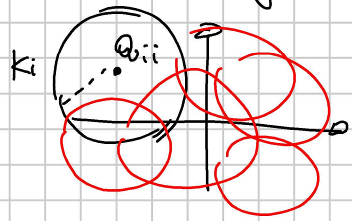
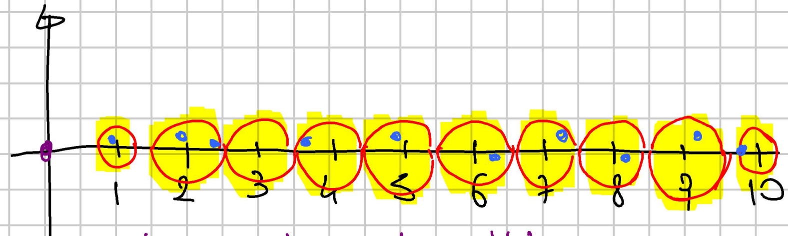
Note Title 2021-04-20

Teo: Gershgorin $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$ $\quad K_i = \left\{ |z - a_{ii}| \le \sum_{j \ne i} |a_{ij}| \right\}$ $\quad i = 1, 2, 3, \dots n$

λ autovalore di $A \Rightarrow \lambda \in \bigcup_{i=1}^{n} K_i$



$$A = \begin{bmatrix} 10 & -\alpha & & & & \\ \alpha & 9 & -\alpha & & & \\ & \alpha & 8 & -\alpha & & \\ & & \alpha & 7 & -\alpha & \\ & & & \ddots & \ddots & \ddots \\ & & & \alpha & 2 & -\alpha \\ & & & & \alpha & 1 \end{bmatrix}$$



0 ∉ area gialla ⇒ A invertibile

$\alpha = \frac{1}{4}$

$K_1 = \left\{ |z-10| \le |-\alpha| + \cancel{|0|} + \dots \cancel{|0|} \right\}$

$= \left\{ |z-10| \le |\alpha| = \frac{1}{4} \right\}$

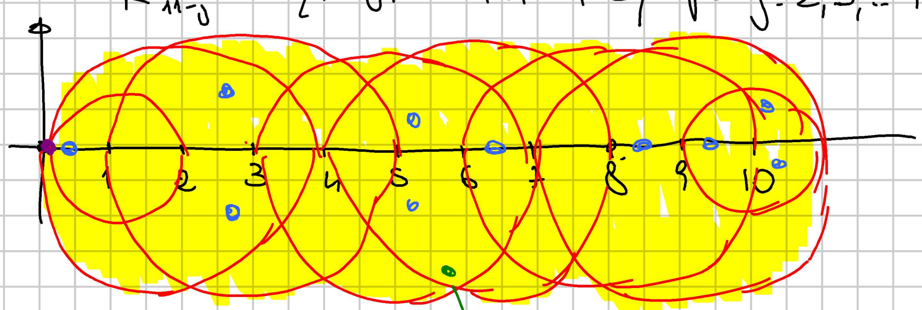
$K_2 = \left\{ |z-9| \le |\alpha| + |-\alpha| = \frac{1}{4} + \frac{1}{4} = \frac{1}{2} \right\}$

$K_{10} = \left\{ |z-1| \le |\alpha| = \frac{1}{4} \right\}$

$\alpha = 1$; $\quad K_1 = \left\{ |z-10| \le 1 \right\}$ $\quad \boxed{K_{10} = \left\{ |z-1| \le 1 \right\}}$ → verificata per $z=0$

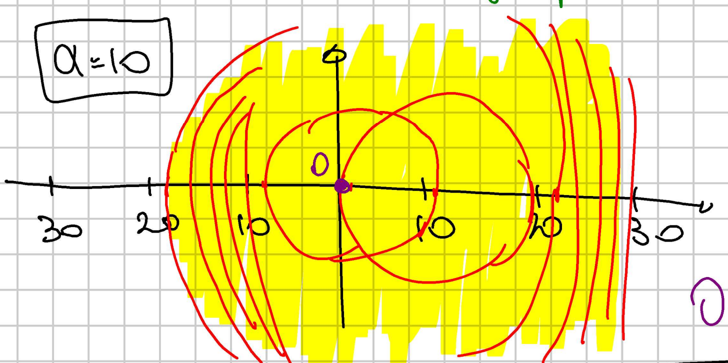
$K_{11-j} = \left\{ |z-j| \le |\alpha| + |-\alpha| = 2 \right\}$ per $j = 2, 3, \dots 9$

0 ∈ area gialla ⇒ non posso dire che A è invertibile



non è vero che ogni punto nell'area gialla è un autovalore di A

$\boxed{\alpha = 10}$



$|K_{11-j}| = \left\{ |z-j| \le |\alpha| + |-\alpha| = 20 \right\}$

$K_1 = \left\{ |z-10| \le 10 \right\}$

$K_{10} = \left\{ |z-1| \le 10 \right\}$

0 ∈ giallo ⇒ non so se A invertibile o no

A invertibile ⟺ $\lambda = 0$ non è un autovalore di A

0 autovalore di $A \iff \det(A - 0 \cdot I) = 0 \iff A$ è non-invertibile

Se $0 \notin \bigcup K_i$, allora posso concludere che 0 non è autoval. di $A \Rightarrow A$ inv.

Per quali valori di $\alpha \in \mathbb{R}$ vale almeno una di

$|z-10| \le |\alpha| \iff -|\alpha| \le z-10 \le |\alpha| \iff 10-|\alpha| \le z \le 10+|\alpha| \quad z \in [10-|\alpha|, 10+|\alpha|]$

$|z-9| \le 2|\alpha| \iff z \in [9-2|\alpha|, 9+2|\alpha|]$

$|z-8| \le 2|\alpha|$, $z \in [8-2|\alpha|, 8+2|\alpha|]$

$\vdots$

$|z-2| \le 2|\alpha|$, $z \in [2-2|\alpha|, 2+2|\alpha|]$

$|z-1| \le |\alpha| \iff z \in [1-|\alpha|, 1+|\alpha|]$

per $z=0$?

z sta in K_i se vale almeno una di queste disuguaglianze

$10 = |-10| \le |\alpha|$

$9 = |-9| \le |2\alpha|$

$\vdots$

$\cancel{2} = |-2| \le |\cancel{2}\alpha|$

$1 = |-1| \le |\alpha|$

se $|\alpha| \ge 1$, allora almeno uno è verificato $\Rightarrow 0 \in$ zona gialla $\Rightarrow$ non posso dire se A è invertibile

se $|\alpha| < 1$, allora nessuno è verificato $\Rightarrow 0 \notin$ area gialla $\Rightarrow$ A invertibile

---

$$A_{n-1} = \begin{array}{c} \begin{bmatrix} 10 & -\alpha & & & & \\ \alpha & 9 & -\alpha & & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & & \\ & & \alpha & 3 & -\alpha & \\ & & & \alpha & 2 & -\alpha \\ & & & & \alpha & 1 \end{bmatrix} \end{array}$$

Posso concludere che è invertibile se 0 non sta all'interno di nessun cerchio di GG per questa matrice, cioè se sono tutte false

$|0-10| \le |\alpha|$

$|0-9| \le 2|\alpha|$

$|0-8| \le 2|\alpha|$

$\vdots$

$|0-3| \le 2|\alpha|$

$|0-2| \le |\alpha|$

$\Rightarrow$ devono essere tutte vere $|\alpha| < 2$, $2|\alpha| < 3$, $2|\alpha| < 4$, ... $2|\alpha| < 9$, $|\alpha| < 10$

$\Updownarrow$

$|\alpha| < 3/2$

Vere se (e solo se) $|\alpha| < 3/2$

Se $|\alpha| < 3/2$, posso concludere che A_{n-1} è invertibile

Anche per le altre sottomatrici principali,

$$\begin{bmatrix} 10 & -\alpha & & & \\ \alpha & 9 & -\alpha & & \\ & \alpha & 8 & \ddots & \\ & & \ddots & \ddots & -\alpha \\ & & & \alpha & j \end{bmatrix}$$

avrò disuguaglianze della forma

$$|10-j| \le |\alpha| \qquad j = ,3,4,\dots,10$$

$$|10-j| \le 2|\alpha|$$

tutte queste ~~un~~ sono verificate per $\alpha < 3/2 \Rightarrow 0 \notin$ cerchi per A_j

Anche per queste altre sottomatrici, se $|\alpha| < 3/2$ Gershgorin consente di dimostrare invertibilità $\Rightarrow$ se $|\alpha| < 3/2$ esiste (ed è unica) la fatt. LU di A.

Se $|\alpha| < 3/2$, allora 0 non sta in nessun cerchio di G. di

$$\begin{bmatrix} 10 & -\alpha & & & & & \\ \alpha & 9 & -\alpha & & & & \\ & \alpha & 8 & -\alpha & & & \\ & & \alpha & 7 & -\alpha & & \\ & & & \ddots & \ddots & -\alpha & \\ & & & & \alpha & 3 & -\alpha \\ & & & & & \alpha & 2 \end{bmatrix}$$

1.
$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & & & & \\ & 1 & -1 & & & \\ & & 1 & -1 & & \\ & & & \ddots & -1 & \\ & & & & 1 & -1 \\ p & & & & & 1 \end{bmatrix}$$

$A_1, A_2, A_3, \dots A_{n-1}$ sono tutte triang. sup. con elementi 1 sulla diagonale $\Rightarrow$ sono invertibili

$\Rightarrow$ per il teo. di esistenza e unicità della fatt. LU,
A ammette fatt. LU

2.
$$U = \begin{bmatrix} 1 & -1 & & & & 0 \\ & 1 & -1 & & & \\ & & 1 & -1 & & \\ & & & \ddots & \ddots & \\ & & & & \ddots & -1 \\ & 0 & & & 1 & -1 \\ & & & & & 1+p \end{bmatrix}$$

Modo 1:
$L_{n-1} \cdots L_3 L_2 L_1 U$

$$L_1 A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & & & \\ 0 & 1 & -1 & & \\ 0 & & 1 & -1 & \\ \vdots & & & \ddots & \ddots \\ 0 & & & 1 & -1 \\ \rho & & & & 1 \end{bmatrix} \quad \text{ultimo} - \rho \cdot 1^a \text{ riga}$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & & & \\ 0 & 1 & & \\ 0 & & \ddots & \\ 0 & & & \\ \vdots & & & \\ 0 & & & \\ -\rho & & & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -1 & & & \\ & 1 & -1 & & \\ & & 1 & -1 & \\ & & & \ddots & -1 \\ \rho & & & & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & & & & \\ & 1 & -1 & & & \\ & & 1 & -1 & & \\ & & & \ddots & \ddots & \\ & & & & & -1 \\ 0 & \rho & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{bmatrix}$$

azzero

$$L_2 L_1 A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 & \cdots & & 0 \\ & 1 & -1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ & 0 & 1 & -1 & 0 & \cdots & 0 \\ & \vdots & & \ddots & \ddots & & \\ 0 & 0 & \rho & 0 & \cdots 0 & 1 & -1 \end{bmatrix}$$

dopo $n-2$ passaggi, otteniamo

$$L_{n-2} \cdots L_1 A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & & & & \\ & 1 & -1 & & & \\ & & \ddots & \ddots & & \\ & & & \ddots & \ddots & \\ & & & & 1 & -1 \\ 0 & \cdots & & 0 & \rho & 1 \end{bmatrix}$$

ultimo passaggio: $U = \begin{bmatrix} 1 & -1 & & & & \\ & 1 & -1 & & & \\ & & \ddots & \ddots & & \\ & & & \ddots & \ddots & \\ & & & & 1 & -1 \\ 0 & \cdots & & 0 & 0 & 1+\rho \end{bmatrix}$

Modo alternativo: Idea: ragioniamo come nella dim. di esistenza/unicità della fatt. LU

$$A = \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & & & 0 \\ & 1 & -1 & & \vdots \\ & & \ddots & -1 & 0 \\ & & & 1 & -1 \\ \hline \rho & 0 & 0 \cdots & 0 & 1 \end{array}\right] = \left[\begin{array}{c|c} L_{n-1} & 0 \\ \hline y^T & 1 \end{array}\right] \cdot \left[\begin{array}{c|c} U_{n-1} & x \\ \hline 0 & \alpha \end{array}\right]$$

$$\begin{cases} L_{n-1} \cdot U_{n-1} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & & \\ & 1 & -1 & \\ & & \ddots & -1 \\ & & & 1 \end{bmatrix} \\ y^T \cdot U_{n-1} = [\rho \; 0 \; 0 \cdots 0] \\ L_{n-1} \cdot x = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix} \\ y^T x + \alpha = 1 \end{cases}$$

$$L_{n-1} = \begin{bmatrix} 1 & & & \\ & 1 & & \\ & & 1 \ddots & \\ & & & 1 \end{bmatrix} \qquad U_{n-1} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & & \\ & 1 & -1 & \\ & & \ddots & -1 \\ & & & 1 \end{bmatrix}$$

$$x = L_{n-1}^{-1} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ -1 \end{bmatrix}$$

$$[y_1 \; y_2 \; y_3 \cdots y_{n-1}] \begin{bmatrix} 1 & -1 & & \\ & 1 & -1 & \\ & & 1 & -1 \\ & & & \ddots & -1 \\ & & & & 1 \end{bmatrix} = [\rho \; 0 \; 0 \; 0 \cdots 0]$$

$$\begin{cases} y_1 = \rho \\ -y_1 + y_2 = 0 \\ -y_2 + y_3 = 0 \end{cases}$$

$$y = [\rho \; \rho \; \rho \cdots \rho]$$

$$\begin{cases} \vdots \\ -y_{n-2}+y_{n-1}=0 \end{cases}$$

$$\alpha = 1 - y^T x = 1 - [\rho\ \rho\ \rho \cdots \rho]\begin{bmatrix}0\\0\\\vdots\\0\\-1\end{bmatrix} = 1+\rho$$

$$L = \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & & & & 0 \\ & 1 & & & 0 \\ & & \ddots & & \vdots \\ & & & 1 & 0 \\ \hline \rho & \rho & \rho \cdots & \rho & 1 \end{array}\right] \qquad U = \left[\begin{array}{ccccc|c} 1 & -1 & & & & 0 \\ & 1 & -1 & & & 0 \\ & & \ddots & \ddots & & \vdots \\ & & & & -1 & 0 \\ & & & & 1 & -1 \\ \hline & & 0 & & & 1+\rho \end{array}\right]$$

3. Sempre per teo. esistenza e unicità usato al punto 1, la fattorizz. LU è unica per ogni ρ (l'ipotesi era verificata indipendentem. da ρ)

4)
$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & & & & & 0 \\ & 1 & -1 & & & & \\ & & 1 & -1 & & & \\ & & & 1 & -1 & & \\ & & & & \ddots & -1 & \\ 0 & & & & & 1 & -1 \\ & & & & & & 1+\rho \end{bmatrix}\begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \\ \vdots \\ z_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned} z_1 - z_2 &= 1 \\ z_2 - z_3 &= 1 \\ z_3 - z_4 &= 1 \\ &\vdots \\ z_{n-1} - z_n &= 1 \\ (1+\rho) z_n &= 1 \end{aligned} \qquad \left.\begin{aligned} z_1 &= 1+z_2 \\ z_2 &= 1+z_3 \\ z_3 &= 1+z_4 \\ &\vdots \\ z_{n-2} &= 1+z_{n-1} \\ z_{n-1} &= 1+z_n \end{aligned}\right\} \text{for}$$

$$z_n = \frac{1}{1+\rho}$$