Esercizi sul metodo di iterazione funzionale

1. Considerare la funzione $f(x) = 5 + 4\sin(x) - 5x$ (con il seno calcolato in radianti). Dimostrare che f ha uno e un solo zero α nell'intervallo $[1, 2]$.

2. Considerare l'equazione di punto fisso $g(x) = x$, con $g(x) = 1 + \frac{4}{5}\sin(x)$. Dimostrare che $g(\alpha) = \alpha$ se e solo se $f(\alpha) = 0$.

3. Vogliamo dimostrare che il metodo del punto fisso applicato a $g(x)$ con punto di partenza $x_0 = 1$ converge. Sarebbe sufficiente dimostrare che $|g'(x)| < 1$ per $x \in [0, 2]$ per concluderlo? Sarebbe sufficiente dimostrare che $|g'(x)| < 1$ per $x \in [0, 3]$? Per quali valori di x vale davvero la disuguaglianza $|g'(x)| < 1$?

4. Scrivere una `function x=puntofisso(g, x0, k)` che esegue k passi del metodo del punto fisso e restituisce l'approssimazione della soluzione ottenuta.

5. Scrivere una variante `function x=puntofisso2(g, x0, epsilon)` che esegue un numero arbitrario di passi del metodo, fermandosi alla prima iterazione h per cui $|x_h - x_{h-1}| < \varepsilon$.

6. Scrivere una variante `function x=puntofisso3(g, x0, k, epsilon)` che si ferma quando sono state eseguite k iterazioni oppure quando $|x_h - x_{h-1}| < \varepsilon$.

7. I prossimi punti hanno lo scopo di produrre un grafico simile a quello della Figura 1. Questo grafico mostra che le iterate del metodo del punto fisso si possono ottenere tracciando su un grafico linee orizzontali e verticali che vanno alternativamente dal grafico di $g(x)$ al grafico della bisettrice $y = x$ e viceversa. Scrivere una `function itermatrix(g,x0)` che esegue 20 passi del metodo del punto fisso e restituisce la matrice

$$M = \begin{bmatrix} x_0 & x_0 \\ x_0 & x_1 \\ x_1 & x_1 \\ x_1 & x_2 \\ x_2 & x_2 \\ \vdots & \\ x_{19} & x_{20} \\ x_{20} & x_{20} \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{41\times 2}.$$

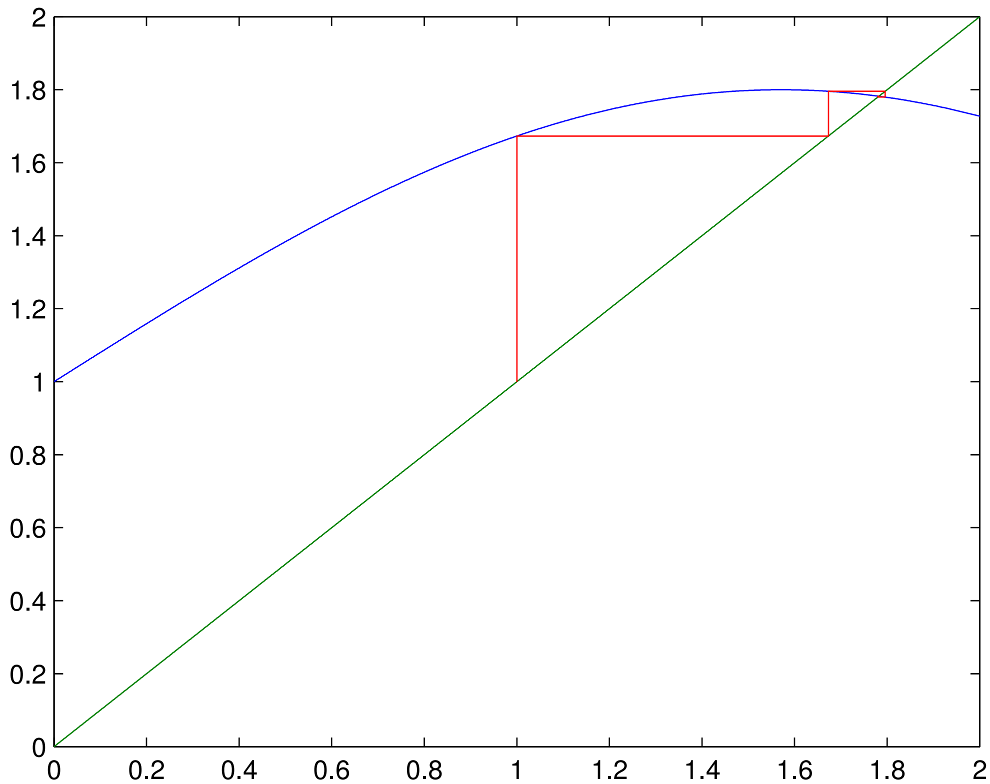

Fig. 1: Grafico che illustra il comportamento dell'iterazione di punto fisso.

8. Scrivere una `function iterplot(g,a,b)` che disegna sullo stesso grafico le funzioni $y = g(x)$, $y = x$ nell'intervallo $[a, b]$, e la spezzata `plot(M(:,1),M(:,2))`, con M restituita dalla funzione del punto precedente e $x_0 = \frac{a+b}{2}$. Applicarla con la $g(x)$ definita sopra su $[0, 2]$.

9. Disegnare lo stesso grafico per questi tre problemi:

   - $g(x) = 3 + 2\sin(x)$ nell'intervallo $[2, 4]$;
   - $g(x) = 1 - \frac{4}{5}\sin(x)$ nell'intervallo $[0, 2]$;
   - $g(x) = -\frac{2}{5} + \frac{4}{5}\sin(x)$ in $[-2, 0]$.

   Notare i diversi comportamenti di convergenza, e cercare di spiegarli sulla base del valore di $g'(x)$ vicino ad α.