LOGICA PER LA PROGRAMMAZIONE - a.a. 2014-2015
Recupero Secondo Compitino - 16/1/2015 — Soluzioni Proposte

Attenzione: Le soluzioni che seguono sono considerate corrette dai docenti. Per ogni esercizio possono esistere altre soluzioni corrette, anche molto diverse da quelle proposte.

ESERCIZIO 1
Si provi che la seguente formula è valida (A, B, C e D contengono la variabile libera x):

$$\neg(\exists x\,.\,A \vee C) \vee (\forall x\,.\,\neg(D \Rightarrow \neg B)) \;\Rightarrow\; (\forall x\,.\,A \Rightarrow C \vee B)$$

SOLUZIONE ESERCIZIO 1
Per dimostrare la formula partiamo dalla premessa:

$$\begin{array}{ll}
 & \neg(\exists x\,.\,A \vee C) \vee (\forall x\,.\,\neg(D \Rightarrow \neg B)) \\
\equiv & \{\text{De Morgan}\} \\
 & (\forall x\,.\,\neg(A \vee C)) \vee (\forall x\,.\,\neg(D \Rightarrow \neg B)) \\
\Rightarrow & \{(\forall : \vee)\} \\
 & (\forall x\,.\,\neg(A \vee C) \vee \neg(D \Rightarrow \neg B)) \\
\equiv & \{\text{De Morgan}\} \\
 & (\forall x\,.\,(\neg A \wedge \neg C) \vee \neg(D \Rightarrow \neg B)) \\
\equiv & \{\neg :\Rightarrow, \text{ Doppia negazione}\} \\
 & (\forall x\,.\,(\neg A \wedge \neg C) \vee (D \wedge B)) \\
\Rightarrow & \{\text{sempl-}\wedge\text{, 2 volte, occorrenze positive}\} \\
 & (\forall x\,.\,\neg A \vee B) \\
\Rightarrow & \{\text{intro-}\vee\text{, occorrenza positiva}\} \\
 & (\forall x\,.\,\neg A \vee B \vee C) \\
\equiv & \{\text{elim-}\Rightarrow\} \\
 & (\forall x\,.\,A \Rightarrow B \vee C)
\end{array}$$

ESERCIZIO 2
Assumendo **a: array [0, 5) of nat** e **b: array [0, 7) of nat**, si formalizzi il seguente enunciato:

"Ogni elemento dell'array **a** che è strettamente maggiore di un elemento dell'array **b** è anche strettamente minore di un elemento dell'array **b**."

SOLUZIONE ESERCIZIO 2

$$\big(\forall i.i \in [0,5) \wedge (\exists j.j \in [0,7] \wedge a[i] > b[j]) \Rightarrow (\exists k.k \in [0,7] \wedge a[i] < b[k])\big)$$

ESERCIZIO 3
Si consideri il seguente programma annotato (assumendo **a,b: array [0, n) of int**):

```
diff,x := 0,0;
```
$\{\mathsf{Inv} : x \in [0,n] \;\wedge\; \mathit{diff} = \big(\Sigma i : i \in [0,x) \,.\, a[i]\big) - \big(\Sigma j : j \in [0,x) \,.\, b[j]\big)\}\{\text{t: } n - x\}$
```
while (x < n) do
    diff := a[x] + diff - b[x];
    x:= x+1;
endw
```
$\{\mathit{diff} = \big(\Sigma i : i \in [0,n) \,.\, a[i]\big) - \big(\Sigma j : j \in [0,n) \,.\, b[j]\big)\}$

Scrivere e dimostrare l'ipotesi di invarianza.

SOLUZIONE ESERCIZIO 3

Invariante $\mathit{Inv} : x \in [0,n] \;\wedge\; \mathit{diff} = \big(\Sigma i : i \in [0,x) \,.\, a[i]\big) - \big(\Sigma j : j \in [0,x) \,.\, b[j]\big)$
Funzione di terminazione $t : n - x$
Condizione $E : x < n$
Comando C : `diff := a[x] + diff - b[x]; x:= x+1`

L' *Ipotesi di Invarianza* ($\{\mathit{Inv} \wedge E\}\ C\ \{\mathit{Inv} \wedge \mathit{def}(E)\}$) in questo caso è

$\{x \in [0,n] \;\wedge\; \mathit{diff} = \big(\Sigma i : i \in [0,x) \,.\, a[i]\big) - \big(\Sigma j : j \in [0,x) \,.\, b[j]\big) \wedge (x < n)\}$
`diff := a[x] + diff - b[x]; x:= x+1`
$\{x \in [0,n] \;\wedge\; \mathit{diff} = \big(\Sigma i : i \in [0,x) \,.\, a[i]\big) - \big(\Sigma j : j \in [0,x) \,.\, b[j]\big) \;\wedge\; \mathit{def}(x < n)\}$

Applicando la Regola della Sequenza, dobbiamo trovare una asserzione R tali che le seguenti triple siano verificate:

(5.1) $\{x \in [0,n] \wedge \mathit{diff} = \big(\Sigma i : i \in [0,x) \,.\, a[i]\big) - \big(\Sigma j : j \in [0,x) \,.\, b[j]\big) \wedge (x < n)\}$ `diff := a[x] + diff - b[x]` $\{R\}$

(5.2) $\{R\}\ \mathtt{x := x + 1}\ \{x \in [0,n] \;\wedge\; \mathit{diff} = \big(\Sigma i : i \in [0,x) \,.\, a[i]\big) - \big(\Sigma j : j \in [0,x) \,.\, b[j]\big) \;\wedge\; \mathit{def}(x < n)\}$

Per determinare R, usiamo l'Assioma dell'Assegnamento in (5.2) e troviamo

$$
\begin{array}{ll}
 & \mathit{def}(x+1) \wedge (x \in [0,n] \;\wedge\; \mathit{diff} = \big(\Sigma i : i \in [0,x) \,.\, a[i]\big) - \big(\Sigma j : j \in [0,x) \,.\, b[j]\big))[^{x+1}/_{x}] \\
\equiv & \{\text{sostituzione, definizione di def}\} \\
 & x+1 \in [0,n] \;\wedge\; \mathit{diff} = \big(\Sigma i : i \in [0,x+1) \,.\, a[i]\big) - \big(\Sigma j : j \in [0,x+1) \,.\, b[j]\big)
\end{array}
$$

Quindi resta da verificare la tripla (5.1) per il valore di R appena calcolato. Applicando la Regola dell'Assegnamento, dobbiamo verificare che

$$(x \in [0,n] \wedge \mathit{diff} = \big(\Sigma i : i \in [0,x) \,.\, a[i]\big) - \big(\Sigma j : j \in [0,x) \,.\, b[j]\big) \wedge (x < n)) \Rightarrow \mathit{def}(a[x] + \mathit{diff} - b[x]) \wedge R[^{a[x]+\mathit{diff}-b[x]}/_{\mathit{diff}}]$$

Partiamo dalla conseguenza, applicando la sostituzione

$$
\begin{array}{ll}
 & \mathit{def}(a[x] + \mathit{diff} - b[x]) \;\wedge\; R[^{a[x]+\mathit{diff}-b[x]}/_{\mathit{diff}}] \\
\equiv & \{\text{sostituzione}\} \\
 & \mathit{def}(a[x] + \mathit{diff} - b[x]) \;\wedge\; x+1 \in [0,n] \;\wedge\; a[x] + \mathit{diff} - b[x] = \big(\Sigma i : i \in [0,x+1) \,.\, a[i]\big) - \big(\Sigma j : j \in [0,x+1) \,.\, b[j]\big) \\
\equiv & \{\textbf{Ip}\text{: } (x \in [0,n]) \wedge (x < n)\text{, definizione di def}\} \\
 & x \in \mathit{dom}(a) \;\wedge\; x \in \mathit{dom}(b) \;\wedge\; a[x] + \mathit{diff} - b[x] = \big(\Sigma i : i \in [0,x+1) \,.\, a[i]\big) - \big(\Sigma j : j \in [0,x+1) \,.\, b[j]\big) \\
\equiv & \{\textbf{Ip}\text{: } (x \in [0,n]) \wedge (x < n) \wedge \mathit{dom}(a) = \mathit{dom}(b) = [0,n)\} \\
 & a[x] + \mathit{diff} - b[x] = \big(\Sigma i : i \in [0,x+1) \,.\, a[i]\big) - \big(\Sigma j : j \in [0,x+1) \,.\, b[j]\big) \\
\equiv & \{(\text{Intervallo-}\textstyle\sum)\text{, 2 volte}\} \\
 & a[x] + \mathit{diff} - b[x] = (\big(\Sigma i : i \in [0,x) \,.\, a[i]\big) + a[x]) - (\big(\Sigma j : j \in [0,x) \,.\, b[j]\big) + b[x]) \\
\equiv & \{\text{calcolo}\} \\
 & \mathit{diff} = \big(\Sigma i : i \in [0,x) \,.\, a[i]\big) - \big(\Sigma j : j \in [0,x) \,.\, b[j]\big) \\
\equiv & \{\textbf{Ip}\text{: } \mathit{diff} = \big(\Sigma i : i \in [0,x) \,.\, a[i]\big) - \big(\Sigma j : j \in [0,x) \,.\, b[j]\big)\} \\
 & \mathbf{T}
\end{array}
$$

ESERCIZIO 4
Si verifichi la seguente tripla di Hoare (assumendo **a, b: array [0, n) of int**):

$$\{k \in [1, n-1) \ \wedge \ j \in [0, k) \ \wedge \ \big(\forall i \,.\, i \in [0, j) \Rightarrow (a[b[i]] > a[b[i]-1]) \wedge (a[b[i]] > a[b[i]+1])\big)\}$$

```
if (a[k] > a[k-1] and a[k] > a[k+1])
  then b[j] := k; j := j+1
  else skip
fi;
```

$$\{\big(\forall i \,.\, i \in [0, j) \Rightarrow (a[b[i]] > a[b[i]-1]) \wedge (a[b[i]] > a[b[i]+1])\big)\}$$

SOLUZIONE ESERCIZIO 4
Chiamiamo P e Q le seguenti asserzioni,

$$Q = \big(\forall i \,.\, i \in [0, j) \Rightarrow (a[b[i]] > a[b[i]-1]) \wedge (a[b[i]] > a[b[i]+1])\big)$$

$$P = k \in [1, n-1) \ \wedge \ j \in [0, k) \ \wedge \ Q$$

Per dimostrare la tripla data applichiamo la regola del Condizionale e ci riduciamo a dimostrare che

(6.1) $P \Rightarrow def(a[k] > a[k-1] \text{ and } a[k] > a[k+1])$

(6.2) $\{P \ \wedge (a[k] > a[k-1] \wedge \ a[k] > a[k+1]) \ \}$ `b[j] := k; j := j+1` $\{Q\}$

(6.3) $\{P \ \wedge \neg(a[k] > a[k-1] \wedge \ a[k] > a[k+1]) \ \}$ `skip` $\{Q\}$

Per dimostrare (6.1) partiamo dalla conseguenza

$def(a[k] > a[k-1] \text{ and } a[k] > a[k+1])$

$\equiv$ {definizione di def}

$k \in dom(a) \wedge k-1 \in dom(a) \wedge k+1 \in dom(a)$

$\equiv$ {**Ip**: $k \in [1, n-1) \ \wedge \ dom(a) = dom(b) = [0, n)$}

T

Per dimostrare (6.2) applichiamo la regola della sequenza e ci riduciamo a verificare le seguenti triple

(6.2.1) $\{P \ \wedge (a[k] > a[k-1] \wedge \ a[k] > a[k+1]) \ \}$ `b[j] := k` $\{R\}$

(6.2.2) $\{R\}$ `j := j+1` $\{Q\}$

Partiamo da (6.2.2) e determiniamo l'asserzione R applicando l'Assioma dell'assegnamento

$def(j+1) \wedge Q[^{j+1}/_j]$

$\equiv$ {sostituzione, definizione di def}

$\big(\forall i \,.\, i \in [0, j+1) \Rightarrow (a[b[i]] > a[b[i]-1]) \wedge (a[b[i]] > a[b[i]+1])\big)$

Nel caso di (6.2.2) applichiamo l'Assioma dell'Aggiornamento Selettivo, e la regola PRE. Quindi ci riduciamo a verificare che

$$P \ \wedge (a[k] > a[k-1] \wedge \ a[k] > a[k+1]) \Rightarrow def(j) \wedge def(k) \wedge j \in dom(b) \wedge R[^{b'}/_b]$$

dove $b' = b\,[k/j]$.

Partiamo dalla conseguenza

$def(j) \wedge def(k) \wedge j \in dom(b) \wedge R[b'/b]$

$\equiv$ {definizione di def}

$j \in dom(b) \wedge R[b'/b]$

$\equiv$ $\{\mathbf{Ip}\text{: } k \in [1, n-1) \ \wedge \ j \in [0, k) \wedge dom(b) = [0, n) \ \}$

$\big(\forall i \,.\, i \in [0, j+1) \Rightarrow (a[b'[i]] > a[b'[i]-1]) \wedge (a[b'[i]] > a[b'[i]+1])\big)$

$\equiv$ $\{(\text{Intervallo-}\forall)\}$

$\big(\forall i \,.\, i \in [0, j) \Rightarrow (a[b'[i]] > a[b'[i]-1]) \wedge (a[b'[i]] > a[b'[i]+1])\big) \wedge (a[b'[j]] > a[b'[j]-1]) \wedge (a[b'[j]] > a[b'[j]+1])$

$\equiv$ $\{\text{definizione di } b',\ b'[j] = k\}$

$\big(\forall i \,.\, i \in [0, j) \Rightarrow (a[b'[i]] > a[b'[i]-1]) \wedge (a[b'[i]] > a[b'[i]+1])\big) \wedge (a[k] > a[k-1]) \wedge (a[k] > a[k+1])$

$\equiv$ $\{\mathbf{Ip}\text{: } (a[k] > a[k-1] \wedge \ a[k] > a[k+1])\}$

$\big(\forall i \,.\, i \in [0, j) \Rightarrow (a[b'[i]] > a[b'[i]-1]) \wedge (a[b'[i]] > a[b'[i]+1])\big)$

$\equiv$ $\{\text{definizione di } b',\ (\forall i \,.\, i \in [0, j) \Rightarrow i \neq j)\}$

$\big(\forall i \,.\, i \in [0, j) \Rightarrow (a[b[i]] > a[b[i]-1]) \wedge (a[b[i]] > a[b[i]+1])\big)$

$\equiv$ $\big\{\mathbf{Ip}\text{: } \big(\forall i \,.\, i \in [0, j) \Rightarrow (a[b[i]] > a[b[i]-1]) \wedge (a[b[i]] > a[b[i]+1])\big)\big\}$

$\mathbf{T}$

Per dimostrare (6.3) applichiamo la regola del Comando Vuoto e ci riduciamo a verificare la seguente asserzione

$$P \ \wedge \neg(a[k] > a[k-1] \wedge \ a[k] > a[k+1]) \Rightarrow Q$$

Partiamo dalla conseguenza

$\big(\forall i \,.\, i \in [0, j) \Rightarrow (a[b[i]] > a[b[i]-1]) \wedge (a[b[i]] > a[b[i]+1])\big)$

$\equiv$ $\big\{\mathbf{Ip}\text{: } \big(\forall i \,.\, i \in [0, j) \Rightarrow (a[b[i]] > a[b[i]-1]) \wedge (a[b[i]] > a[b[i]+1])\big) \ \big\}$

$\mathbf{T}$