

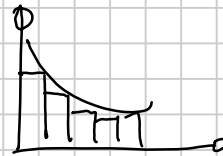
CALCOLO NUMERICO

Note Title

2026-02-04

Algoritmi per problemi di algebra lineare / analisi

• problemi senza formule risolutive $\int_0^1 e^{-x^2} dx$?



• algoritmi bruti!

$$\det A = \sum_{j=1}^n (-1)^{j+1} a_{ij} \underbrace{A^{(1,j)}}_{\substack{\phi \\ \det (n-1) \times (n-1)}}$$

$$1 \det n \times n \rightarrow n \det (n-1) \times (n-1) \quad \det \sim n!$$

• approssimazioni:

$$\frac{1}{3} = 0.333...3$$

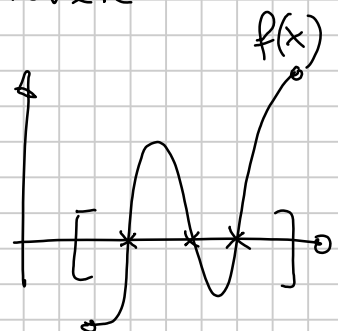
$$\frac{1}{3} + \frac{1}{3} + \frac{1}{3} = 0.999...9 \neq 1$$

Equazioni non lineari / teori di funzione

ES: $\boxed{T} = \frac{1}{\mu - \lambda \boxed{2^{-T}}}$ (teoria delle code)

Problema generale: dato $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$, trovare
 α t.c. $f(\alpha) = 0$

$$f(x) = \frac{1}{\mu - \lambda 2^{-x}} - x$$



Def: uno zero (radice) della funzione è un punto α t.c. $f(\alpha) = 0$.

ES: calcolo di radici n-esime: trovare $\sqrt[n]{K}$ $K \in \mathbb{R}$
 $K > 0$
 $\Leftrightarrow$ trovare uno zero di $f(x) = x^n - K$

Per dimostrare che una soluzione esiste:

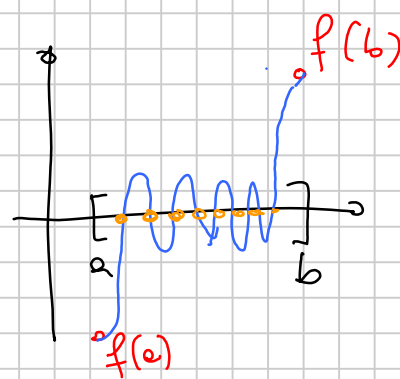
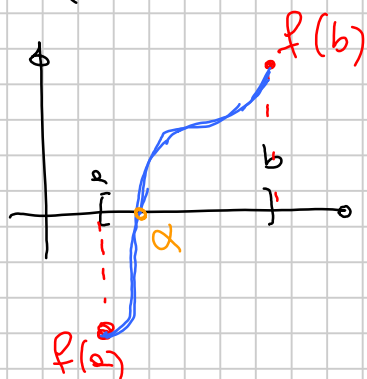
definiamo un intervallo di separazione per f come

un intervallo $[a, b]$ tale che $f(a)f(b) < 0$,
cioè $f(a), f(b)$ hanno segni opposti (uno positivo,
uno negativo)

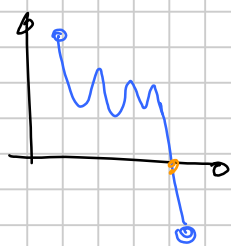
Teo: (teorema di esistenza degli zeri):

sia $f \in C^0([a, b])$ (C^0 : classe delle funzioni continue)

Se $f(a)$ e $f(b)$ hanno segno opposto, allora
esiste $\alpha \in (a, b)$ t.c. $f(\alpha) = 0$.



Per dimostrare che la soluzione è esattamente una:



se $f \in C^1$ (continua, derivabile,
 f' è continua)

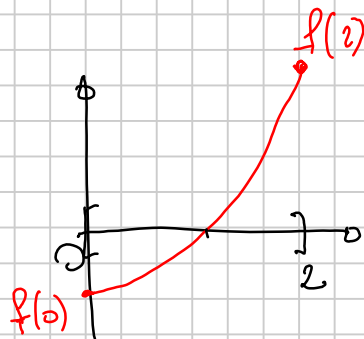
se la derivata è sempre positiva (negativa)
 f è strett. crescente (decrescente) e quindi

ha un solo zero α .

es: $f(x) = x^3 - 2$

$$f(0) = -2 < 0$$

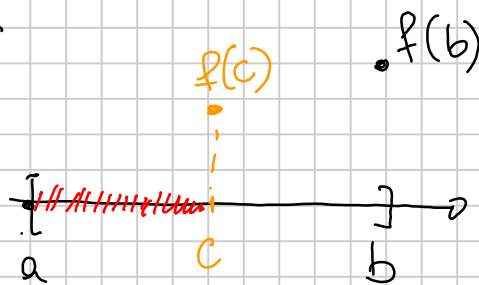
$$f(2) = 8 - 2 = 6 > 0$$



$[0, 2]$ è un int. di separazione per $f(x)$

$f'(x) = 3x^2 > 0$ per ogni $x > 0 \rightarrow f$ è crescente
 $\rightarrow$ esiste solo un punto α t.c. $f(\alpha) = 0$.

Metodo di bisezione: si applica a ogni f continua,
e richiede di conoscere un intervallo di separazione da
cui partire.

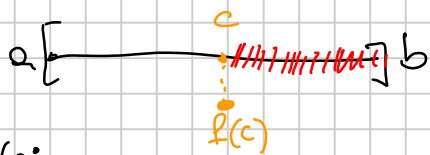


$c =$ punto medio di $[a, b]$

Definisco $[a_1, b_1] = [a, c]$
e continuo

$\Rightarrow [a, c]$ è di separazione

oppure



Definisco $[a_1, b_1] = [c, b]$
e continuo

Formule facili: punto medio $= c = \frac{a+b}{2}$

es:

lunghezza: $b - a$

$$f(x) = x^2 - 2 \quad [0, 2]$$

	a_k	c_k	b_k	$f(a_k)$	$f(c_k)$	$f(b_k)$
$k=0$	0	1	2	-2	-1	2
$k=1$	1	1.5	2	-1	0.25	2
$k=2$	1	1.25	1.5	-1	-0.4375	0.25
$k=3$	1.25	:	1.5	:	:	:
	:	:	:	:	:	:

Costo computazionale: la parte più costosa è (tipicamente)

il calcolo della funzione f . Quante volte per passo dobbiamo calcolarla? 1 volta sola per passo + 2 iniziali
 costo computazionale: $n+2$ chiamate alla funzione f .

Con quale accuratezza seppiamo risolvere il problema?

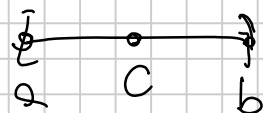
• ed ogni passo, $[a_k, b_k]$ è di separazione

$$b_1 - a_1 = \frac{b_0 - a_0}{2}$$

$$b_2 - a_2 = \frac{b_1 - a_1}{2} = \frac{b_0 - a_0}{4}$$

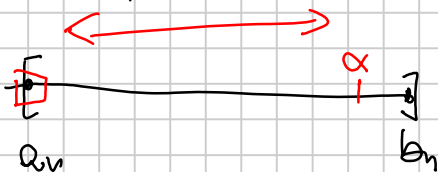
$$\vdots$$

$$b_n - a_n = \frac{b_0 - a_0}{2^n}$$



• una volta calcolati a_n, b_n , l'approssimazione migliore della soluzione α che possiamo restituire è $\frac{a_n + b_n}{2}$

Restituendo $x = a_n$ oppure $x = b_n$, nel caso peggiore $|x - \alpha| \approx b_n - a_n$



Restituendo $x = \frac{a_n + b_n}{2}$, nel caso peggiore $|x - \alpha| \approx \frac{b_n - a_n}{2}$



$$|x - \alpha| \leq \frac{b_n - a_n}{2}$$

$$|x - \alpha| \leq \frac{b_n - a_n}{2} = \frac{1}{2} \frac{b_0 - a_0}{2^n} = \frac{b_0 - a_0}{2^{n+1}}$$

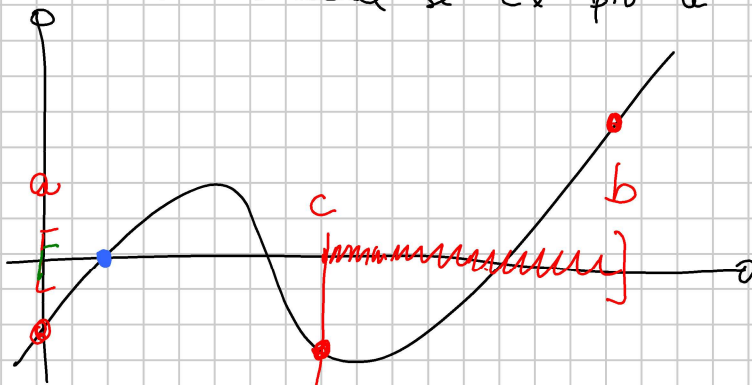
Questa formula produce un criterio per scegliere il numero di passi n : se vogliamo un'approssimazione con errore che sia garantito $\leq \epsilon$ $|x - \alpha| \leq \epsilon$, devo scegliere n in modo che

$$\frac{b_0 - a_0}{2^{n+1}} \leq \epsilon \Leftrightarrow 2^{n+1} \geq \frac{b_0 - a_0}{\epsilon}$$

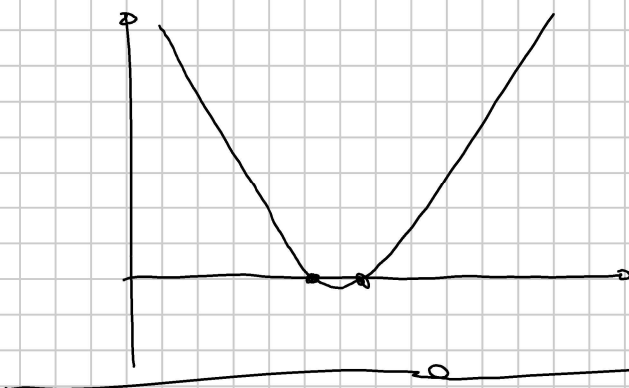
$$\Leftrightarrow n+1 \geq \log_2 \frac{b_0 - a_0}{\epsilon}$$

$$n = \left\lceil \log_2 \frac{b_0 - a_0}{\epsilon} - 1 \right\rceil$$

Cosa succede se c'è più di una soluzione?



A un certo punto "pendono" soluzioni



Esempio: trovare un intervallo di separazione da cui partire può essere difficile!

- Pro:
- serve solo continuità della funzione
 - converge sempre (in un numero di passi fisso)

◦ Contra: - serve un intervallo di separazione da cui partire
- richiede più iterazioni rispetto ad altri metodi che vedremo.

```
function x = bisezione(a, b, f, epsilon)
% calcola uno zero di f
% dato un intervallo di separazione [a,b]
% restituisce x tale che |x-alpha| <= epsilon

n = ceil(log2((b-a)/epsilon) - 1);

fa = f(a);
fb = f(b);

if fa*fb >= 0
    error('non ho un intervallo di separazione')
end

for k = 1:n
    % ad ogni passo, [a,b] è un
    % intervallo di separazione
    c = (a+b) / 2;
    fc = f(c);
    if fc == 0
        break
    end

    % v = [a c b f(a) f(c) f(b)]
    if fa*fc < 0
        b = c; % [a,b] <-- [a,c]
        fb = fc;
    else % f(c)*f(b) < 0
        a = c; % [a,b] <-- [c,b]
        fa = fc;
    end
end

x = (a+b)/2;
```

[domanda: perché funziona
lo stesso se rinnovo
le due righe evidenziate
in giallo?]