Logica per la Programmazione - 22-10-2013
Esercizi proposti con alcune soluzioni

Si forniscono le soluzioni solo di alcuni degli esercizi proposti. Per gli altri, provare a risolverli e in caso di dubbi rivolgersi al docente.

a) Si formalizzino i seguenti enunciati dichiarativi:

1) "Angelo viene alla festa, ma Bruno no"

   Soluzione: Introduciamo le varibili proposizionali **A** per "Angelo viene alla festa" e **B** per "Bruno viene alla festa". Allora la formula proposizionale che formalizza l'enunciato **A ∧ ~B**

2) "Carlo viene alla festa solo se viene Davide, ma in questo caso Bruno non viene"
3) "Carlo viene alla festa se non vengono né Bruno né Angelo, o se viene Davide"
4) "Affinché Angelo venga alla festa, bisogna che se non viene Bruno, allora venga Carlo"

Soluzione: oltre alla variabili proposizionali del punto 1), introduciamo **C** per "Carlo viene alla festa". Allora una formula che formalizza l'enunciato è: **A ⇒ (~B ⇒ C)**.
Si noti la direzione dell'implicazione: "bisogna che" indica che **(~B ⇒ C)** è una condizione necessaria affinché **A** sia vero, cioè se vale **A** deve necessariamente valere **(~B ⇒ C)**.

b) Come compare P nelle seguenti proposizioni? Positivamente o negativamente?

1) $\sim P \Rightarrow R$
2) $\sim(P \Rightarrow R) \Rightarrow ((Q \wedge R) \Rightarrow S)$

Soluzione: la P occorre negativamente. Infatti contiamo le occorrenze negative a partire da P fino alla radice della formula: P compare negativamente in $(P \Rightarrow R)$ [1], che compare negativamente in $\sim(P \Rightarrow R)$ [2], che compare negativamente nell'intera formula [3] perché premessa dell'implicazione. Poiché abbiamo contato un numero dispari di occorrenze negative, P occorre negativamente.

3) $((P \vee Q) \Rightarrow R) \wedge (Q \Rightarrow P)$

Soluzione: prima occorrenza negativa, seconda occorrenza positiva. Attenzione: occorre dare una risposta separata per ogni occorrenza.

4) $(P \Rightarrow Q) \wedge (R \Rightarrow S) \Rightarrow \sim(P \wedge R \Rightarrow Q \wedge S)$

c) Mostrare che le seguenti formule non sono tautologie:

1) $P \Rightarrow (P \wedge Q)$
2) $(Q \wedge R) \vee (Q \wedge \sim P) \vee (Q \Rightarrow R)$
3) $(P \Rightarrow Q) \vee (P \Rightarrow (\sim Q \Rightarrow R))$

Soluzione: L'interpretazione $\{P \rightarrow T, Q \rightarrow F, R \rightarrow F\}$ rende la formula falsa. Per giustificare questa affermazione, la seguente tabella mostra come viene valutata la fomula con questa interpretazione (come visto a lezione):

P	Q	R	(P	$\Rightarrow$	Q)	$\vee$	(P	$\Rightarrow$	(~	Q	$\Rightarrow$	R))
T	F	F	T	F	F	**F**	T	F	T	F	F	F
			[1]	[2]	[1]	**[5]**	[1]	[4]	[2]	[1]	[3]	[1]

4) $((\sim Q \Rightarrow P) \vee (Q \Rightarrow (\sim P \wedge \sim Q))) \Rightarrow R$

d) Si provi che le seguenti formule proposizionali sono tautologie:

1) $\sim P \wedge (P \vee Q) \Rightarrow Q$

2) $(P \wedge Q) \wedge (\sim Q \Rightarrow R) \Rightarrow (P \vee R)$

3) $((P \Rightarrow Q) \vee (R \Rightarrow S)) \equiv ((P \Rightarrow S) \vee (R \Rightarrow Q))$

Soluzione
Partiamo dal membro sinistro dell'equivalenza e riduciamolo al secondo:

$(P \Rightarrow Q) \vee (R \Rightarrow S)$
$\equiv$ { (Elim-$\Rightarrow$), due volte }
$(\sim P \vee Q) \vee (\sim R \vee S)$
$\equiv$ { (Commutatività) e (Associatività) }
$(\sim P \vee S) \vee (\sim R \vee Q)$
$\equiv$ { (Elim-$\Rightarrow$) al contrario, due volte }
$(P \Rightarrow S) \vee (R \Rightarrow Q)$

4) $((P \Rightarrow Q) \Rightarrow P) \Rightarrow P$

5) $(P \Rightarrow Q \wedge R) \wedge (\sim R \vee \sim S \vee \sim Q) \Rightarrow \sim(S \wedge P)$

Soluzione
Vediamo una dimostrazione in cui usiamo ipotesi non tautologiche: mostriamo che $\sim(S \wedge P)$ è vera usando le due premesse come giustificazioni.

$\sim(S \wedge P)$
$\Leftarrow$ { **Ip:** $(P \Rightarrow Q \wedge R)$, P occorre <u>negativamente</u> }
$\sim(S \wedge Q \wedge R)$
$\equiv$ {(De Morgan)}
$\sim S \vee \sim Q \vee \sim R$
$\equiv$ { **Ip:** $(\sim R \vee \sim S \vee \sim Q)$ }
T

Con questo abbiamo dimostrato $(P \Rightarrow Q \wedge R) \wedge (\sim R \vee \sim S \vee \sim Q) \Rightarrow (T \Rightarrow \sim(S \wedge P))$
Si conclude osservando che $(T \Rightarrow P) \equiv P$ per qualunque P, e quindi nell'ultima formula possiamo rimpiazzare $T \Rightarrow \sim(S \wedge P)$ con $\sim(S \wedge P)$.

6) $((P \vee Q) \Rightarrow (R \wedge S)) \Rightarrow ((P \Rightarrow S) \vee (Q \Rightarrow R))$

7) $((P \Rightarrow Q) \vee (R \Rightarrow S)) \equiv ((P \Rightarrow S) \vee (R \Rightarrow Q))$

e) Usando come ipotesi $(P \wedge Q) \Rightarrow R$ e $R \Rightarrow S$, dimostrare per casi su Q che vale $(P \Rightarrow \sim Q \vee S)$

Soluzione

Dimostriamo $(P \Rightarrow \sim Q \vee S)$ nei due casi in cui Q è rispettivamente vera e falsa.

(1) Caso Q (o equivalentemente $Q \equiv T$)

Poiché Q è vera, la formula da dimostrare diventa

$$
\begin{array}{lll}
 & P \Rightarrow \sim Q \vee S & \\
\equiv & & \{ \textbf{Ip:}\ Q \} \\
 & P \Rightarrow \sim T \vee S & \\
\equiv & & \{ (T:F), \text{unità} \} \\
 & P \Rightarrow S &
\end{array}
$$

mentre la prima ipotesi diventa

$$
\begin{array}{lll}
 & P \wedge Q \Rightarrow R & \\
\equiv & & \{ \textbf{Ip:}\ Q \} \\
 & P \wedge T \Rightarrow R & \\
\equiv & & \{ \text{unità} \} \\
 & P \Rightarrow R &
\end{array}
$$

Quindi ci rimane da dimostrare $P \Rightarrow S$ usando come ipotesi $P \Rightarrow R$ e $R \Rightarrow S$, nel modo seguente:

$$
\begin{array}{lll}
 & P & \\
\Rightarrow & & \{ \textbf{Ip:}\ P \Rightarrow R \} \\
 & R & \\
\Rightarrow & & \{ \textbf{Ip:}\ R \Rightarrow S \} \\
 & S &
\end{array}
$$

(2) Caso ~Q (o equivalentemente $Q \equiv F$)

Sostituendo F al posto di Q, la formula da dimostrare diventa:

$$
\begin{array}{lll}
 & P \Rightarrow \sim Q \vee S & \\
\equiv & & \{ \textbf{Ip:}\ \sim Q \} \\
 & P \Rightarrow T \vee S & \\
\equiv & & \{ \text{zero} \} \\
 & P \Rightarrow T & \\
\equiv & & \{ \text{zero} \} \\
 & T &
\end{array}
$$

Quindi la formula è vera senza bisogno di usare le ipotesi.

f) Dimostrare per casi su P che la seguente formula è una tautologia $(P \wedge Q \equiv P \wedge R) \equiv (P \Rightarrow (Q \equiv R))$