

CALCOLO NUMERICO
Corso di Laurea in Ingegneria Biomedica
A.A. 2013/2014 – Appello 12/06/2014

NOME

COGNOME

MATRICOLA

Esercizio 1 Si consideri la matrice $A = (a_{i,j}) \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $n \geq 2$, definita da

$$a_{i,j} = \begin{cases} 1 & \text{se } i = j; \\ -1 & \text{se } i = j - 1; \\ \rho & \text{se } i = n \text{ e } j = 1; \\ 0 & \text{altrimenti.} \end{cases}$$

1. Dimostrare che A ammette fattorizzazione LU $\forall \rho \in \mathbb{R}$.
2. Dimostrare che per il fattore triangolare superiore $U = (u_{i,j}) \in \mathbb{R}^{n \times n}$ si ha

$$u_{i,j} = \begin{cases} 1 & \text{se } i = j \text{ e } i < n; \\ 1 + \rho & \text{se } i = j = n; \\ -1 & \text{se } i = j - 1; \\ 0 & \text{altrimenti.} \end{cases}$$

3. Determinare per quali valori del parametro $\rho \in \mathbb{R}$ la fattorizzazione LU è unica.
4. Scrivere una funzione Matlab[®] che dati in input $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$, $\rho \in \mathbb{R}$ implementa un processo di sostituzione all'indietro e restituisce in output il vettore \mathbf{z} soluzione del sistema lineare

$$U\mathbf{z} = \mathbf{ones}(n, 1).$$

5. Valutare il costo aritmetico dell'algoritmo.
6. Per $n = 200, 400, 800$ e $\rho = -0.99$ riportare l'errore relativo

$$\epsilon_n = \frac{\|\mathbf{x} - \mathbf{z}\|_1}{\|\mathbf{x}\|_1},$$

ove $\mathbf{x} = [n-1 : -1 : 0]^T + \frac{1}{1+\rho} * \mathbf{ones}(n, 1)$ e \mathbf{z} è la soluzione del sistema ottenuta con la procedura implementata al punto precedente.