$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & 1 \\ 0 & 4 & 1 \end{bmatrix}.$$

A è diagonalizzabile
- su $\mathbb{C}$?
- su $\mathbb{R}$?
- su $\mathbb{Z}_3$?

$$p_A(x) = \det(A - xI) = \det \begin{bmatrix} 1-x & 1 & 0 \\ -1 & -1-x & 1 \\ 0 & 4 & 1-x \end{bmatrix} =$$

$$\begin{bmatrix} + & - & + & \dots \\ - & + & - & \dots \\ + & - & + & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{bmatrix}$$

$$= +(1-x)\det\begin{bmatrix} -1-x & 1 \\ 4 & 1-x \end{bmatrix} - (-1)\det\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 4 & 1-x \end{bmatrix} + 0 \cdot \cancel{\det\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1-x & 1 \end{bmatrix}}$$

segni della regola di Laplace

$$= (1-x)\left[(-1-x)(1-x) - 4\right] + (1-x) = (1-x)\left[x^2 - 1 - 4 + 1\right] =$$

$$= (1-x)(x^2-4) = (1-x)(x-2)(x+2)$$

Radici (in $\mathbb{R}$): $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = 2$, $\lambda_3 = -2$

Per ogni zero del polinomio caratteristico trovo almeno un autovettore

$$\operatorname{Ker} A-\lambda_2 I = \operatorname{Ker}\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & 1 \\ 0 & 4 & 1 \end{bmatrix} - 2I =$$

$$= \operatorname{Ker}\begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 \\ -1 & -3 & 1 \\ 0 & 4 & -1 \end{bmatrix} = \operatorname{Ker}\begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & -4 & 1 \\ 0 & 4 & -1 \end{bmatrix} = \operatorname{Ker}\begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & -4 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$= \operatorname{span}\left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 4 \end{bmatrix} \right\}$$

(... allo stesso modo, posso calcolare $\operatorname{Ker} A-\lambda_1 I$, $\operatorname{Ker} A-\lambda_3 I$)

3 autoval. distinti $\to$ diagonalizzabile (su $\mathbb{R}$)

su $\mathbb{C}$: ogni polinomio si scrive come $c(x-r_1)(x-r_2)\cdots(x-r_n)$

su $\mathbb{R}$: ogni pol. si scrive come $c\cdot\underbrace{(x-r_1)\cdots(x-r_{e_1})}(x^2-a_1x+b_1)\cdots(x^2-a_{e_1}x+b_{e_1})$

$p_A(x)$ si scompone come $-(x-1)(x-2)(x+2)$

sia in $\mathbb{R}$ che in $\mathbb{C}$

- Su tutti gli altri campi $(\mathbb{Q}, \mathbb{Z}_p, \ldots)$

ci sono polinomi di grado alto quanto vi pare che non hanno soluzioni es. $x^{72}-5$ non ha radici in $\mathbb{Q}$

(se avesse radici p/q, allora $q|1$ $p|5$, basta provare $\pm1, \pm5$)

In $\mathbb{Z}_{17}$, $x^{17}-x+1$ non ha sol. perché $x^{17}-x+1 \equiv x-x+1 \equiv 1$

(piccolo teo. Fermat)

In $\mathbb{Z}_3$:

$$P_A(x) = \det \begin{bmatrix} 1-x & 1 & 0 \\ -1 & -1-x & 1 \\ 0 & 4 & 1-x \end{bmatrix} = \det \begin{bmatrix} 1-x & 1 & 0 \\ -1 & -1-x & 1 \\ 0 & 1 & 1-x \end{bmatrix} =$$

$$= (1-x)^2(-1-x) - \cancel{(-1)(1-x)} - \cancel{(1-x)} = (1-x)^2(-1-x)$$

In alternativa:

... stessi conti che su $\mathbb{R}$ (perché in realtà lo uso solo interi)

$$\dots = (1-x)(x-2)(x+2) \overset{\text{mod } 3}{\equiv} (1-x)(x+1)(x-1) = (1-x)^2(-1-x)$$

Due radici 1, una radice -1

La molteplicità geometrica di $\lambda_i = 1$ può essere 1 oppure 2

$$\operatorname{Ker} \left(\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & 1 \\ 0 & 4 & 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \right) = \operatorname{Ker} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} = \operatorname{Ker} \begin{bmatrix} -1 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} =$$

$$= \operatorname{Ker} \begin{bmatrix} -1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \leftarrow \text{dimensione } 1$$

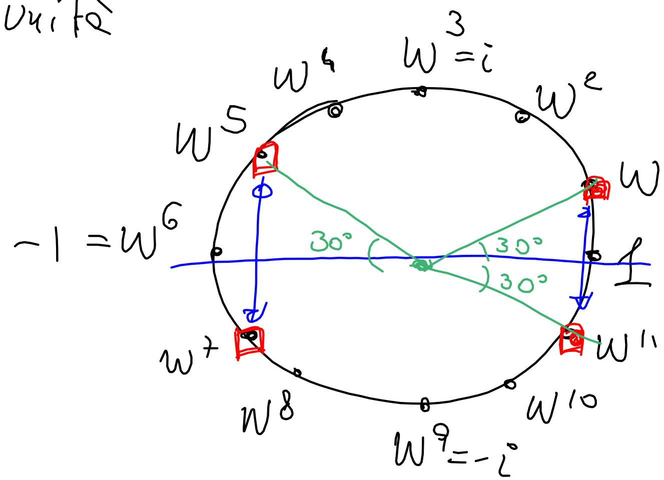
In $\mathbb{Z}_3$:

λ	m.a.	m.g.
1	2	1
-1	1	1

↳ non diagonalizzabile

... se volete, potete calcolare autovettori...

Sia w la radice 12-esima dell'unità data da $w=\cos\frac{2\pi}{12}+i\cdot\sin\frac{2\pi}{12}$



Calcolare
$$(x-w)(x-w^5)(x-w^7)(x-w^{11})$$

Oss: è reale perché $\overline{(x-w)(x-w^5)(x-w^7)(x-w^{11})}=(x-w^{11})(x-w^7)(x-w^5)(x-w)$

Partiamo a moltiplicare $(x-w)(x-w^{11}) =$

$$= x^2 - \underbrace{(w+w^{11})}\,x + \underbrace{w \cdot w^{11}}_{=w^{12}=1} =$$

$$= x^2 - \sqrt{3}\,x + 1$$

$$\overset{30^\circ}{w+w^{11}} = \cos\frac{2\pi}{12} + i\sin\frac{2\pi}{12} + \cos\underbrace{\frac{2\pi}{12}\cdot 11}_{330^\circ} + i\sin\underbrace{\frac{2\pi}{12}\cdot 11}_{330^\circ}$$

$$= 2\cos\frac{2\pi}{12} =$$

$$= 2\cdot\frac{\sqrt{3}}{2} = \sqrt{3}$$

$$(a+ib)+(a-ib) = 2a$$

Ora moltiplico $(x-w^5)(x-w^7) =$

$$= x^2 - \underbrace{(w^5+w^7)} + \underbrace{w^{5+7}}_{=w^{12}=1}$$

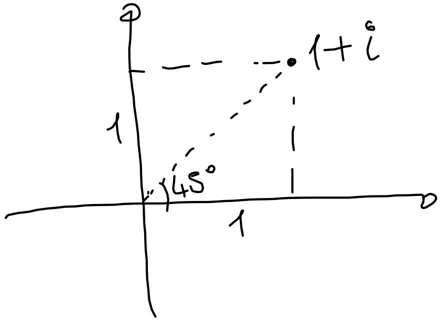
$$= 2 \cdot \text{parte reale di } w^5 = 2\cdot\cos\frac{2\pi}{12}5 = 2\cdot\frac{-\sqrt{3}}{2} = -\sqrt{3}$$

$$\underbrace{(x-w)(x-w^{11})}\underbrace{(x-w^5)(x-w^7)} =$$

$$= (x^2-\sqrt{3}x+1)(x^2+\sqrt{3}x+1) = (x^2+1)^2 - (\sqrt{3}x)^2 = x^4+2x^2+1-3x^2 =$$

$$= \boxed{x^4-x^2+1}$$

▷ Trova le radici quinte di $1+i$



$$1+i = \sqrt{2}\cdot\left(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}\right)$$

$$a+bi = \sqrt{a^2+b^2}\left(\cos\vartheta + i\sin\vartheta\right)$$

Cerco

$$z = r(\cos\vartheta + i\sin\vartheta) \quad \text{tali che}$$

$$1+i = z^5 = \underset{\sqrt{2}}{\underset{\parallel}{r^5}}\left(\cos \underset{\frac{\pi}{4}}{\underset{\parallel}{5\vartheta}} + i\sin \underset{\frac{\pi}{4}}{\underset{\parallel}{5\vartheta}}\right)$$

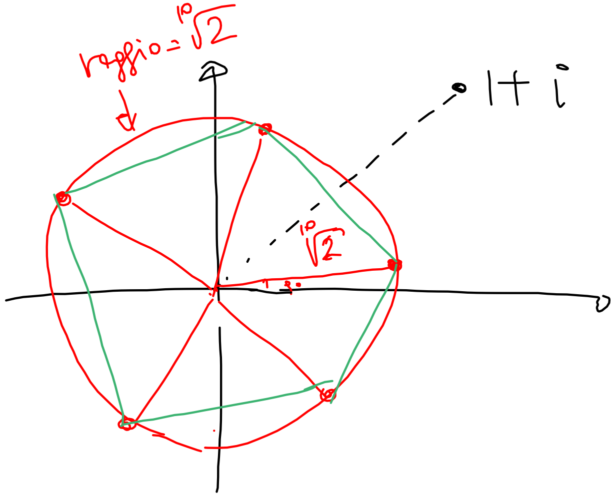
$$r = \sqrt[5]{\sqrt{2}} = \sqrt[10]{2} = 2^{1/10} \qquad 5\vartheta = \frac{\pi}{4} \Rightarrow \vartheta = \frac{\pi}{20}$$

e questa è una radice quinta

Le altre 4 sono date da $\quad \vartheta = \frac{\frac{\pi}{4}+2\pi}{5}, \frac{\frac{\pi}{4}+4\pi}{5}, \frac{\frac{\pi}{4}+6\pi}{5},$

$$\frac{\frac{\pi}{4}+8\pi}{5}$$

$$\left(\underline{\text{OSS}}: \quad \frac{\frac{\pi}{4}+10\pi}{5} = \frac{\pi}{4}+2\pi \right)$$



mag 26-15:15

▷ Trovare una base ortonormale di $V^\perp$, dove

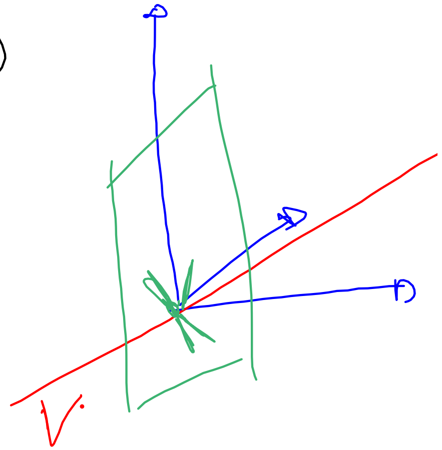
$V = \text{span}\left\{ \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$

Partiamo trovando una base (qualunque) di $V^\perp$

$$V^\perp = \{ w \in \mathbb{R}^3 : v^T w = 0 \text{ per ogni } v \in V \}$$

→ sono i vettori $\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$ tali che

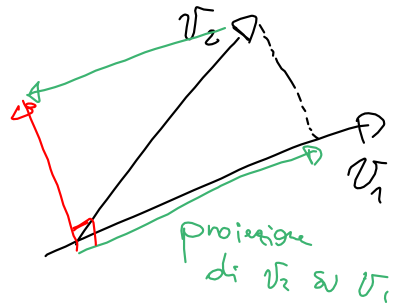
$$\begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = 0$$



Quindi è $V^\perp = \text{Ker} \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \end{bmatrix} = \left\{ \begin{bmatrix} \frac{-x_2 - x_3}{2} \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} : x_2, x_3 \in \mathbb{R} \right\} = \text{span} \left\{ \begin{bmatrix} -1/2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1/2 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$

$$\rightarrow \quad V^{\perp} = \text{Span}\left\{ \underbrace{\begin{bmatrix} -1/2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}}_{v_1}, \underbrace{\begin{bmatrix} -1/2 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}}_{v_2} \right\}$$

$$v_1^T v_2 = \frac{1}{4}$$



Come facciamo a trovare una base <u>ortogonale</u>

$$q_2 = v_2 - \frac{v_2^T v_1}{v_1^T v_1} \cdot v_1 = \begin{bmatrix} -1/2 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} - \frac{1/4}{1/4 + 1 + 0} \begin{bmatrix} -1/2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} -1/2 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} - \frac{1}{5} \begin{bmatrix} -1/2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -4/10 \\ -1/5 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2/5 \\ -1/5 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Possiamo verificare che

$$q_2^T v_1 = 0$$

$$w_1 = \frac{v_1}{\|v_1\|} = \frac{1}{\sqrt{5/4}} \begin{bmatrix} -1/2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1/\sqrt{5} \\ 2/\sqrt{5} \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$w_2 = \frac{q_2}{\|q_2\|} = \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{1}{25} + \frac{4}{25}}} \begin{bmatrix} -2/5 \\ -1/5 \\ 1 \end{bmatrix} = \frac{1}{\sqrt{\frac{30}{25}}} \begin{bmatrix} -2/5 \\ -1/5 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{30}} \cdot \begin{bmatrix} -2 \\ -1 \\ 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2/\sqrt{30} \\ -1/\sqrt{30} \\ 5/\sqrt{30} \end{bmatrix}$$

$$w_1^T w_1 = 1 \qquad w_2^T w_2 = 1$$

$$w_1^T w_2 = 0$$

- Costruire la matrice di proiezione ortogonale su

$$V = \mathrm{span}\left(\begin{bmatrix}0\\1\\1\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix}\right), \quad W = \mathrm{span}\left(\begin{bmatrix}0\\1\\-1\end{bmatrix}\right).$$

Verificare che $P_V + P_W = I$ e che $Q = P_V - P_W$ è ortogonale

$(Q^T Q = I)$

Matrici di proiezione ortogonale: su un sottospazio di dim. 1: span $\{a\}$:

$$\frac{1}{a^T a} a a^T$$

Su un sottospazio con base le colonne $A = [v_1 \; v_2 \cdots v_k]$:

$$A (A^T A)^{-1} A^T$$

mag 26-15:37

$$P_W = \frac{1}{\begin{bmatrix} 0 & 1 & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}} \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & 1 & -1 \end{bmatrix} = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1/2 & -1/2 \\ 0 & -1/2 & 1/2 \end{bmatrix}$$

(potete controllare $P_W^2 = P_W$)

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

$$A^TA = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad (A^TA)^{-1} = \begin{bmatrix} 1/2 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$(A^TA)^T = A^T(A^T)^T = A^TA$$

$$P_V = A\underline{(A^TA)}^{-1}A^T = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1/2 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1/2 & 0 \\ 1/2 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1/2 & 1/2 \\ 0 & 1/2 & 1/2 \end{bmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ 0 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} = I$$

$$Q = P_V - P_W = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$Q^T Q = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} = I$$