Note Title 2021-03-30

Una chiamata a LapDet di dimensione n contiene n chiamate con dimensione n-1

determinante = 0

for j = 1:n

determinante = determinante + $(-1)^{(i+j)}$ * A(i,j) * LapDet(minor(A,i,j))

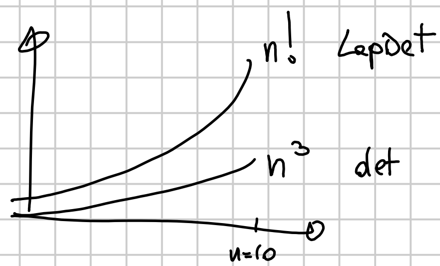
~~Sep~~ + n chiamate a $\underbrace{\text{LapDet}}$ con dimensione n-1

$\boxed{n=10}$ 10 chiamate LapDet (9)

c(n) = numero di chiamate a LapDet di dimensione 2 in LapDet(n)

$$c(10) = 10 * c(9) = 10 * 9 * c(8) = \underbrace{10 * 9 * 8 * 7 * 6 * 5 * 4 * 3}* \underbrace{c(2)}_{\text{3 operazioni}}$$

$\frac{3}{2} n!$ operazioni solo contando quelle nei Lapdet (2)



In Matlab:

$A = LU \longrightarrow O(n^3)$

$$\det(A) = \underset{\substack{\shortparallel \\ l_{11} l_{22} \cdots l_{nn}}}{\det(L)} * \underset{\substack{\shortparallel \\ u_{11} u_{22} \cdots u_{nn}}}{\det(U)}$$

Soluzione sistemi triangolari

$$\begin{array}{c} \vdots \\ ③ \to \\ ② \to \\ ① \to \end{array} \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} & A_{14} \\ 0 & A_{22} & A_{23} & A_{24} \\ 0 & 0 & A_{33} & A_{34} \\ 0 & 0 & 0 & A_{44} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \\ b_4 \end{bmatrix}$$

$$\vdots$$

$$A_{22}x_2 + A_{23}x_3 + A_{24}x_4 = b_2$$

$$A_{33}x_3 + A_{34}x_4 = b_3$$

$$A_{44}x_4 = b_4$$

$$x_4 = \frac{b_4}{A_{44}}, \quad x_3 = \frac{b_3 - A_{34}x_4}{A_{33}} \qquad x_2 = \frac{b_2 - A_{23}x_3 - A_{24}x_4}{A_{22}}$$

$$x_i = \frac{b_i - \sum_{j=i+1}^{n} A_{ij}x_j}{A_{ii}}$$

errore totale: $\frac{\|\tilde{x} - x\|_\infty}{\|x\|_\infty}$

errore totale $\doteq \underbrace{\text{errore inerente}}$ + errore algoritmico

$$\frac{\|x\_calc - x\|_\infty}{\|x\|_\infty} \qquad \frac{\|\tilde{x} - x\|}{\|x\|} \leq K(A) \cdot u$$

$$\frac{\|\tilde{b} - b\|_\infty}{\|b\|_\infty} \leq u \qquad |\epsilon_i| \leq u$$

$$\tilde{b} = \begin{bmatrix} b_1(1+\epsilon_1) \\ b_2(1+\epsilon_2) \\ \vdots \\ b_n(1+\epsilon_n) \end{bmatrix} \qquad \tilde{b} - b = \begin{bmatrix} \epsilon_1 b_1 \\ \vdots \\ \epsilon_n b_n \end{bmatrix}$$

$$\|\tilde{b} - b\|_\infty = \max_{i=1..n} (|\epsilon_i b_i|) = |\epsilon_m b_m|$$

$$\leq |\epsilon_m| \cdot |b_m| \leq u \cdot \|b\|_\infty$$

La soluzione $\tilde{x}$ del sis. lin. $A\tilde{x}=\tilde{b}$

soddisfa

$$\boxed{\frac{\|\tilde{x}-x\|_\infty}{\|x\|_\infty}} \leq K(A)\cdot\frac{\|\tilde{b}-b\|_\infty}{\|b\|_\infty}$$

$$K(A) := \|A\|_\infty \|A^{-1}\|_\infty$$

$f(b)$ = soluz. del sis. lineare $Ax=b$

$f(\tilde{b})$ = soluz. del sis. lin. $A\tilde{x}=\tilde{b}$

$g(\tilde{b})$ = x_calcolato

$$T_4^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & -2 & & 0 \\ & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & -2 \\ 0 & & & 1 \end{bmatrix}$$

$$T_3^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 4 \\ & 1 & 2 \\ & & 1 \end{bmatrix} \qquad T_4^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 4 & 8 \\ & 1 & 2 & 4 \\ & & 1 & 2 \\ & & & 1 \end{bmatrix}$$

$$T_5^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 4 & 8 & 16 \\ & 1 & 2 & 4 & 8 \\ & & 1 & 2 & 4 \\ & & & 1 & 2 \\ & & & & 1 \end{bmatrix} \qquad \dots$$

Tutto questo non è una dimostrazione che

$$T_n^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 4 & \cdots & 2^{n-1} \\ & 1 & 2 & & \vdots \\ & & \ddots & \ddots & 4 \\ & 0 & & \ddots & 2 \\ & & & & 1 \end{bmatrix} \begin{array}{l} \\ \\ j-i=2 \\ j-i=1 \\ j-i=0 \end{array}$$

Dimostrazione che T_n^{-1} è la matrice S_n tale che $(S_n)_{ij} = \begin{cases} 0 & \text{se } i>j \\ 2^{j-i} & \text{altrimenti} \end{cases}$:

$$T_n S_n = \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & -2 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ & 1 & -2 & & & \\ & & 1 & \ddots & & \\ & & & \ddots & \ddots & \\ & 0 & & & 1 & -2 \\ & & & & & 1 \end{bmatrix}}_{T_n} \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 2 & 4 & 8 & \cdots & 2^{n-1} \\ 0 & 1 & 2 & 4 & & \vdots \\ & & 1 & 2 & \ddots & \vdots \\ & & & \ddots & \ddots & 4 \\ & 0 & & & \ddots & 2 \\ & & & & & 1 \end{bmatrix}}_{S_n} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & & & 0 \\ & 1 & & & & & \\ & & 1 & & & & \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 & 0 \cdots & 0 \\ & & & & 1 & & \\ & & & & & \ddots & \\ & & & & & & 1 \end{bmatrix}$$

sulla prima riga, ho $1 \cdot S_{1j} - 2 S_{2j}$, ma S_{1j} e S_{2j} sono uno il doppio dell'altro per ogni $j>1$ $\Rightarrow (T_n S_n)_{1j} = 0$ per $j>1$

La stessa cosa succede per ogni riga:

sulla riga i-esima, ho $(T_n S_n)_{ij} = 1 \cdot S_{ij} - 2 S_{i+1,j}$

Se $j<i$, $S_{ij} = S_{i+1,j} = 0 \Rightarrow (T_n S_n)_{ij} = 0$

Se $j>i$, S_{ij} è il doppio di $S_{i+1,j} \Rightarrow (T_n S_n)_{ij} = 0$

Se $j=i$, $S_{ii} = 1$, $S_{i+1,i} = 0 \Rightarrow (T_n S_n)_{ij} = 1$ ✓ □

Soluzione sistemi triang. inferiori

$$\begin{array}{c} ① \to \\ ② \to \\ ③ \to \\ ④ \to \end{array} \begin{bmatrix} A_{11} & 0 & 0 & 0 \\ A_{21} & A_{22} & 0 & 0 \\ A_{31} & A_{32} & A_{33} & 0 \\ A_{41} & A_{42} & A_{43} & A_{44} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \\ b_4 \end{bmatrix}$$

$$\boxed{A_{11} x_1} = b_1$$
$$A_{21} x_1 + \boxed{A_{22} x_2} = b_2$$
$$A_{31} x_1 + A_{32} x_2 + \boxed{A_{33} x_3} = b_3$$
$$A_{41} x_1 + A_{42} x_2 + A_{43} x_3 + \boxed{A_{44} x_4} = b_4$$

$$x_1 = \frac{b_1}{A_{11}} \qquad x_2 = \frac{b_2 - A_{21} x_1}{A_{22}} \quad \cdots$$

$$x_i = \frac{b_i - \sum_{j=1}^{i-1} A_{ij} x_j}{A_{ii}}$$

```
n = length(b)
x = zeros(n,1)
x(1) = b(1) / A(1,1)
for i=2:n
      numeratore = b(i)
```

for j=1:i-1 | for j=i-1:-1:1

numeratore = numeratore - A(i,j) * x(j)

end

x(i)= numeratore / A(i,i)

end

Op. aritmetiche in sup_solve:

for i=n-1:-1:1

for j=i+1:n

num = num − A_{ij} * x_j 2 op

end

x(i)= numeratore / A(i,i) 1 op

end

i=n 1 op = 1 1

i=n-1 1 + 2 op = 3 4

i=n-2 1+2+2 op = 5 9

i=n-3 1+2+2+2 op = 7 16

⋮ ⋮

i=1 1+2(n-1) op = 2n-1

$1+3+5+7+\ldots+(2n-1) = n^2$ $O(n^2)$

Sapete farlo in $O(n)$ operazioni per il caso particolare

$$T_n = \begin{bmatrix} 1 & -2 & & & \\ & 1 & -2 & & \\ & & \ddots & \ddots & \\ & 0 & & \ddots & -2 \\ & & & & 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & -2 & & & \\ & 1 & -2 & & \\ & & \ddots & \ddots & \\ & & & \ddots & -2 \\ & & & & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix}$$