T) = I - \cancel{l_k e_k^T} + \cancel{l_k e_k^T} - l_k \underbrace{e_k^T l_k}_{= 0} e_k^T = I$

perché $e_k^T l_k = [0\ 0 \cdots 0\ 1\ 0 \cdots 0] \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ l_{k+1,k} \\ \vdots \\ l_{n,k} \end{bmatrix} = 0$. Quindi questo dimostra che $I + l_k e_k^T$ è l'inversa di $E_k = I - l_k e_k^T$.

2. $E_1^{-1}E_2^{-1}\cdots E_k^{-1} = I + l_1e_1^T + l_2e_2^T + \dots + l_ke_k^T$

Lo dimostriamo per induzione:

$\boxed{k=1}$: $E_1^{-1} = I + l_1e_1^T$ già dimostrato al punto precedente

$\boxed{k-1 \Rightarrow k}$:

$$\underbrace{E_1^{-1}E_2^{-1}\cdots E_{k-1}^{-1}}E_k^{-1} = \left(I + l_1e_1^T + \dots + l_{k-1}e_{k-1}^T\right)\left(I + l_ke_k^T\right)$$

$$= I + l_1e_1^T + \dots + l_{k-1}e_{k-1}^T + l_ke_k^T + \cancel{l_1\underbrace{e_1^T l_k}_{=0}e_k^T} + \dots + \cancel{l_{k-1}\underbrace{e_{k-1}^T l_k}_{=0}e_k^T}$$

I termini con 4 fattori sono tutti 0, perché $e_j l_k^T = 0$ quando $j<k$.

□

Teo: sia data $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$. Supponiamo di non incontrare mai pivot nulli nell'eliminazione di Gauss/fattorizzazione LU. Allora, ad ogni passo si ha $A = L_kU_k$.

Dim: $U_1 = A$

$U_2 = E_1U_1$

$U_3 = E_2U_2 \quad \longrightarrow \quad U_k = E_{k-1}E_{k-2}\cdots E_2E_1U_1$

$\vdots$

$U_k = E_{k-1}U_{k-1} \qquad\qquad = E_{k-1}E_{k-2}\cdots E_2E_1A.$

Nel lemma, abbiamo visto che $L_k = E_1^{-1}E_2^{-1}\cdots E_{k-1}^{-1}$.

Quindi

$$L_kU_k = \cancel{E_1^{-1}}\,\cancel{E_2^{-1}}\cdots\cancel{E_{k-2}^{-1}}\,\underbrace{\cancel{E_{k-1}^{-1}E_{k-1}}}\,\cancel{E_{k-2}}\cdots\cancel{E_2}\,\cancel{E_1}A = A.$$ □

Definizione: si chiama sottomatrice principale di testa di una matrice $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ la matrice

$$A_{1:k,1:k} = \begin{bmatrix} A_{11} & \cdots & A_{1k} \\ \vdots & & \vdots \\ A_{k1} & \cdots & A_{kk} \end{bmatrix}.$$

ES:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 5 & 6 & 7 & 8 \\ 9 & 10 & 11 & 12 \\ 13 & 14 & 15 & 16 \end{bmatrix}$$

$$A_{1:1,1:1} = \begin{bmatrix} 1 \end{bmatrix}$$

$$A_{1:2,1:2} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 5 & 6 \end{bmatrix}$$

$$A_{1:3,1:3} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 5 & 6 & 7 \\ 9 & 10 & 11 \end{bmatrix}$$

Teo: (esistenza della fattorizzazione LU). Sia data $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$, se le sottomatrici principali di testa $A_{1:1,1:1}, A_{1:2,1:2}, \dots A_{1:n-1,1:n-1}$ sono tutte invertibili, allora non incontro mai pivot nulli, posso portare a termine l'algoritmo, e quindi esiste la fattorizz. LU della matrice A.

Dim: Quando stiamo per effettuare il passo k dell'eliminazione di Gauss, abbiamo $A = L_k U_k$

$$A = \begin{bmatrix} 1 & & & & & \\ L_{21} & 1 & & & 0 & \\ L_{31} & L_{32} & \ddots & & & \\ \vdots & \vdots & 1 & & & \\ & & L_{k,k-1} & 1 & & \\ & & \vdots & 0 & \ddots & \\ L_{n1} & L_{n2} & \dots L_{n,k-1} & 0 & & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} U_{11} & U_{12} & \dots & & U_{1n} \\ 0 & U_{22} & \dots & & U_{2n} \\ \vdots & & U_{k-1,k-1} & & \vdots \\ \vdots & & 0 & U_{k,k} & \vdots \\ 0 & & 0 & U_{k+1,k} & \\ \vdots & & \vdots & \vdots & \\ 0 & \dots & 0 & U_{nk} & U_{nn} \end{bmatrix}$$

$A_{1:k,1:k}$ è uguale al prodotto della sottomatrice fatta dalle prime k righe di L e di quella fatta dalle prime k colonne di U. In realtà, mi basta fermarmi alle prime k colonne di L e le prime k righe di U, cioè, $A_{1:k,1:k} = L_{1:k,1:k} \cdot U_{1:k,1:k}$. Difatti, gli elementi di L nelle ultime n-k colonne sono tutti zeri, e se faccio il prodotto non contribuiscono.

Prendiamo determinanti:

$$\det A_{1:k,1:k} = \det L_{1:k,1:k} \cdot \det U_{1:k,1:k}$$

$$= \underbrace{1 \cdot 1 \cdot 1 \cdot \ldots \cdot 1}_{k \text{ volte}} \cdot U_{11} U_{22} \cdot \ldots \cdot U_{kk}.$$

Se $A_{1:k,1:k}$ è invertibile, $\det A_{1:k,1:k} \neq 0$ e quindi

$U_{11} \neq 0$, $U_{22} \neq 0$ ... $U_{kk} \neq 0$.

In particolare, questo dice che $U_{kk} \neq 0$, cioè il pivot che voglio usare in questo passo è diverso da zero.

Se posso fare i passi $1, 2, 3, \ldots n-1$, allora posso portare a termine l'algoritmo. $\square$