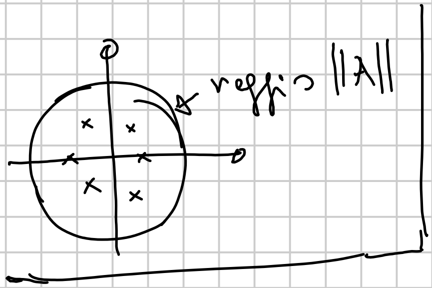
Teorema dei cerchi di GERSHGORIN

Note Title 2026-03-18



Consideriamo $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$, e definiamo

$$K_i = \Big\{ z\in\mathbb{C} : |z - \underbrace{A_{ii}}_{\text{centro}}| \leq \underbrace{\sum_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{n} |A_{ij}|}_{\text{raggio}} \Big\}$$

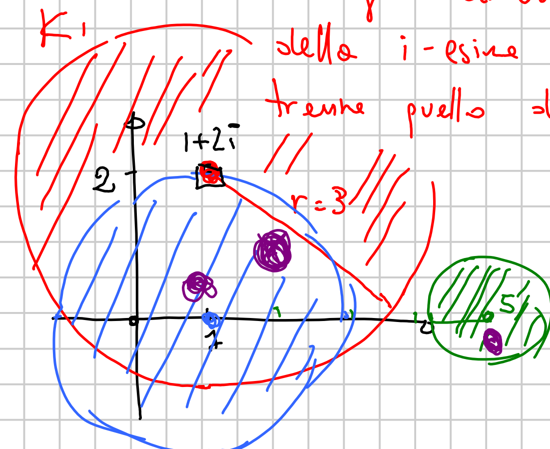
$i = 1, 2, 3, \dots n$

tutti gli elementi della i-esima riga tranne quello diagonale

i cerchi di Gershgorin

ES:

$$A = \begin{bmatrix} \boxed{1+2i} & \boxed{3i} & \boxed{0} \\ \boxed{0} & \boxed{5} & \boxed{-1} \\ \boxed{-i} & \boxed{i} & \boxed{1} \end{bmatrix} \begin{array}{l} \leftarrow K_1 \\ \leftarrow K_2 \\ \leftarrow K_3 \end{array}$$



Teo: tutti gli autovalori della matrice A sono inclusi nell'unione dei cerchi di Gershgorin.

Dim: Fissiamo $\lambda \in \mathbb{C}$ autovalore di A. Allora, esiste $\boxed{v \neq 0}$ tale che $Av = v\lambda$. Scrivendo la componente i-esima di questa uguaglianza, abbiamo

$$\sum_{j=1}^{n} A_{ij} v_j = v_i \lambda. \qquad i = 1, 2, \dots n$$

Portando dall'altro lato la componente $j=i$, abbiamo

$$\left| (\lambda - A_{ii}) v_i \right| = \Big| \sum_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{n} A_{ij} v_j \Big|$$

$$|\lambda - A_{ii}| \cdot |v_i| = \Big| \sum_{j\neq i} A_{ij} v_j \Big| \underset{\text{disug. triangolare}}{\leq} \sum_{j\neq i} |A_{ij}| \cdot |v_j| \qquad i = 1, 2, \dots n$$

Prendiamo l'indice p per cui $|v_p|$ è massimo:

$$|v_p| = \max_{j=1,2,\dots n} |v_j|$$

Scrivo la disuguaglianza sopra per $i=p$, e divido per $|v_p|$:

$$|\lambda - A_{pp}| \cdot \underbrace{\frac{|v_p|}{|v_p|}}_{=1} \leq \sum_{j\neq p}' |A_{pj}| \underbrace{\frac{|v_j|}{|v_p|}}_{\leq 1}$$

, cioè

$$\Downarrow$$

$$|\lambda - A_{pp}| \leq \sum_{j \neq p}' |A_{pj}| . \iff \lambda \in K_p$$

Poiché λ appartiene al p-esimo cerchio, appartiene in particolare all'unione dei cerchi. $\square$

[posso dividere per $|v_p|$, perché $v \neq 0$ e quindi c'è almeno una componente non nulla in v, e $\max |v_j| \neq 0$.]

<u>ES</u>: data la matrice

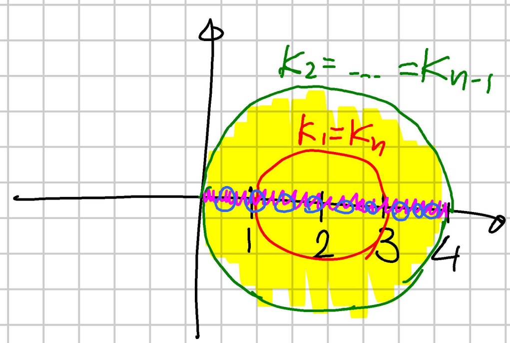
$$A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & & & \\ -1 & 2 & -1 & & \\ & -1 & 2 & -1 & \\ & & -1 & 2 & \ddots \\ & & & \ddots & \ddots & -1 \\ & & & & -1 & 2 \end{bmatrix},$$

(gli elementi non disegnati sono 0)

i suoi cerchi di Gershgorin sono

$$K_1 = \{ |z-2| \leq 1 \} = K_n$$

$$K_2 = \{ |z-2| \leq 2 \} = K_3 = K_4 = \dots = K_{n-1}$$



gli autovalori di A stanno nella regione gialla

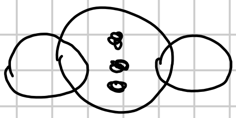
Ricordiamo anche dall'alg. lineare:

teorema spettrale: se $A = A^T$, allora A ha autovalori reali.

Combinando i due risultati, ho che gli autovalori devono stare sul segmento $[0,4]$

(Secondo teorema di Gershgorin: se c'è una regione disgiunta degli altri cerchi fatto con K cerchi, allora esso contiene esattamente K autovalori)

[Se non sono disgiunti, non è sempre vero, ad es. potrei avere



]

<u>Def</u>: una matrice $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$ si dice dominante diagonale (o predominante diagonale) se

$$|A_{ii}| > \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{n} |A_{ij}| \qquad i = 1, 2, \dots n$$

Cioè, ogni elemento diagonale è <u>strettamente</u> maggiore (in val. ass.) della somma degli altri elementi della riga.

<u>es.</u> $A = \begin{bmatrix} -5 & 2 & -2 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$

$|5| > |2| + |-2|$ ✓
$|2| > |1| + |0|$ ✓
$|-1| > |0| + |0|$ ✓

<u>Lemma</u>: Una matrice dominante diagonale è sempre invertibile.

Dim: mostriamo che il punto 0 <u>non</u> sta dentro nessuno dei cerchi di Gershgorin:

$0 \in K_i \iff |0 - A_{ii}| \leq \sum_{j \neq i} |A_{ij}|$, che è falsa perché è la disuguaglianza opposta a quella che definisce la predom. diagonale.

$\Rightarrow$ 0 <u>non</u> sta nell'unione dei cerchi di Gershgorin di A

$\Rightarrow$ 0 <u>non</u> è un autovalore di A.

$\Rightarrow$ A è invertibile (dall'algebra lineare: A invertibile <u>se e solo se</u> 0 non è un autovalore). □

⚠ Non è vero che se 0 sta nell'unione dei cerchi allora è un autovalore per forza.

Algoritmi per risolvere sistemi lineari: casi facili

Caso facile 1: A è diagonale:

$$A = \begin{bmatrix} A_{11} & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & A_{22} & 0 & & \vdots \\ 0 & 0 & A_{33} & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & A_{nn} \end{bmatrix}$$

$Ax=b$:

$$\begin{bmatrix} A_{11} & & & \\ & A_{22} & & \\ & & \ddots & \\ & & & A_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} A_{11}x_1 = b_1 \\ A_{22}x_2 = b_2 \\ \vdots \\ A_{nn}x_n = b_n \end{cases}$$

Si risolve separatamente per ogni riga:

$$\begin{cases} x_1 = \frac{b_1}{A_{11}} \\ x_2 = \frac{b_2}{A_{22}} \\ \vdots \\ x_n = \frac{b_n}{A_{nn}} \end{cases}$$

Sono n divisioni, $O(n)$ operazioni.

Possiamo farlo se $A_{ii} \neq 0$ per ogni i, che è la condizione per cui una matrice diagonale sia invertibile.

Sistemi triangolari:

A si dice triangolare inferiore se $A_{ij}=0$ per ogni $j>i$

$$A = \begin{bmatrix} A_{11} & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ A_{21} & A_{22} & 0 & \cdots & 0 \\ A_{31} & A_{32} & A_{33} & 0 \cdots & 0 \\ \vdots & & & \ddots & \\ & & & \ddots & 0 \\ A_{n1} & A_{n2} & \cdots & & A_{nn} \end{bmatrix}$$

$$Ax=b \Leftrightarrow \begin{bmatrix} A_{11} & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ A_{21} & A_{22} & 0 & 0 & \cdots & \vdots \\ A_{31} & A_{32} & A_{33} & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & & \vdots \\ A_{n1} & A_{n2} & A_{n3} & \cdots & & A_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} A_{11}x_1 = b_1 \\ A_{21}x_1 + A_{22}x_2 = b_2 \\ A_{31}x_1 + A_{32}x_2 + A_{33}x_3 = b_3 \\ \vdots \end{cases}$$

Si può risolvere per sostituzione in avanti:

$$x_1 = \frac{b_1}{A_{11}}$$

$$x_2 = \frac{b_2 - A_{21}x_1}{A_{22}}$$

$$x_3 = \frac{b_3 - A_{31}x_1 - A_{32}x_2}{A_{33}}$$

$\vdots$

Genericamente:

$$x_k = \frac{b_k - A_{k1}x_1 - A_{k2}x_2 - \dots A_{k,k-1}x_{k-1}}{A_{kk}}$$

$k = 1, 2, \dots n$

Posso calcolare questi valori a partire dal primo, secondo, ecc.

Ad ogni passo servono solo elementi calcolati ai passi precedenti.

<u>Complessità</u>: 1 op. in virgola mobile per $k=1$

3 per $k=2$

5 per $k=3$

7

9

$\vdots$

In totale $(k=1,2,\dots n)$ n^2 operazioni floating point.

Analogamente per A triang. <u>superiore</u> si usa sostituzione all'indietro (forward / back substitution)

A triang. superiore se $A_{ij} = 0$ quando $i > j$

$$\begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & \dots & A_{1n} \\ 0 & A_{22} & A_{23} \dots & A_{2n} \\ \vdots & \ddots & \ddots & \\ 0 & \dots & 0 \quad A_{n-1,n-1} & A_{n-1,n} \\ 0 & 0 \dots & 0 \quad 0 & A_{n,n} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix} \rightarrow \begin{array}{c} \vdots \\ A_{n-1,n-1}x_{n-1} + A_{n-1,n}x_n = b_{n-1} \\ A_{nn}x_n = b_n \end{array}$$

$$x_k = \frac{b_k - A_{k,k+1}x_{k+1} - \dots A_{kn}x_n}{A_{kk}}$$

che posso risolvere nell'ordine per $k = n, n-1, n-2, \dots 2, 1$

con n^2 operazioni in virgola mobile.

Questi algoritmi sono stabili:

Tre tipi di errore:

$$e_{tot} \doteq e_{an} + e_{in} + e_{alg}$$

- $e_{an} = 0$, perché non abbiamo errori in aritmetica esatta: dopo un numero finito di operazioni, otteniamo la soluzione esatta (se l'aritmetica è esatta)
- $e_{in} \doteq K(A)u \qquad K(A) = \|A\| \cdot \|A^{-1}\|$.
- e_{alg} in questo caso è anche lui sempre dell'ordine di $K(A)u$: gli algoritmi sono stabili.

Oss: gli algoritmi di sostituzione calcolano $x = A^{-1}b$ a partire da A e b senza mai costruire A^{-1}.

$x = inv(A) * b$ sarebbe più costoso $(O(n^3))$.