LOGICA DEL PRIMO ORDINE: SEMANTICA

Corso di Logica per la Programmazione

LA SEMANTICA DELLA LOGICA DEL PRIMO ORDINE

- Sia fissato un linguaggio ***L*** del primo ordine con alfabeto (***C***, ***F***, ***V***, ***P***).
- Data un'interpretazione **I** = (***D***, α) e una formula φ su ***L***, vogliamo definire in modo formale la **semantica** di φ in **I**, cioè il suo **valore di verità**
- Per far questo, dobbiamo prima dare la **semantica** dei termini che compaiono in φ
  - I termini **chiusi** denotano elementi del dominio
  - Se un termine contiene delle variabili, allora è **aperto**. La sua semantica dipende da un **assegnamento** che associa un elemento del dominio ad ogni variabile.

UN ESEMPIO DI INTERPRETAZIONE

- Il linguaggio **L**
  - $\boldsymbol{C} = \{\mathbf{a}\}$
  - $\boldsymbol{F} = \{\mathbf{f}\}$, con arietà 1
  - $\boldsymbol{P} = \{\mathbf{p}\}$, con arietà 2
- L'interpretazione $\mathbf{I} = (\boldsymbol{D}, \alpha)$
  - $\boldsymbol{D} = \mathbb{N}$, insieme dei numeri naturali
  - $\alpha(\mathbf{a}) = 0$
  - $\alpha(\mathbf{f})$ è la funzione successore: $\alpha(\mathbf{f})(n) = n + 1$
  - $\alpha(\mathbf{p})$ è la relazione di maggiore sui naturali, per esempio

    $\alpha(\mathbf{p})\ (7, 5) \equiv \mathbf{T}$

    $\alpha(\mathbf{p})\ (11, 18) \equiv \mathbf{F}$

SEMANTICA DEI TERMINI CHIUSI

- Ricordiamo la definizione di termine:
  - Ogni costante in ***C*** e ogni variabile in ***V*** è un termine
  - $f \in \boldsymbol{F},\ t_1, \dots, t_n$ sono termini $\Rightarrow f(t_1, \dots, t_n)$ è un termine
- Data un'interpretazione $\mathbf{I} = (\boldsymbol{D}, \alpha)$, la semantica di un termine **chiuso** t (senza variabili) è ottenuta per **induzione strutturale**:
  - (R1) se t è una costante **c** allora $\alpha(t) = \alpha(\mathbf{c})$
  - (R2) se $t = \mathbf{f}(t_1, \dots, t_n)$ e $\alpha(t_1) = d_1, \dots, \alpha(t_n) = d_n$ allora $\alpha(t) = \alpha(\mathbf{f})(d_1, \dots, d_n)$

Esempio (ricordiamo che $\alpha(\mathbf{a}) = 0$, $\alpha(\mathbf{f})(n) = n + 1$):

$\alpha(\mathbf{f}(\mathbf{f}(\mathbf{f}(\mathbf{a}))))$
$= \alpha(\mathbf{f})(\alpha(\mathbf{f}(\mathbf{f}(\mathbf{a}))))$
$= \alpha(\mathbf{f}(\mathbf{f}(\mathbf{a}))) + 1$
$= \alpha(\mathbf{f})(\alpha(\mathbf{f}(\mathbf{a}))) + 1$
$= \alpha(\mathbf{f}(\mathbf{a})) + 1 + 1$
$= \alpha(\mathbf{f})(\alpha(\mathbf{a})) + 2$
$= \alpha(\mathbf{a}) + 1 + 2$
$= 0 + 3$
$= 3$

NB: la semantica di un termine chiuso è un elemento del dominio

ASSEGNAMENTI

- E' possibile dare semantica ad un termine aperto (contenente variabili) rispetto ad un **assegnamento**
- Un assegnamento è una funzione che associa ad ogni variabile in $\boldsymbol{V}$ un elemento del dominio $\boldsymbol{D}$: $\boldsymbol{\rho}: \boldsymbol{V} \rightarrow \boldsymbol{D}$
- Con $\boldsymbol{\rho[d/x]}$ intendiamo l'assegnamento $\boldsymbol{\rho}$ modificato in modo tale che associ alla variabile **x** il valore **d**, ovvero

  $(\rho[d/x])(y) = d$ se $x = y$,

  $(\rho[d/x])(y) = \rho(y)$ altrimenti

- Es. se $\boldsymbol{D} = \mathbb{N}$, $\rho(x) = 0$, $\rho(y) = 3$, $\rho(z) = 1$ e

  $\rho_1 = \rho[15/z]$,

  allora $\rho_1(x) = 0$, $\rho_1(y) = 3$, $\rho_1(z) = 15$

SEMANTICA DEI TERMINI APERTI

- Data un'interpretazione **I** = (***D***,α) e un **assegnamento** **ρ**: ***V*** → ***D***, la semantica di un termine aperto t, in simboli $\alpha_\rho(t)$, è ottenuta con le tre regole:
- (R0) se t è la variabile x allora $\alpha_\rho(t) = \rho(x)$
- (R1) se t è una costante c allora $\alpha_\rho(t) = \alpha(c)$
- (R2) se $t = f(t_1, \ldots, t_n)$ e $\alpha_\rho(t_1) = d_1, \ldots, \alpha_\rho(t_n) = d_n$ allora $\alpha_\rho(t) = (\alpha(f))(d_1, \ldots, d_n)$

- Esempio: considerando l'esempio precedente, se $\rho(x) = 2$, allora $\alpha_\rho(\mathbf{f}(\mathbf{f}(x))) = \rho(x) + 1 + 1 = 4$

SEMANTICA DI FORMULE ATOMICHE

- Definizione: $p \in \boldsymbol{P}$, $t_1, \dots, t_n$ sono termini $\Rightarrow$
  $p(t_1, \dots, t_n)$ è una formula atomica
- Semantica di una formula atomica $\boldsymbol{\varphi}$ nell'intepretazione **I** sotto un assegnamento $\boldsymbol{\rho}$, (in simboli $\mathbf{I}_\rho(\boldsymbol{\varphi})$) per **induzione strutturale**:
- (S1) se $\varphi = p(t_1, \dots, t_n)$ e $\alpha_\rho(t_1) = d_1, \dots, \alpha_\rho(t_n) = d_n$ allora $I_\rho(\varphi) = (\alpha(p))(d_1, \dots, d_n)$
  - caso particolare: il predicato a zero argomenti, ovvero la proposizione: $I_\rho(p) = \alpha(p)$
- (S2) se $\varphi = (P)$ allora $I_\rho(\varphi) = I_\rho(P)$,

  ovvero le parentesi hanno influenza solo sull'ordine di valutazione, ma non sul valore delle formule

SEMANTICA DEI CONNETTIVI LOGICI, PER INDUZIONE STRUTTURALE

- (S3) $I_\rho(\sim P) = \mathbf{T}$ se ...

  $I_\rho(P) = \mathbf{F}$, $\quad$ $I_\rho(\sim P) = \mathbf{F}$ se $I_\rho(P) = \mathbf{T}$
- (S4) $I_\rho(P \wedge Q) = \mathbf{T}$ se ...

  $I_\rho(P) = \mathbf{T}$ e $I_\rho(Q) = \mathbf{T}$, $\quad$ $I_\rho(P \wedge Q) = \mathbf{F}$ altrimenti
- (S5) $I_\rho(P \vee Q) = \mathbf{F}$ se ...

  $I_\rho(P) = \mathbf{F}$ e $I_\rho(Q) = \mathbf{F}$, $\quad$ $I_\rho(P \vee Q) = \mathbf{T}$ altrimenti
- (S6) $I_\rho(P \Rightarrow Q) = \mathbf{F}$ se ...

  $I_\rho(P) = \mathbf{T}$ e $I_\rho(Q) = \mathbf{F}$, $\quad$ $I_\rho(P \Rightarrow Q) = \mathbf{T}$ altrimenti
- (S7) $I_\rho(P \equiv Q) = \mathbf{T}$ se ...

  $I_\rho(P) = I_\rho(Q)$, $\quad$ $I_\rho(P \equiv Q) = \mathbf{F}$ altrimenti

SEMANTICA DEI QUANTIFICATORI

- (S8) $I_\rho((\forall x.P))$ = **T** se ...

  ... $I_{\rho[\mathbf{d}/x]}(P)$ = **T** per qualunque **d** in *D*,

  $I_\rho((\forall x.P))$ = **F** altrimenti

- (S9) $I_\rho((\exists x.P))$ = **T** se ...

  ... $I_{\rho[\mathbf{d}/x]}(P)$ = **T** per almeno un **d** in *D*,

  $I_\rho((\exists x.P))$ = **F** altrimenti

- **Nota**: l'uso dell'assegnamento ρ è necessario perché bisogna far riferimento all'intero dominio *D*: ci possono essere elementi di *D* non denotabili con termini chiusi.
- **Es**: $D = \mathbb{N}$, $\boldsymbol{C} = \{0, 2\}$, $\boldsymbol{F} = \{\_+\_\}$, $\boldsymbol{P} = \{\text{pari}(\_)\}$

  La formula $(\exists x.\, \sim\text{pari}(x))$ è vera, ma non esiste un termine chiuso **t** tale che $\sim\text{pari}(\mathbf{t})$ sia vera

ESEMPIO DI SEMANTICA: VALORE DI VERITA' DI FORMULE

	Dominio	**a**	**b**	**c**	**p(x)**
I_1	città italiane	Milano	Roma	Pontedera	x capoluogo
I_2	{5,10,15}	5	10	15	x multiplo di 5
I_3	numeri naturali	5	10	15	x multiplo di 5

Formula	**Valore in I_1**	**Valore in I_2**	**Valore in I_3**
$p(a)$	T	T	T
$p(b)$	T	T	T
$p(c)$	F	T	T
$p(a) \wedge p(c)$	F	T	T
$(\exists x.p(x))$	T	T	T
$(\forall x.p(x))$	F	T	F
$(\exists x.p(x)) \wedge (\exists y.\sim p(y))$	T	F	T

Esercizio

Mostrare che la formula

$$(\exists x.Q(x) \wedge (\forall y.P(x,y)))$$

è vera nell'interpretazione $I = (D, \alpha)$ dove $D = \{a, b\}$ ed α è definita come segue:

$$\alpha(P)(x,y) = \begin{cases} T & \text{se } x = a \text{ e } y = a \text{ oppure } x = a \text{ e } y = b, \\ F & \text{altrimenti.} \end{cases}$$

$$\alpha(Q)(x) = \begin{cases} T & \text{se } x = a \text{ oppure } x = b, \\ F & \text{altrimenti.} \end{cases}$$

- Soluzione:
  - Usare le regole (S1)-(S9) per induzione strutturale

Esercizio

Calcolare il valore di verità della formula

$$\Phi \equiv (\forall x.P(x) \Rightarrow Q(x) \vee R(x))$$

nell'interpretazione $I = (D, \alpha)$ dove $D = \{a, b, c\}$ e α è definita come segue:

$$\alpha(P)(x) = \begin{cases} T & \text{se } x = a \text{ o } x = b \\ F & \text{se } x = c \end{cases} \qquad \alpha(Q)(x) = \begin{cases} T & \text{se } x = a \text{ o } x = c \\ F & \text{se } x = b \end{cases}$$

$$\alpha(R)(x) = \begin{cases} T & \text{se } x = b \\ F & \text{se } x = a \text{ o } x = c \end{cases}$$

Calcolare cioè il valore di $I_{\rho_0}(\Phi)$ usando le regole della semantica del prim'ordine, dove ρ_0 è un assegnamento arbitrario.