PROIEZIONE SU CONVESSO

Siano $C \subseteq \mathbb{R}^n$ convesso e chiuso, $y \in \mathbb{R}^n$.

Pb proiezione: distanza di y da C

$$\inf \{ \|y-x\| \mid x \in C \} \equiv \inf \{ \tfrac{1}{2} \|y-x\|^2 \mid x \in C \} \qquad (P_C)$$

$f(x) = \frac{1}{2}\|y-x\|^2 = \frac{1}{2}\langle x,x\rangle - \langle y,x\rangle + \frac{1}{2}\langle y,y\rangle$ fz. quadratica

$\nabla f(x) = x-y$, $\nabla^2 f(x) = I \leftarrow$ def. positiva $\Rightarrow f$ è fortemente convessa, quindi il minimo di (P_C) esiste ed è unico, da cui è ben definita

$$P_C(y) = \operatorname{argmin} \{ \|y-x\| \mid x \in C \} \quad \text{proiezione di } y \text{ su } C$$

(dim alternativa per l'esistenza: fissato $\hat{x} \in C$ risulta

$$\inf \{ \|y-x\| \mid x \in C \} = \inf \{ \|y-x\| \mid x \in C \cap B(y, \|y-\hat{x}\|) \}$$

da cui l'esistenza del minimo è garantita dal teo (Weierstrass))

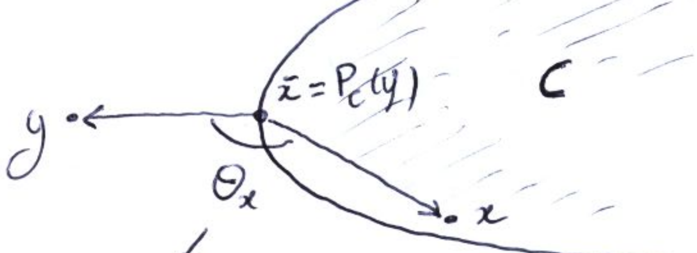
Caratterizzazione della proiezione

Utilizzando le condizioni nec. e suff. di ottimalità per il caso convesso:

$$\bar{x} = P_C(y) \iff \langle \nabla f(\bar{x}), x-\bar{x} \rangle \geq 0 \quad \forall x \in C$$

$$\iff \langle y-\bar{x}, x-\bar{x} \rangle \leq 0 \quad \forall x \in C$$

Interpretazione geometrica



$$\boxed{\theta_x > \pi/2}$$

È possibile dimostrare direttamente la caratterizzazione senza ricorrere alle condizioni di ottimalità dei pb. convessi.

$\Rightarrow$) $x \in C,\ \lambda \in [0,1]$: $\quad \bar{x} + \lambda(x-\bar{x}) = \lambda x + (1-\lambda)\bar{x} \in C$ ($\leftarrow$ C convesso)

$\bar{x}$ p.to di minimo:

$$\|y-\bar{x}\|^2 \le \|y-(\bar{x}+\lambda(x-\bar{x}))\|^2 = \|y-\bar{x}-\lambda(x-\bar{x})\|^2 =$$
$$= \|y-\bar{x}\|^2 + \lambda^2\|x-\bar{x}\|^2 - 2\lambda <y-\bar{x}, x-\bar{x}>$$

quindi: $\quad 2\lambda <y-\bar{x}, x-\bar{x}> \le \lambda^2 \|x-\bar{x}\|^2$

$$<y-\bar{x}, x-\bar{x}> \le \frac{\lambda}{2}\|x-\bar{x}\|^2 \longrightarrow 0 \text{ se } \lambda \downarrow 0.$$

$\Leftarrow$) $x \in C$: $\quad \|y-x\|^2 = \|y-\bar{x}+\bar{x}-x\|^2 =$

$$= \|y-\bar{x}\|^2 + \underbrace{\|\bar{x}-x\|^2}_{\ge 0} + 2\underbrace{<y-\bar{x}, \bar{x}-x>}_{\ge 0}$$
$$\ge \|y-\bar{x}\|^2 \quad \rightarrow \quad \bar{x} \in \operatorname{argmin}\{\|y-x\| : x \in C\} \qquad \square$$

Dalla caratterizzazione $\bar{x} \in \operatorname{argmin}\{\|y-x\| : x \in C\} \Leftrightarrow <y-\bar{x}, x-\bar{x}> \le 0 \quad \forall x \in C$ segue (senza necessità di sfruttare la forte convessità) l'unicità della proiezione:

Siano $\bar{x}, \tilde{x} \in \operatorname{argmin}\{\|y-x\| : x \in C\}$:

$$\begin{array}{ll} <y-\bar{x}, \tilde{x}-\bar{x}> \le 0 & (x=\tilde{x}) \\ <y-\tilde{x}, \bar{x}-\tilde{x}> \le 0 & (x=\bar{x}) \end{array} \xrightarrow{\text{somma}} <y-\bar{x}+\tilde{x}-y, \tilde{x}-\bar{x}> \le 0$$

$$<y-\bar{x}+\tilde{x}-y, \tilde{x}-\bar{x}> = <\tilde{x}-\bar{x}, \tilde{x}-\bar{x}> = \|\tilde{x}-\bar{x}\|^2$$

$$\tilde{x} = \bar{x} \leftarrow \|\tilde{x}-\bar{x}\|^2 \le 0 \leftarrow \|\tilde{x}-\bar{x}\|^2$$

TEOREMI DI SEPARAZIONE

Teo (separazione stretta) Sia $C \subseteq \mathbb{R}^n$ convesso e chiuso.

$$y \notin C \Rightarrow \exists z^* \in \mathbb{R}^n, \gamma \in \mathbb{R} \text{ t.c. } \langle z^*, x \rangle \leq \gamma < \langle z^*, y \rangle \quad \forall x \in C.$$

dim Sia $\bar{x} = P_C(y)$: $\bar{x} \neq y$ poiche' $y \notin C$ e $\bar{x} \in C$

La caratterizzazione della proiezione garantisce $\langle y - \bar{x}, x - \bar{x} \rangle \leq 0 \quad \forall x \in C$

Siano $z^* = y - \bar{x}$ e $\gamma = \langle z^*, \bar{x} \rangle$ (nota: $z^* \neq 0$). Risultano:

$$\langle z^*, x \rangle \leq \langle z^*, \bar{x} \rangle = \gamma \quad \forall x \in C$$

$$\langle z^*, y \rangle - \gamma = \langle z^*, y - \bar{x} \rangle = \langle y - \bar{x}, y - \bar{x} \rangle = \| y - \bar{x} \|^2 > 0$$ ■

Teo Sia $C \subseteq \mathbb{R}^n$ convesso.

$$y \notin \text{int } C \Rightarrow \exists z^* \in \mathbb{R}^n, z^* \neq 0 \text{ t.c. } \langle z^*, x \rangle \leq \langle z^*, y \rangle \quad \forall x \in C.$$

dim Se $y \notin cl(C)$, basta applicare teo (sep. stretta) a $cl(C)$ e y.

Sia $y \in cl(C)$: $y \notin \text{int } C \Rightarrow \exists y^k$ t.c. $y^k \notin cl(C)$ e $y^k \to y$

Per teo (sep. stretta) $\exists \hat{z}^k \in \mathbb{R}^n, z^k \neq 0$ t.c. $\langle \hat{z}^k, x \rangle < \langle \hat{z}^k, y^k \rangle \quad \forall x \in C$

Sia $z^k = \hat{z}^k / \|\hat{z}^k\|$: possiamo supporre $z^k \to z^*$ con $\|z^*\| = 1$.

Passando al limite nelle disuguaglianze $\langle z^k, x \rangle < \langle z^k, y^k \rangle$ si ottiene

$$\langle z^*, x \rangle \leq \langle z^*, y \rangle \quad \forall x \in C$$ ■

($y \in \partial C \Rightarrow$ il teo afferma che $\langle z^*, x \rangle = \langle z^*, y \rangle$ è un iperpiano di supporto a C in y)

Teo (separazione) Siano $C_1, C_2 \subseteq \mathbb{R}^n$ convessi.

$$C_1 \cap C_2 = \emptyset \Rightarrow \exists z^* \in \mathbb{R}^n, z^* \neq 0 \text{ t.c. } \langle z^*, x_1 \rangle \leq \langle z^*, x_2 \rangle \quad \forall x_1 \in C_1, \forall x_2 \in C_2$$

dim $C_1 \cap C_2 = \emptyset \Rightarrow 0 \notin \underbrace{C_1 - C_2}_{\text{convesso}}$ pertanto basta applicare il teo precedente ■

TEOREMI DI ALTERNATIVA

Teo (Motzkin 1936) Siano $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$, $B \in \mathbb{R}^{p\times n}$, $C \in \mathbb{R}^{q\times n}$ con $A \neq 0$, e si consideri il sistema

$$(S_1) \begin{cases} Ad < 0 \\ Bd \leq 0 \\ Cd = 0 . \end{cases}$$

Allora, (S_1) non ha alcuna soluzione $d \in \mathbb{R}^n$ $\Leftrightarrow$ $\exists\, \theta \in \mathbb{R}^m_+, \lambda \in \mathbb{R}^p_+, \mu \in \mathbb{R}^q$ con $\theta \neq 0$ t.c.

$$A^T\theta + B^T\lambda + C^T\mu = 0 \qquad (S_2)$$

dim $\Leftarrow$) Sia per assurdo $d \in \mathbb{R}^n$ una soluzione di (S_1):

$$0 = \langle A^T\theta + B^T\lambda + C^T\mu, d \rangle = \langle \theta, Ad \rangle + \langle \lambda, Bd \rangle + \langle \mu, Cd \rangle =$$
$$= \langle \theta, Ad \rangle + \langle \underbrace{\lambda}_{\geq 0}, \underbrace{Bd}_{\leq 0} \rangle \leq \langle \theta, Ad \rangle < 0$$

$\Rightarrow$) Siano $P = \{ (\theta, \lambda, \mu) \in \mathbb{R}^m_+ \times \mathbb{R}^p_+ \times \mathbb{R}^q \mid \sum_{i=1}^m \theta_i = 1 \}$ e

$$D = \{ A^T\theta + B^T\lambda + C^T\mu \mid (\theta, \lambda, \mu) \in P \}.$$

Poiché P è un poliedro, anche D è un poliedro in quanto ottenuto da P tramite una trasformazione lineare. In particolare, D risulta essere chiuso e convesso.

Per assurdo sia $0 \notin D$. Per il teo (separazione stretta) esiste $d \in \mathbb{R}^n$ t.c.

$$(*) \quad \langle A^T\theta + B^T\lambda + C^T\mu, d \rangle < 0 \quad \forall \theta \in \mathbb{R}^m_+, \lambda \in \mathbb{R}^p_+, \mu \in \mathbb{R}^q \text{ con } \sum_{i=1}^m \theta_i = 1.$$

Poiché la disuguaglianza è omogenea, vale in realtà per ogni $\theta \in \mathbb{R}^m_+$ con $\theta \neq 0$.

Siano A_k, B_i, C_j le righe delle matrici A, B, C ($k = 1 \dots m$, $i = 1 \dots p$, $j = 1 \dots q$).

$(*)$ con $\theta = e_k$, $\lambda = \mu = 0$ diventa $A_k d < 0$ da cui $Ad < 0$.

$(*)$ con $\theta = \varepsilon e_1$, $\varepsilon > 0$, $\lambda = e_i$, $\mu = 0$ diventa $\varepsilon A_1 d + B_i d < 0$, da cui

$$B_i d < -\varepsilon A_1 d \xrightarrow[\varepsilon \to 0]{} 0 \text{ e quindi } B_i d \leq 0 \text{ e } Bd \leq 0.$$

$(*)$ con $\theta = \varepsilon e_1$, $\varepsilon > 0$, $\lambda = 0$, $\mu = \pm e_j$ garantiscono analogamente al caso precedente

$$Cd \leq 0 \text{ e } Cd \geq 0 \text{ da cui } Cd = 0.$$

Pertanto d risolve (S_1) in contraddizione con l'ipotesi ■

<u>Nota</u> (S_1) può essere riscritto nella forma

$$\begin{cases} \langle A_k, d \rangle < 0 & k = 1 \dots m \\ \langle B_i, d \rangle \leq 0 & i = 1 \dots p \\ \langle C_j, d \rangle = 0 & j = 1 \dots q \end{cases}$$

mentre (S_2) nella forma $\sum_{k=1}^{m} \theta_k A_k + \sum_{i=1}^{p} \lambda_i B_i + \sum_{j=1}^{q} \mu_j C_j = 0$.

<u>Teo</u> (Motzkin) con $m = 1$ e $C \equiv 0$ $\equiv$ Lemma Farkas (1902)

<u>Teo</u> (Motzkin) con $B = 0$, $C = 0$ $\equiv$ Teorema Gordan (1873)