Note Title 2021-03-16

$$\exp(x) \approx 1 + x + \frac{x^2}{2} + \dots \boxed{\frac{x^i}{i!}} + \frac{x^k}{k!}$$

Quando calcolo su Matlab, devo passare da $\frac{x^i}{i!}$

Quando calcolo questo valore, in aritmetica di macchina $\boxed{\frac{x^i}{i!}(1+\delta_i)}$

con $|\delta_i| \leq u \approx 10^{-16}$

In particolare, uno dei termini che compaiono nell'analisi dell'errore è $\boxed{\frac{x^i}{i!}\delta_i}$

$$\left(\left(1+x\right)\left(1+\delta_1\right) + \frac{x^2}{2}\left(1+\delta_2+\delta_3\right)\right)\left(1+\delta_4\right) + \frac{x^3}{3!}\left(1+\delta_5+\delta_6+\delta_7 \dots\right)$$

$$\left(1+x+\dots+\frac{x^k}{k!}\right) - \left(1 \oplus x \oplus \dots \oplus \frac{x \otimes x \otimes \dots \otimes x}{1 \otimes 2 \otimes \dots \otimes k}\right) = \underbrace{\frac{x^i}{i!}}\delta_i + (\text{altri termini di errore})$$

$$\leq \underbrace{\frac{|x^i|}{|i!|}} \cdot u$$

Se $x = -30$, $\left(1+x+\dots+\frac{x^{50}}{50!}\right) \approx 9 \times 10^{-14}$

$i = 10$: $\frac{30^{10}}{10!} \cdot 2 \cdot 10^{-16} \approx 3 \cdot 10^{-8}$

errore molto più grande dell'esponenziale

$$y = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3!} + \dots + \frac{x^n}{n!}$$

1: valore iniziale di y

x: passo 1

$\frac{x^2}{2}$: passo 2

$\frac{x^3}{3!}$: passo 3

Numero di operazioni:

```
y = 1
for k = 1:n
    y = y + pow(x,k) / factorial(k);
end
```

$$\underbrace{pow(x,k)}_{\downarrow} \qquad \underbrace{factorial(k)}_{\downarrow}$$

2 + k operazioni + k operaz. floating point

$2k+2$ operazioni

Costo totale: $(2\cdot 1+2)+(2\cdot 2+2)+(2\cdot 3+2)\ \cdots\ (2\cdot n+2)$

$$= \sum_{k=1}^{n} 2k+2 = 2\underbrace{\left(\sum_{k=1}^{n} k\right)}_{=\frac{n(n+1)}{2}} + \underbrace{\sum_{k=1}^{n} 2}_{2\cdot n} = n^2+n+2n$$

$$= n^2+3n$$

"costo quadratico"

notazione:

$= \underbrace{O(n^2)}$ → quantità che cresce come un multiplo di n^2

$= n^2 + \underbrace{O(n)}$ → quantità che cresce (al più) come un multiplo di n

Def: una quantità $f(n)$ viene indicata come

$O(n^k)$ (per $n \to \infty$)

se $f(n) \leq C \cdot n^k$ per una costante C

passo k: calcolo x^k e $k!$

passo $k+1$: calcolo x^{k+1} e $(k+1)! = (k+1) \cdot k!$

$$x^{k+1} = x^k \cdot x$$

Idea: se ho calcolato $\frac{x^k}{k!}$, come passo a $\frac{x^{k+1}}{(k+1)!}$?

$$\frac{x^{k+1}}{(k+1)!} = \frac{x^k \cdot x}{k! \cdot (k+1)} = \frac{x^k}{k!} \cdot \frac{x}{k+1}$$

termine da sommare al passo $k+1$ =

(termine da sommare al passo k) $\cdot \frac{x}{k+1}$

Lo salvo in una variabile t

```
for k=1:n
→   t = t * x/k
→   y = y + t
end
```

1° iteraz:

$y = 1 \Rightarrow 1 + x$

Prima del ciclo: $y=1$, $t=1$

Passo 1: $t = 1 \cdot \frac{x}{1} = x$

$y = y + x = 1 + x$

Passo 2: $t = x \cdot \frac{x}{2} = \frac{x^2}{2}$

$y = (1+x) + \frac{x^2}{2}$

⋮

Passo 3: $t = \frac{x^2}{2} \cdot \frac{x}{3} = \frac{x^3}{3!}$

$y = \left(1 + x + \frac{x^2}{2}\right) + \frac{x^3}{3!}$

⋮

Numero di operaz. aritmetiche:

```
for k=1:n
    t = t * x / k
    y = y + t
end
```

3 operazioni

totale: $3n$ ops

$O(n)$ operazioni

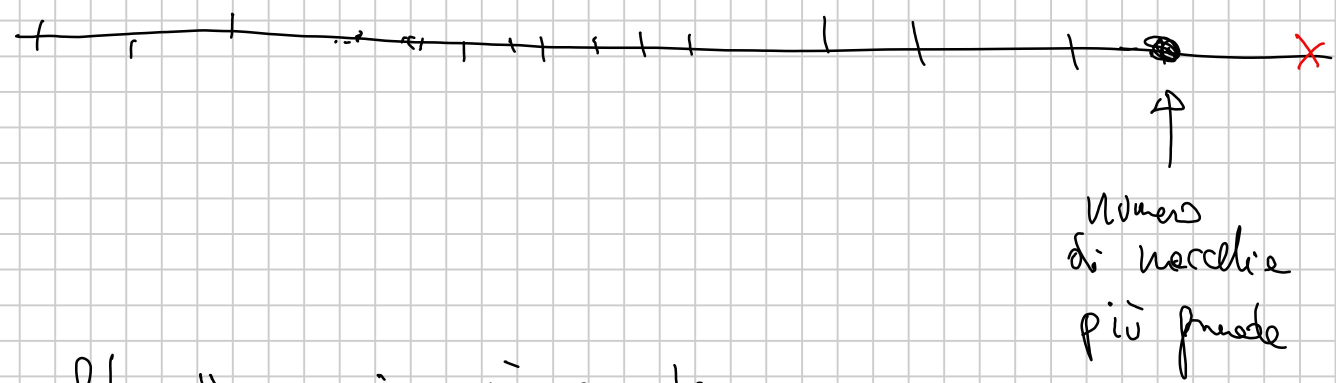
"costo lineare"

$n = 10'000$

$3n$ operazioni (expmec 2) $= 30'000$

vs

$n^2 + 3n$ operazioni (expmec) $= 100'030'000$



"overflow": numeri più grandi del più grande num. macchina vengono rimpiazzati da ∞

"underflow": numeri più piccoli del più piccolo num. di macchina (in val. ass.) vengono rimpiazzati da 0

rischio overflow

expmac: $$\frac{x^k}{k!} = \frac{x\cdot x\cdot x \cdots \cdot x}{1\cdot 2\cdot 3 \cdots \cdot k}$$

expmac2: $$= 1\cdot\left(\frac{x}{1}\right)\cdot\left(\frac{x}{2}\right)\cdot\left(\frac{x}{3}\right)\cdots\left(\frac{x}{k}\right)$$

$$L_n = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 & 0 & \cdots & & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 0 & \cdots & & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -1 & 0 & & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 2 & \ddots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & & & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & & & & \ddots & \ddots & -1 \\ 0 & 0 & \cdots & & 0 & -1 & 2 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{n\times n} \qquad L_4 = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 2 \end{bmatrix}$$

```
function w=prodottoL(v)
% calcola il prodotto L*v dato in input un vettore v
% L è la matrice fatta come sopra della dim. giusta
```

Numero di operazioni in un prodotto matrice-vettore:

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & & \\ a_{n1} & & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} w_1 \\ \vdots \\ w_n \end{bmatrix}$$

$w_i = a_{i1}v_1 + a_{i2}v_2 + \dots + a_{in}v_n$ n prodotti, n-1 somme

2n-1 operazioni

per ogni entrata di w

In totale, $(2n-1)n = 2n^2 - n = O(n^2)$

$= \boxed{2}n^2 + O(n)$

$$w = Lv = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 & \cdots & & 0 \\ -1 & 2 & -1 & & & \\ & -1 & 2 & -1 & & \\ & & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & & -1 & 2 & -1 \\ & & & & -1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ v_4 \\ \vdots \\ v_{n-2} \\ v_{n-1} \\ v_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2v_1 - v_2 \\ -v_1 + 2v_2 - v_3 \\ -v_2 + 2v_3 - v_4 \\ \vdots \\ -v_{n-2} + 2v_{n-1} - v_n \\ -v_{n-1} + 2v_n \end{bmatrix}$$

2 ops

for k=2:n-1

3 ops/iterazione

2 ops

Numero totale operazioni:

$2 + (n-2) \cdot 3 + 2 = n - 6 + 4 = n - 2$

costo lineare $O(n)$

---

plot(x, y)

$x = [x_1 \ x_2 \ \dots \ x_n]$

$y = [y_1 \ y_2, \ \dots \ y_n]$