Note Title 2026-03-11

$A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ quadrata, invertibile $\qquad b \in \mathbb{R}^n$

$$Ax = b \iff x = A^{-1} b$$

Se modifichiamo b in $\tilde{b}$, otteniamo una soluzione diversa $\tilde{x}$

Come sono legati gli errori relativi

$$\varepsilon_B = \frac{\|\tilde{b} - b\|_p}{\|b\|_p} \qquad \varepsilon_x = \frac{\|\tilde{x} - x\|_p}{\|x\|_p} \quad ?$$

<u>Teo</u>: A invertibile, $b \neq 0$, $Ax = b$, $A\tilde{x} = \tilde{b}$

Allora, per ogni norma vettoriale si ha

$$\frac{\|\tilde{x} - x\|_p}{\|x\|_p} \leq \|A\|_p \cdot \|A^{-1}\|_p \frac{\|\tilde{b} - b\|_p}{\|b\|_p}.$$

norma matriciale indotta dalla norma vettoriale $\|\cdot\|_p$

<u>Dim</u>:

$$\|\tilde{x} - x\|_p = \|A^{-1}\tilde{b} - A^{-1}b\|_p = \|A^{-1}(\tilde{b} - b)\|_p \overset{\text{compatibilità norme matr.. ind.}}{\leq} \|A^{-1}\|_p \, \|\tilde{b} - b\|_p$$

e anche

$$\|b\|_p = \|Ax\|_p \underset{\text{compatibilità}}{\leq} \|A\|_p \cdot \|x\|_p \iff \frac{1}{\|x\|_p} \leq \frac{\|A\|_p}{\|b\|_p}$$

Moltiplicando tra loro le disuguaglianze, otteniamo la tesi.

$K(A) = \|A\|_p \cdot \|A^{-1}\|_p$ è detto <u>numero di condizionamento</u> della matrice A.

Notiamo che $1 = \|I\|_p = \|AA^{-1}\|_p \leq \|A\|_p \|A^{-1}\|_p = K(A)$

per ogni norma matriciale indotta, perché

$$\|I\|_p = \max_{\|u\|_p = 1} \|I \cdot u\|_p = \max_{\|u\|_p = 1} \|u\|_p = 1.$$

Oss: questo risultato non vale solo per $\|\tilde{b}-b\|$ piccolo, come quelli con $\doteq$, bensì per ogni $A, b, \tilde{b}$.

Vale un risultato simile, ma solo per piccole perturbazioni, se perturbiamo la matrice A:

$$Ax = b \qquad \tilde{A}\tilde{x} = b$$

$$x = A^{-1}b \qquad \tilde{x} = \tilde{A}^{-1}b$$

$$\frac{\|\tilde{x}-x\|_p}{\|x\|_p} \;\dot{\leq}\; \underbrace{\|A\|_p \|A^{-1}\|_p}_{\text{sempre } K(A)} \cdot \frac{\|\tilde{A}-A\|_p}{\|A\|_p}$$

(vale solo per $\varepsilon_A = \frac{\|\tilde{A}-A\|_p}{\|A\|_p}$ piccolo)