Prossimo ricevimento: martedì 10-3 9:00

Note Title 2026-03-06

Es: Dato un numero reale $K>0$, studiare il comportamento del metodo del punto fisso su $\Phi(x) = \frac{1}{2}\left(x + \frac{K}{x}\right)$

Cerchiamo i punti fissi di Φ:

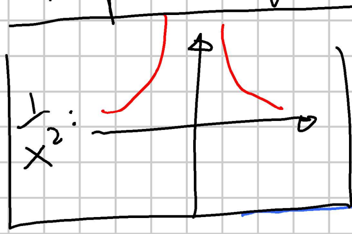
$$x = \Phi(x) \iff x = \frac{1}{2}x + \frac{K}{2x} \iff \frac{1}{\cancel{2}}x = \frac{K}{\cancel{2}x}$$

$$\iff x^2 = K \qquad x = \pm\sqrt{K}.$$

Calcoliamo $\Phi'(x) = \frac{1}{2}\left(1 - \frac{K}{x^2}\right)$. Quando $|\Phi'(x)| < 1$?

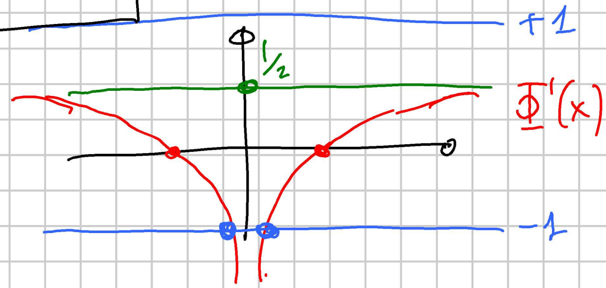
Questo ci dice in che intervalli possiamo applicare il teorema del punto fisso.

grafico di $\frac{1}{x^2}$:



assomiglia a questo, traslato e scalato

Grafico di $\frac{1}{2}\left(1-\frac{K}{x^2}\right)$:



- $\lim_{x\to\infty}\left(1-\frac{K}{x^2}\right) = \frac{1}{2}$
- $\frac{1}{2}\left(1-\frac{K}{x^2}\right) < \frac{1}{2}$
- asintoto in $x=0$

Voglio trovare i due punti marcati in blu, cioè le soluzioni di

$$\frac{1}{2}\left(1 - \frac{K}{x^2}\right) = -1 \iff 1 - \frac{K}{x^2} = -2 \iff 3 = \frac{K}{x^2}$$

$$\iff 3x^2 = K \iff x = \pm\sqrt{\frac{K}{3}} = \pm\frac{\sqrt{K}}{\sqrt{3}}$$

Teo: sia data Φ di classe C^1 su un intervallo

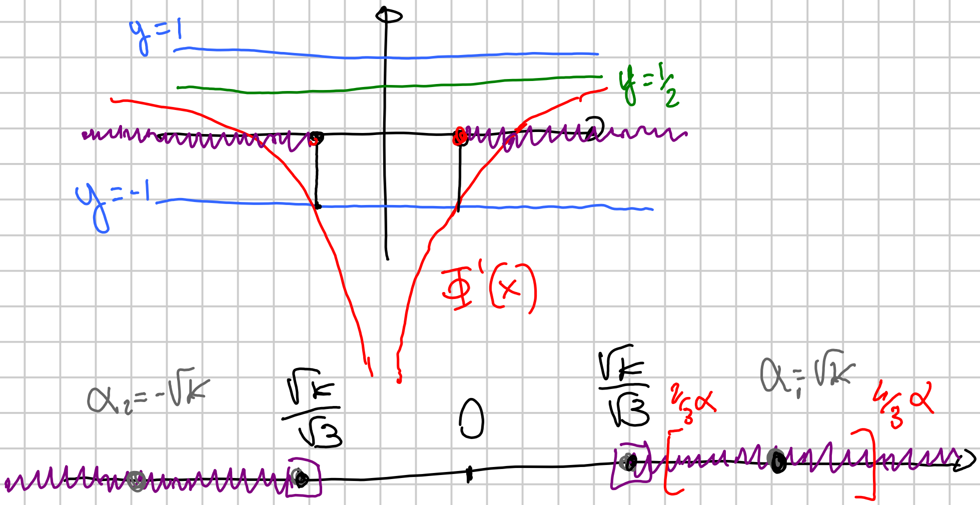
$$I = [\alpha-\rho, \alpha+\rho], \qquad L = \max_{x\in I}|\Phi'(x)|$$

Se $\boxed{L<1,}$ allora per ogni $x_0 \in I$ si ha

- $x_k \in I$
- $\lim_{k \to \infty} x_k = \alpha$

Dallo studio di funzione che abbiamo fatto, segue che

$$|\Phi'(x)| < 1 \quad \text{per} \quad x \in \left(-\infty, -\frac{\sqrt{k}}{\sqrt{3}}\right), \left(\frac{\sqrt{k}}{\sqrt{3}}, \infty\right)$$



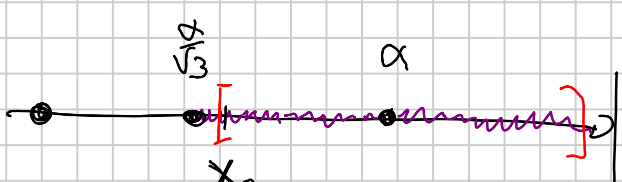
Devo trovare intervalli $[\alpha-\rho, \alpha+\rho]$ tutti compresi nella regione viola.
$\boxed{\alpha=\sqrt{k}}$

Se prendo $\rho = \alpha/2$, $I = \left[\frac{\alpha}{2}, \frac{3}{2}\alpha\right]$, non va bene perché $\frac{\alpha}{2} < \frac{\alpha}{\sqrt{3}}$

Se prendo $\rho = \frac{\alpha}{3}$, $I = \left[\frac{2}{3}\alpha, \frac{4}{3}\alpha\right]$, va bene perché

$$\frac{1}{\sqrt{3}} < \frac{2}{3} \iff \frac{1}{3} < \frac{4}{9} \quad ✓$$

In generale, posso trovare un intervallo di questo tipo che contiene ogni punto compreso fra $\frac{\alpha}{\sqrt{3}}$ e α:



Se ρ è tale che $\alpha - \rho = \frac{\alpha}{\sqrt{3}}$, allora

$$\rho = \left(1 - \frac{1}{\sqrt{3}}\right)\alpha$$

$$\alpha + \rho = \alpha + \left(1 - \frac{1}{\sqrt{3}}\right)\alpha = \left(2 - \frac{1}{\sqrt{3}}\right)\alpha$$

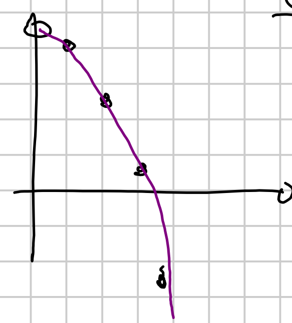
$\Rightarrow$ Per ogni $x_0 \in \left(\frac{\alpha}{\sqrt{3}}, \left(2 - \frac{1}{\sqrt{3}}\right)\alpha\right)$, posso trovare un intervallo in cui applicare il teorema.

Tasso di convergenza:

$$\lim_{k\to\infty} \frac{|x_{k+1}-\alpha|}{|x_k-\alpha|} = |\Phi'(\alpha)|$$

$$\Phi'(\alpha) = \frac{1}{2}\left(1-\frac{K}{\alpha^2}\right) = \frac{1}{2}\left(1-\frac{K}{K}\right) = 0 \quad \rightarrow \text{convergente } \underline{\text{superlineare}}$$

gli errori vanno a $0 \rightarrow$ più velocemente di una retta su un grafico semilog.



Se $x_0 \gg 1$

$$\frac{x_1-\alpha}{x_0-\alpha} = \frac{\Phi(x_0)-\Phi(\alpha)}{x_0-\alpha} = \Phi'(\xi_0) \qquad \text{per } \xi_0 \in (\alpha, x_0)$$

che è <1, per come è fatto il grafico della funzione

Se $x_0 \ll 1$, $x_1 \gg 1$

<u>Oss:</u> se $f(x) = x^2 - K$, il metodo di Newton è

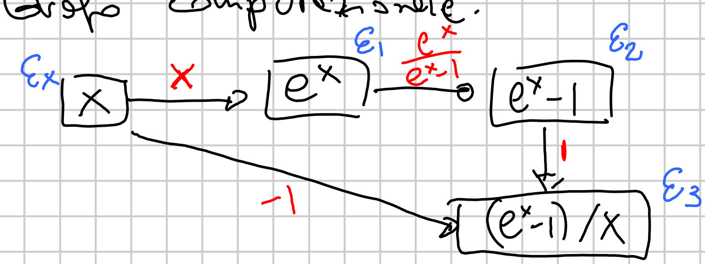
$$x_{k+1} = x_k - \frac{f(x_k)}{f'(x_k)} = x_k - \frac{x_k^2-K}{2x_k} = \frac{2x_k^2 - x_k^2 + K}{2x_k}$$

$$= \frac{x_k^2+K}{2x_k} = \frac{1}{2}\left(x_k + \frac{K}{x_k}\right).$$

<u>Esempio:</u> calcolo di $f(x) = \frac{e^x-1}{x}$

(Ricordiamo dell'analisi che $\boxed{\lim_{x\to 0} \frac{e^x-1}{x} = 1}$)

Grafo computazionale:



coeff. di propag. di e^x:

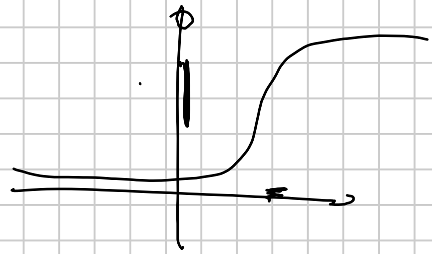
$$\boxed{\frac{d}{dx}e^x \cdot \frac{x}{e^x} = x}$$

$$\left(\frac{\partial}{\partial x}\frac{x}{y}\right) \cdot \frac{x}{\left(\frac{x}{y}\right)} = 1$$

$$\varepsilon_{mec} = \varepsilon_x \cdot x \cdot \frac{e^x}{e^x-1} \cdot 1 + \varepsilon_x \cdot (-1) + \varepsilon_1 \cdot \frac{e^x}{e^x-1} \cdot 1 + \varepsilon_2 \cdot 1 + \varepsilon_3$$

$$= \underbrace{\varepsilon_x \left(\frac{xe^x}{e^x-1} - 1 \right)}_{\varepsilon_{in}} + \underbrace{\varepsilon_1 \boxed{\frac{e^x}{e^x-1}} + \varepsilon_2 + \varepsilon_3}_{\varepsilon_{alg}}$$

$$\lim_{x \to 0} \frac{e^x}{e^x-1} = \frac{\lim e^x \to 1}{\lim e^x - 1 \to 0} = \infty$$



$$\lim_{x \to 0} \frac{\overset{\to 1}{x \overset{\to 1}{e^x}}}{e^x-1} - 1 = 1 - 1 = 0$$

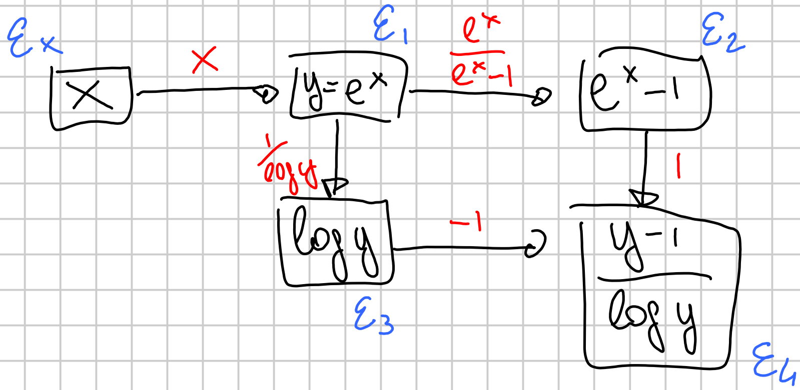
Il numero di condizionamento $\left| \frac{xe^x}{e^x-1} - 1 \right|$ tende a 0

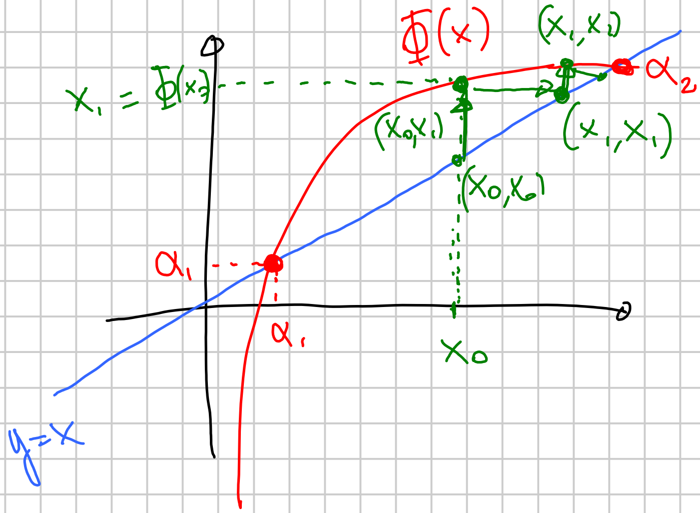
$\to$ la funzione è ben condizionata, ma l'algoritmo è instabile.

Algoritmo alternativo: $\frac{e^x-1}{x} = \frac{e^x-1}{\log e^x}$

```
>> y = e^x
>> z = (y-1)/log(y)
```

Sorprendentemente, questo è stabile (nonostante la sottrazione $y-1$ al numeratore).





Ottengo le "scale" in verde collegate

(x_0, x_0), (x_0, x_1), (x_1, x_1), (x_1, x_2), (x_2, x_2) ...

$$[x_0 \; x_0 \; x_1 \; x_1 \; x_2 \; \dots]$$

$$[x_0 \; x_1 \; x_1 \; x_2 \; x_2 \; \dots]$$