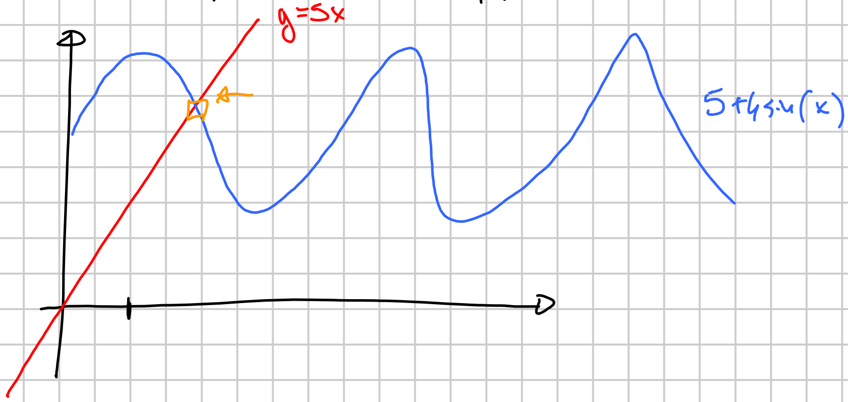
$f(x) = 5+4\sin(x) - 5x \qquad f(\alpha)=0 \iff 5+4\sin(\alpha)=5\alpha$



Per dire che esiste almeno uno zero in $[1,2]$, mostro che è intervallo di separazione

$1<\frac{\pi}{2}$

$f(1) = 5+4\sin(1)-5 = 4\sin(1)>0$

$f(2)=5+4\sin(2)-10 = 4\sin(2)-5 \le 4-5=-1<0 \qquad -1\le \sin(y)\le 1$

Per dire che è esattamente uno, considero $f'(x)=4\cos(x)-5$

$-1\le\cos(x)\le 1$, perciò $f'(x)\le 4-5\le -1<0$

---

2) $5+4\sin(\alpha)-5\alpha=0 \iff \alpha=\frac{5+4\sin(\alpha)}{5} = 1+\frac{4}{5}\sin(\alpha) \iff \alpha = g(\alpha)$

metodo per convertire $f(\alpha)=0$ in un problema di pto fisso, o alternativamente:

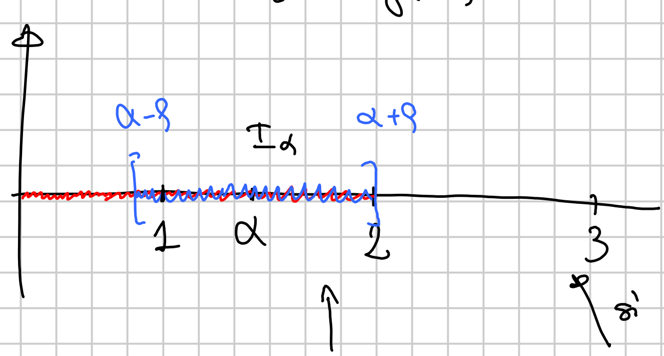
$\sin\alpha = \frac{5\alpha-5}{4} \qquad \alpha=\arcsin\left(\frac{5\alpha-5}{4}\right) \qquad g(x)=1+4/5\sin(x)$

3) Teo (del pto fisso) Data $g(x)$ di classe C^1 su $[a,b]$, pto fisso $\alpha=g(\alpha)$ se esiste $I_\alpha=[\alpha-\rho,\alpha+\rho]$

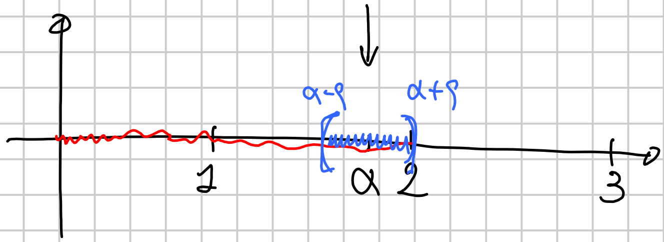
tale che $|g'(x)|<1 \quad \forall x\in I_\alpha$,

allora il metodo $\begin{cases} x_0\in I_\alpha \\ x_{k+1}=g(x_k)\end{cases}$ converge localmente, $x_k\in I_\alpha$

$x_k\to\alpha$



Se $|g'(x)|<1$ in rosso, allora anche in blu, e posso applicare il teorema con questo intervallo $\to$



la succ. $\begin{cases} x_0 = 1 \\ x_{k+1} = g(x) \end{cases}$ converge se $x_0 = 1$ sta in I_α

o no

$\Rightarrow$ non so dove sta $\alpha \in [1,2]$, quindi non so in che caso sono.

Se vogliamo che $\alpha + \rho \leq 2 \Rightarrow \rho \leq 2 - \alpha$

$$\alpha - \rho \geq \alpha - (2 - \alpha) = 2\alpha - 2$$

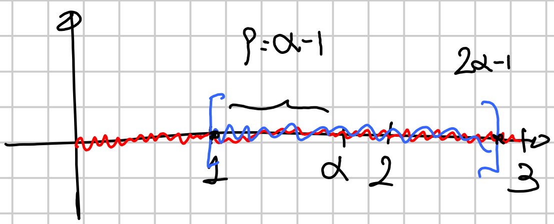
Se $1 < 2\alpha - 2$, allora nessuna possibile scelta di ρ è t.c. $1 \in I_\alpha$

$\Updownarrow$

$2\alpha > 3 \quad \alpha > 3/2$ $\qquad g(x) = 5 + 4\sin\left(\frac{3}{2}\right) - 5 \cdot \frac{3}{2} = 4\sin\left(\frac{3}{2}\right) - \frac{5}{2}$

$\sin\left(\frac{3}{2}\right) \overset{?}{\geq} \frac{5}{8}$

Se sapessimo invece $|g'(x)| < 1 \in [0,3]$



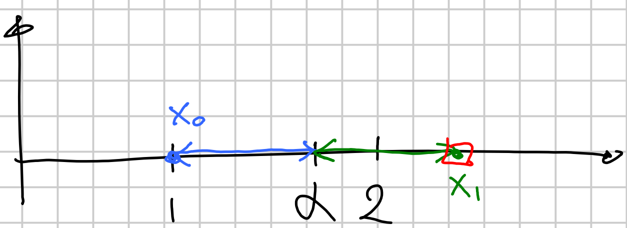
Scelgo $\rho = \alpha - 1$, $I_\alpha = [1, 2\alpha - 1]$

$2\alpha - 1 \leq 3 \iff 2\alpha \leq 4 \iff \alpha \leq 2$ ✓

$|g'(x) = 1|$ per $x \in [0,3] \Rightarrow |g'(x)| < 1$ per $x \in I_\alpha \Rightarrow$ posso applicare il teorema.

$g(x) = 1 + \frac{4}{5}\sin(x)$ $\qquad |g'(x)| = \left|\frac{4}{5}\cos(x)\right|$ $\qquad -1 \leq \cos(x) \leq 1$

$-\frac{4}{5} \leq g'(x) \leq \frac{4}{5}$ $\qquad |g'(x)| < 1$ $\boxed{\forall x \in \mathbb{R}}$



Dalla dimostrazione:

$$|x_{k+1} - \alpha| = |x_k - \alpha| \cdot |g'(\xi)|$$

$$x_{k+1} - \alpha = (x_k - \alpha)\, g'(\xi_k)$$

alpha $\Rightarrow$ g(alpha)

$X_{10} \quad \underbrace{X_{11} \quad X_{12}}_{< 10^{-8}} \quad X_{13}$