

Alcuni esercizi sugli NFA (3)

- Definire sull'alfabeto $\Sigma = \{a, b, \dots, z\}$ un automa a stati finiti non deterministici (NFA) che riconosca tutte le stringhe che contengono la **sottosstringa** *war*. Ad esempio *aware* e *warrior* appartengono al linguaggio, mentre *wear* no.
- Dimostrare che l'NFA definito effettivamente riconosca il linguaggio
- Utilizzando la tecnica di costruzione per sottoinsiemi, produrre l'equivalente automa a stati finiti deterministici (DFA).

Alcuni esercizi sugli NFA (3) (soluz.)

		<i>w</i>	<i>a</i>	<i>r</i>	Σ'
$\rightarrow \star$	q_0	q_1	$\emptyset$	$\emptyset$	q_0
	q_1	$\emptyset$	q_2	$\emptyset$	$\emptyset$
	q_2	$\emptyset$	$\emptyset$	q_3	$\emptyset$
$\star$	q_3	q_3	q_3	q_3	q_3

con $\Sigma' = \Sigma - \{a, r, w\}$

NFA per riconoscere numeri decimali

Vogliamo un NFA che accetta numeri decimali. Un numero decimale consiste di:

- 1 Un segno $+$ o $-$, **opzionale**
- 2 Una stringa di cifre decimali
- 3 un punto decimale
- 4 un'altra stringa di cifre decimali

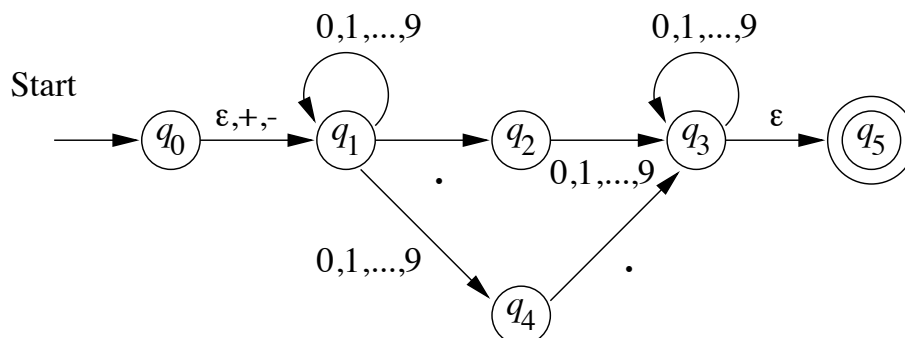
Una delle stringhe (2) e (4), ma non entrambi, può essere vuota.
Cosa succede se non compare il segno?

NFA per riconoscere numeri decimali

Vogliamo un NFA che accetta numeri decimali consiste di:

- 1 Un segno $+$ o $-$, **opzionale**
- 2 Una stringa di cifre decimali
- 3 un punto decimale
- 4 un'altra stringa di cifre decimali

Una delle stringhe (2) e (4), ma non entrambi, può essere vuota.
Cosa succede se non compare il segno? Uso un ϵ -NFA.



Definizione ed esempio

Un ϵ -NFA è una quintupla $(Q, \Sigma, \delta, q_0, F)$ dove δ è una funzione da $Q \times \Sigma \cup \{\epsilon\}$ all'insieme dei sottoinsiemi di Q .

Esempio: L' ϵ -NFA della pagina precedente

$$E = (\{q_0, q_1, \dots, q_5\}, \{., +, -, 0, 1, \dots, 9\}, \delta, q_0, \{q_5\})$$

dove la tabella delle transizioni per δ è

	ϵ	$+, -$	$.$	$0, \dots, 9$
$\rightarrow q_0$	$\{q_1\}$	$\{q_1\}$	$\emptyset$	$\emptyset$
q_1	$\emptyset$	$\emptyset$	$\{q_2\}$	$\{q_1, q_4\}$
q_2	$\emptyset$	$\emptyset$	$\emptyset$	$\{q_3\}$
q_3	$\{q_5\}$	$\emptyset$	$\emptyset$	$\{q_3\}$
q_4	$\emptyset$	$\emptyset$	$\{q_3\}$	$\emptyset$
$\star q_5$	$\emptyset$	$\emptyset$	$\emptyset$	$\emptyset$

Epsilon-chiusura

Chiudiamo uno stato aggiungendo tutti gli stati raggiungibili da lui tramite una sequenza $\epsilon\epsilon\cdots\epsilon$

Definizione induttiva di $\text{ECLOSE}(q)$

Base:

$$q \in \text{ECLOSE}(q)$$

Induzione:

$$p \in \text{ECLOSE}(q) \text{ and } r \in \delta(p, \epsilon) \Rightarrow r \in \text{ECLOSE}(q)$$

Nell'esempio di prima ogni stato coincide con la propria

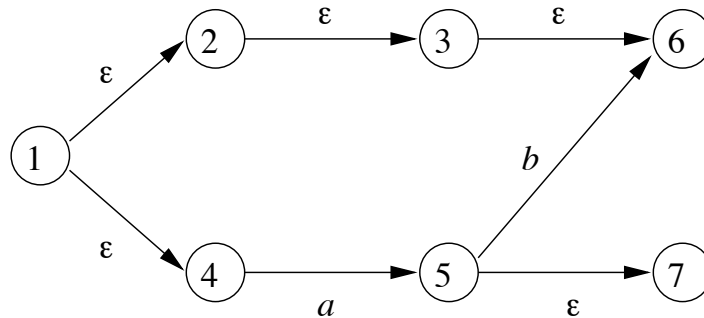
epsilon-chiusura, tranne $\text{ECLOSE}(q_0) = \{q_0, q_1\}$ e

$\text{ECLOSE}(q_3) = \{q_3, q_5\}$ che corrispondono alle due ϵ -transizioni.

La stessa operazione si può applicare ad un insieme di stati:

$$\text{ECLOSE}(S) = \bigcup_{q \in S} \text{ECLOSE}(q)$$

Esempio di epsilon-chiusura



Per esempio,

$$\text{ECLOSE}(1) = \{1, 2, 3, 4, 6\}$$

Ognuno di questi stati può essere raggiunto a partire da 1 attraverso ϵ -transizioni.

- Definizione induttiva di $\hat{\delta}$ per automi ϵ -NFA

Base:

$$\hat{\delta}(q, \epsilon) = \text{ECLOSE}(q)$$

Induzione: $a \neq \epsilon$

Se

- $\hat{\delta}(q, x) = \{p_1, \dots, p_k\};$
- $\bigcup_{p_i \in \hat{\delta}(q, x)} \delta(p_i, a) = \{r_1, \dots, r_m\}$

$$\hat{\delta}(q, xa) = \text{ECLOSE}\left(\bigcup_{p_i \in \hat{\delta}(q, x)} \delta(p_i, a)\right) = \text{ECLOSE}\{r_1, \dots, r_m\}$$

Calcoliamo

$\hat{\delta}(q_0, 5.6)$ per l'NFA dei numeri decimali

Il linguaggio di un ϵ -NFA E è dato da:

$$L(E) = \{w \mid \delta(q_0, w) \cap F_E \neq \emptyset\}$$

Da ϵ -NFA a DFA

Dato un ϵ -NFA

$$E = (Q_E, \Sigma, \delta_E, q_0, F_E)$$

costruiremo un DFA

$$D = (Q_D, \Sigma, \delta_D, q_D, F_D)$$

tale che

$$L(D) = L(E)$$

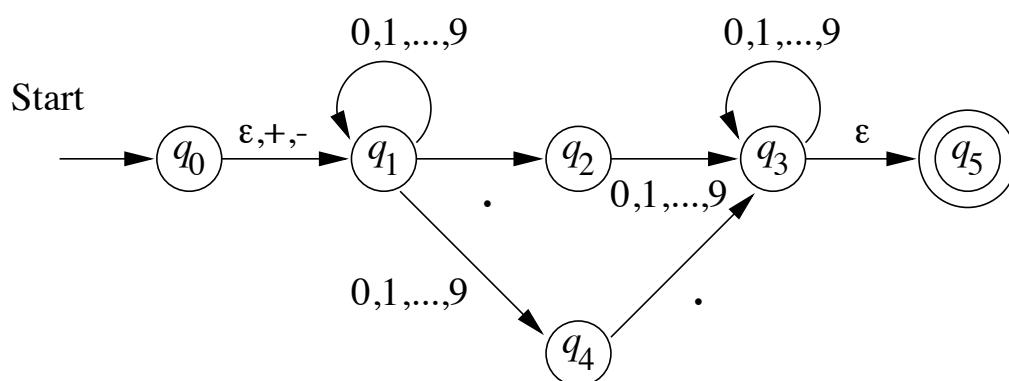
Dettagli della costruzione:

- $Q_D = \{S : S \subseteq Q_E \text{ e } S = \text{ECLOSE}(S)\}$
- $q_D = \text{ECLOSE}(q_0)$
- $F_D = \{S \in Q_D \text{ e } S \cap F_E \neq \emptyset\}$
- $\delta_D(S, a) = \bigcup \{\text{ECLOSE}(p) : p \in \delta(t, a) \text{ per alcuni } t \in S\}$

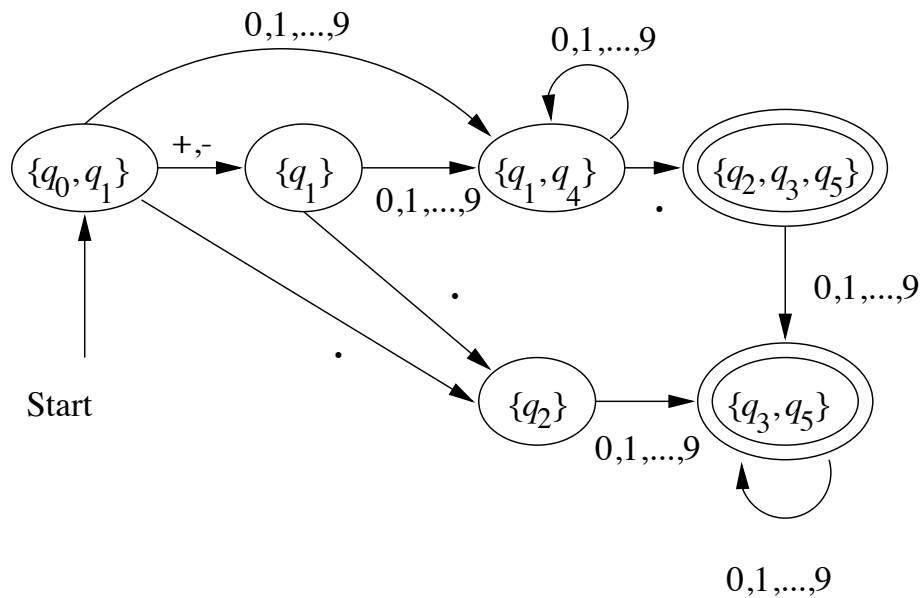
$$\bigcup \{\text{ECLOSE}(p) : p \in \delta(t, a) \text{ per alcuni } t \in S\}$$

Esempio

ϵ -NFA E



DFA D corrispondente ad E



Teorema 2.22: Un linguaggio L è accettato da un ϵ -NFA E se e solo se L è accettato da un DFA.

Dimostrazione: Usiamo D costruito come sopra e mostriamo per induzione che $\hat{\delta}_E(q_0, w) = \hat{\delta}_D(q_D, w)$

Base: $\hat{\delta}_E(q_0, \epsilon) = \text{ECLOSE}(q_0) = q_D = \hat{\delta}_D(q_D, \epsilon)$

Induzione: $a \neq \epsilon$ Sia $w = xa$ con l'ipotesi valida per x , ovvero $\hat{\delta}_E(q_0, x) = \hat{\delta}_D(q_0, x) = \{p_1, \dots, p_k\}$. Per la definizione di $\hat{\delta}_E$, $\hat{\delta}_E(q_0, w)$ si calcola come segue:

- sia $\bigcup_{p_i \in \hat{\delta}_E(q_0, x)} \delta(p_i, a) = \{r_1, \dots, r_m\}$,
- allora

$$\hat{\delta}_E(q, xa) = \text{ECLOSE}\left(\bigcup_{p_i \in \hat{\delta}(q, x)} \delta(p_i, a)\right) = \text{ECLOSE}\{r_1, \dots, r_m\}$$

Esercizi sugli automi

- Definire un DFA (con $\Sigma = \{a, b, c, \dots, z\}$) che accetti tutte le stringhe in cui le cinque vocali appaiono nell'ordine *a e i o u*
- Dimostrare che $\hat{\delta}(q, xy) = \hat{\delta}(\hat{\delta}(q, x), y)$ per qualunque stato q e qualunque coppia di stringhe x e y .
Si consiglia di usare l'induzione sulla lunghezza della stringa y .
- Dimostrare che $\hat{\delta}(q, ax) = \hat{\delta}(\delta(q, a), x)$ per qualunque stato q , qualunque simbolo a e qualunque stringa x .
Si consiglia di usare l'esercizio precedente.
- Definire un NFA che accetti sull'alfabeto $\Sigma = \{a, b\}$, il seguente insieme di stringhe: *abab*, *bab* e *abb*. Convertire quindi l'NFA ottenuto nel DFA corrispondente
- Definire un ϵ -NFA che riconosca le stringhe composte da zero o più *a*, seguite da zero o più *b*, seguite da zero o più *c*.