$X = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \underset{i=1\dots p}{g_i(x) \le 0}, \ \underset{j=1\dots q}{h_j(x) = 0}, \ \underline{x \in C}\}$ vincoli da non "dualizzare"

$$L(x,\lambda,\mu) = f(x) + \sum_{i=1}^{p} \lambda_i g_i(x) + \sum_{j=1}^{q} \mu_j h_j(x) \qquad \Big(L : \underset{C}{\underline{\mathbb{R}^n}} \times \mathbb{R}^p \times \mathbb{R}^q \longrightarrow \mathbb{R}\Big)$$

LAGRANGIANA di (P).

$C = \mathbb{R}^n$ opp. C aperto: $\nabla_x L(x,\lambda,\mu) = 0$ SISTEMA DEI MOLTIPLICATORI DI LAGRANGE

$\lambda_i g_i(x) = 0$ COND. COMPLEMENTARITÀ

$x \in X, \lambda \in \mathbb{R}^p_+, \mu \in \mathbb{R}^q \Rightarrow L(x,\lambda,\mu) \le f(x) \quad (\lambda_i g_i(x) \le 0, \ h_j(x) = 0)$

$$x \in C \Rightarrow \begin{cases} x \in X: \ \sup\{L(x,\lambda,\mu) \mid \lambda \in \mathbb{R}^p_+, \mu \in \mathbb{R}^q\} = f(x) & (L(x,0,0) = f(x)). \\ x \notin X: \ \sup\{L(x,\lambda,\mu) \mid \lambda \in \mathbb{R}^p_+, \mu \in \mathbb{R}^q\} = +\infty & \begin{pmatrix} g_i(x) > 0 & \lambda_i \to +\infty \\ h_j(x) \gtrless 0 & \mu_j \to \pm\infty \end{pmatrix} \end{cases}$$

$(\lambda,\mu) \in \Lambda = \mathbb{R}^p_+ \times \mathbb{R}^q$

$$\phi(x) := \sup\{L(x,\lambda,\mu) \mid \lambda \in \mathbb{R}^p_+, \mu \in \mathbb{R}^q\} = \begin{cases} f(x) & \text{se } x \in X \\ +\infty & \text{se } x \notin X \end{cases}$$

$$(P) \quad \inf\{f(x) \mid x \in X\} \equiv \inf_{x \in C} \sup_{\substack{\lambda \in \mathbb{R}^p_+ \\ \mu \in \mathbb{R}^q}} L(x,\lambda,\mu) = V_P$$

PROBLEMA DUALE

$$(D) \quad \sup_{\substack{\lambda \in \mathbb{R}^p_+ \\ \mu \in \mathbb{R}^q}} \underbrace{\boxed{\inf_{x \in C} L(x,\lambda,\mu)}}_{\varphi(\lambda,\mu)} = V_D$$

Oss $L(x,\cdot,\cdot)$ lineare in λ,μ

$\Downarrow$

$\varphi(\lambda,\mu)$ concava (può assumere anche "valore" $-\infty$)

$\downarrow$

(D) è pb. "concavo"! [convesso]

teoria minimax

$\uparrow$

Nota: vale per ogni $\tau(x,z)$ con $x \in C$, $z \in \Lambda$

Teo (dualità debole) $\begin{cases} \boxdot \ x \in X, \lambda \in \mathbb{R}^p_+, \mu \in \mathbb{R}^q: \ \varphi(\lambda,\mu) \le f(x) \\ \odot \ V_D \le V_P \end{cases}$

dim Siano $x \in C, \lambda \in \mathbb{R}^p_+, \mu \in \mathbb{R}^q$:

$$\varphi(\lambda,\mu) \le L(x,\lambda,\mu) \le \overset{= f(x)}{\sup_{\substack{\lambda \in \mathbb{R}^p_+ \\ \mu \in \mathbb{R}^q}} L(x,\lambda,\mu)} \qquad (\forall \quad)$$

$$\inf_{x \in C} L(x,\lambda,\mu) \le \inf_{x \in C} \sup_{\substack{\lambda \in \mathbb{R}^p_+ \\ \mu \in \mathbb{R}^q}} L(x,\lambda,\mu) = V_P \qquad (\forall (\lambda,\mu) \in \mathbb{R}^p_+ \times \mathbb{R}^q)$$

Prendendo il sup per $\lambda \in \mathbb{R}^p_+, \mu \in \mathbb{R}^q$ si ottiene $V_D \le V_P$

<u>Esempio</u>: (PL) $\rightarrow$ $\boxed{(P)\ \max\{\langle c, x\rangle \mid Ax \le b\}}$ $\qquad A \in \mathbb{R}^{m\times n}\ b \in \mathbb{R}^m$

$$\parallel$$

$$-\min\{\langle -c, x\rangle \mid Ax \le b\}$$

$$L(x,\lambda) = -\langle c, x\rangle + \langle \lambda, Ax - b\rangle = \langle -c, x\rangle + \langle A^T\lambda, x\rangle - \langle \lambda, b\rangle$$
$$= \langle A^T\lambda - c, x\rangle - \langle \lambda, b\rangle$$

$$\varphi(\lambda) = \inf_{x\in\mathbb{R}^n} L(x,\lambda) = \begin{cases} -\infty & \text{se } A^T\lambda - c \neq 0 \\ -\langle \lambda, b\rangle & \text{se } A^T\lambda - c = 0 \end{cases}$$

$$(D) \rightsquigarrow \sup\{-\langle \lambda, b\rangle \mid A^T\lambda = c,\ \lambda \ge 0\} \equiv \boxed{\inf\{\langle \lambda, b\rangle \mid A^T\lambda = c,\ \lambda \ge 0\}}$$

<u>Conseguente dualità debole</u>

(i) $V_P = -\infty \Rightarrow \varphi(\lambda,\mu) = -\infty \quad \forall \lambda \in \mathbb{R}^p_+, \mu \in \mathbb{R}^q$

(ii) $V_D = +\infty \Rightarrow$ (P) non ammette soluzioni ammissibili $(X = \emptyset)$

(iii) $f(\bar{x}) = \varphi(\bar\lambda, \bar\mu)$, $\bar x \in X$, $\bar\lambda \in \mathbb{R}^p_+$, $\bar\mu \in \mathbb{R}^q$ $\Rightarrow \begin{cases} \bar x \text{ soluzione ottima di } (P) \\ (\bar\lambda,\bar\mu) \text{ soluzione ottima di } (D) \end{cases}$

<u>Def</u> $V_P - V_D$ si chiama GAP di DUALITÀ $\qquad$ Gap $= 0 \iff \sup\inf = \inf\sup$.

<u>DEF</u> $(\bar x, \bar\lambda, \bar\mu)$ si dice PUNTO DI SELLA di L se

(i) $\bar x \in C$, $(\bar\lambda, \bar\mu) \in M = \mathbb{R}^p_+ \times \mathbb{R}^q$

(ii) $L(\bar x, \lambda, \mu) \le L(\bar x, \bar\lambda, \bar\mu) \le L(x, \bar\lambda, \bar\mu) \qquad \forall x \in C\ \forall (\lambda,\mu) \in M$.

<u>Prop</u> $(\bar x, \bar\lambda, \bar\mu) \in C\times M$ è un punto di sella di L se e solo se

(i) $L(\bar x, \bar\lambda, \bar\mu) = \min\{L(x, \bar\lambda, \bar\mu) \mid x \in C\}$ $\quad (\bar x \in \operatorname{argmin}\{L(x,\bar\lambda,\bar\mu) \mid x \in C\})$

(ii) $g_i(\bar x) \le 0$, $h_j(\bar x) = 0$ $\quad i = 1 \dots p$, $j = 1 \dots q$ $\quad (\bar x \in X)$

(iii) $\bar\lambda_i g_i(\bar x) = 0 \quad i = 1 \dots p$

<u>dim</u> $\Rightarrow$) (i) segue immediatamente dalla def.

Se $g_i(\bar x) > 0$, allora $L(\bar x, \bar\lambda, \bar\mu) \ge L(\bar x, \lambda, \mu) \longrightarrow +\infty$ per $\lambda_i \to +\infty$

Se $h_j(x) \gtrless 0$, allora $L(\bar{x},\bar{\lambda},\bar{\mu}) \geq L(\bar{x},\lambda,\mu) \longrightarrow +\infty$ per $\mu_j \to \pm\infty$ -

da cui (ii). Grazie a (ii)

$$L(\bar{x},\bar{\lambda},\bar{\mu}) = f(\bar{x}) + \sum_{i=1}^{p} \bar{\lambda}_i g_i(\bar{x}) \geq L(\bar{x},0,\mu) = f(\bar{x}) \text{, e quindi}$$

$$\sum_{i=1}^{p} \bar{\lambda}_i g_i(\bar{x}) \geq 0 \text{ . } \lambda_i \geq 0,\ g_i(\bar{x}) \leq 0 \implies \lambda_i g_i(\bar{x}) = 0 \quad i=1 \dots p \text{ -}$$

$$\Leftarrow)\ L(\bar{x},\lambda,\mu) = f(\bar{x}) + \sum_{i=1}^{p} \lambda_i g_i(\bar{x}) + \sum_{j=1}^{q} \mu_j h_j(\bar{x}) \overset{\bar{x}\in X}{=} f(\bar{x}) + \sum_{i=1}^{p} \lambda_i g_i(\bar{x}) \overset{\substack{\lambda_i \geq 0 \\ g_i(\bar{x}) \leq 0}}{\leq} f(\bar{x})$$

$f(\bar{x}) = L(\bar{x},\bar{\lambda},\bar{\mu})$ per (i) e (ii) ∎

Teo $(\bar{x},\bar{\lambda},\bar{\mu}) \in C \times M$ è un punto di sella di L se e solo se $\bar{x}$ è soluzione ottima di (P), $(\bar{\lambda},\bar{\mu})$ è soluzione ottima di (D) e il gap di dualità è nullo.

dim $\Rightarrow$) Prop(ii) $\Rightarrow \bar{x} \in X$

$\bar{x} \in X$, $(\bar{\lambda},\bar{\mu}) \in M$ + Prop(iii) $\Rightarrow L(\bar{x},\bar{\lambda},\bar{\mu}) = f(\bar{x})$

Prop(i) $\Rightarrow L(\bar{x},\bar{\lambda},\bar{\mu}) = \varphi(\bar{\lambda},\bar{\mu})$ ⟶ tesi segue dalla conseguenza (iii) della dualità debole

$\Leftarrow$) $\bar{x} \in X$, $(\bar{\lambda},\bar{\mu}) \in M$ e $f(\bar{x}) = \varphi(\bar{\lambda},\bar{\mu})$:

$$L(\bar{x},\lambda,\mu) \leq f(\bar{x}) = \varphi(\bar{\lambda},\bar{\mu}) = \min\{L(x,\bar{\lambda},\bar{\mu}) \mid x \in C\} \leq L(x,\bar{\lambda},\bar{\mu}) \quad \forall x \in C,\ \forall (\lambda,\mu) \in M$$

$$f(\bar{x}) = \varphi(\bar{\lambda},\bar{\mu}) \leq L(\bar{x},\bar{\lambda},\bar{\mu}) = f(\bar{x}) + \sum_{i=1}^{p} \bar{\lambda}_i g_i(\bar{x}) + \sum_{j=1}^{q} \mu_j h_j(\bar{x}) =$$

$$= f(\bar{x}) + \sum_{i=1}^{p} \bar{\lambda}_i g_i(\bar{x}) \leq f(\bar{x}) \quad \text{da cui} \quad f(\bar{x}) = L(\bar{x},\bar{\lambda},\bar{\mu})$$ ∎

Sia $C = \mathbb{R}^n$.

Teo Siano f, g_i convesse per $i \in I(\bar{x}) = \{s \mid g_s(\bar{x}) = 0\}$, h_j affini e $\bar{x} \in X$ soddisfi una qualifica dei vincoli (i.e. $T(X,\bar{x}) = L_{\leq}(X,\bar{x})$). Allora $(\bar{x},\bar{\lambda},\bar{\mu}) \in X \times M$ ~~risolvono il sistema delle~~ soddisfano le condizioni KKT se e solo se $\bar{x}$ è soluzione ottima di (P), $(\bar{\lambda},\bar{\mu})$ è soluzione ottima di (D) e il gap di dualità è nullo

dim $\nabla_x L(\bar{x},\bar{\lambda},\bar{\mu}) = 0$, $\bar{x} \in X$, $\bar{\lambda}_i g_i(\bar{x}) = 0$ $i=1..p$ $\overset{L(\cdot,\bar{\lambda},\bar{\mu}) \text{ convessa}}{\Longleftrightarrow}$ $\begin{cases} \bar{x} \in \operatorname{argmin}\{L(x,\bar{\lambda},\bar{\mu}) \mid x \in X\} \\ \bar{x} \in X \\ \bar{\lambda}_i g_i(\bar{x}) = 0 \end{cases}$ $\Longleftrightarrow$ $(\bar{x},\bar{\lambda},\bar{\mu})$ punto di sella di L ∎

Teo (dualità forte) Siano $C = \mathbb{R}^n$, f, g_i convesse e h_j affini, e valga la seguente [versione della] qualifica dei vincoli di Slater: $\exists \hat{x} \in \mathbb{R}^n$ t.c. $g_i(\hat{x}) < 0$ $i=1 \dots p$ e $h_j(\hat{x}) = 0$ $j = 1 \dots q$. Allora $V_D = V_P$. Se inoltre $V_P > -\infty$, esiste soluzione ottima $(\bar{\lambda}, \bar{\mu})$ di (D). Infine $V_P = f(\bar{x})$ per qualche $\bar{x} \in X$ $\Rightarrow$ $\bar{\lambda}_i g_i(\bar{x}) = 0$ $i = 1 \dots p$.

dim $V_P = -\infty \Rightarrow V_D = -\infty$ per il teo (dualità debole). Supponiamo $V_P \in \mathbb{R}$: Per definizione il sistema $f(x) - V_P < 0$, $\underset{i=1\dots p}{g_i(x) \le 0}$, $h_j(x) = 0$ non ammette soluzione $x \in \mathbb{R}^n$, equivalentemente

$$(0,0,0) \notin S \quad \text{con } S = \left\{ (\gamma, v, w) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^p \times \mathbb{R}^q \;\middle|\; \exists x \in \mathbb{R}^n \text{ t.c. } \begin{array}{l} f(x) - V_P < \gamma \\ g_i(x) \le v_i \quad i=1\dots p \\ h_j(x) = w_j \quad j=1\dots q \end{array} \right\}$$

f, g_i convesse, h_j affini $\Rightarrow$ S convesso

Teo (sep. stretta) $\Rightarrow$ $\exists (\theta, \lambda, \mu) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^p \times \mathbb{R}^q$ non zero t.c.

$$\theta \cdot \gamma + \langle \lambda, v \rangle + \langle \mu, w \rangle \ge 0 \qquad \forall (\gamma, v, w) \in \mathrm{cl}\, S$$

$(\bar{\gamma}, \bar{v}, \bar{w}) \in S \Rightarrow (\gamma, v, \bar{w}) \in S$ $\forall \begin{array}{l}\gamma \ge \bar{\gamma} \\ v_i \ge \bar{v}_i\end{array}$ $\Rightarrow \theta \ge 0,\ \lambda \in \mathbb{R}^p_+$

(altrimenti $\theta \bar{\gamma} + \langle \lambda, \bar{v} \rangle + \langle \mu, \bar{w} \rangle \to -\infty$ per $\gamma \to +\infty$ o $v_i \to +\infty$)

Inoltre: $(f(x) - V_P, g(x), h(x)) \in \mathrm{cl}\, S$ per ogni $x \in X$ dove $g(x) = (g_1(x), \dots g_p(x))$ e $h(x) = (h_1(x), \dots, h_q(x))$.

Quindi

$$\theta (f(x) - V_P) + \langle \lambda, g(x) \rangle + \langle \mu, h(x) \rangle \ge 0 \qquad \forall x \in \mathbb{R}^n \; (*)$$

Se $\underline{\theta = 0}$, $(*)$ con $x = \hat{x}$ diventa $\langle \lambda, g(\hat{x}) \rangle \ge 0$

ma $g_i(\hat{x}) < 0$ e $\lambda_i \ge 0$ $\Rightarrow$ $\lambda_i = 0$ $i=1\dots p$, ovvero $\underline{\lambda = 0}$.

Quindi si avrebbe $\langle \mu, h(x) \rangle \ge 0$ $\forall x \in \mathbb{R}^n$ $(\times)$

h_j affini $\Rightarrow$ $h(x) = Ax - b$ con $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ e $b \in \mathbb{R}^m$ con $\mathrm{rk}\, A = m \le n$

Fissato $y \in \mathbb{R}^m$ $\quad x = A^T (AA^T)^{-1} (y + b) \Rightarrow h(x) = y$ da cui $h(\mathbb{R}^n) = \mathbb{R}^m$

($AA^T \in \mathbb{R}^{m \times m}$ def. positiva) e quindi $(\times) \Rightarrow \underline{\mu = 0}$

Pertanto $\theta > 0$ e $(*)$ diventa

$$f(x) - V_P + \langle \bar{\lambda}, g(x) \rangle + \langle \bar{\mu}, h(x) \rangle \ge 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}^n$$

dove $\bar{\lambda} = \lambda / \theta$ e $\bar{\mu} = \mu / \theta$.

In conclusione $f(x) + \langle \bar{\lambda}, g(x) \rangle + \langle \bar{\mu}, h(x) \rangle \geq v_P \quad \forall x \in \mathbb{R}^n$

e quindi $\varphi(\bar{\lambda}, \bar{\mu}) \geq v_P$, da cui $v_D \geq v_P$. Dal teo (dualità debole) segue $v_D = v_P$ ed inoltre $\varphi(\bar{\lambda}, \bar{\mu}) = v_P$, ovvero $(\bar{\lambda}, \bar{\mu})$ è soluzione ottima di (D).

Se $v_P = f(\bar{x})$, l'ottimalità di $\bar{x}$ è anch'essa conseguenza della dualità debole. ∎

Oss Se $C \subsetneq \mathbb{R}^n$, il teo (dualità forte) continua a valere purché $\exists \delta > 0$ t.c. $B(0, \delta) \subseteq h(C)$.

Esempi (i) $\min \{ x \mid x^2 \leq 0 \}$ (il gap di dualità è nullo, ma (D) non ammette soluzione ottima)

(ii) $\min \{ e^{x_2} \mid \|x\|_2 - x_1 \leq 0 \}$ ((P) e (D) ammettono soluzioni ottime ma il gap di dualità è positivo)

$$\varphi(\bar\lambda,\bar\mu) = \inf_{x\in C} L(x,\bar\lambda,\bar\mu) \qquad L(x,\lambda,\mu) = f(x) + \sum_i \lambda_i g_i(x) + \sum_j \mu_j h_j(x)$$

$$\begin{array}{c} \| \\ L(\bar x,\bar\lambda,\bar\mu) \end{array}$$

$$\varphi(\lambda,\mu) \leq f(\bar x) + \sum_i \lambda_i g_i(\bar x) + \sum_j \mu_j h_j(\bar x) =$$

$$= f(\bar x) + \sum_i \bar\lambda_i g_i(\bar x) + \sum_j \bar\mu_j h_j(\bar x) + \sum_i (\lambda_i - \bar\lambda_i) g_i(\bar x) + \sum_j (\mu_j - \bar\mu_j) h_j(\bar x)$$

$$= \varphi(\bar\lambda,\bar\mu) + \langle \lambda - \bar\lambda, g(\bar x)\rangle + \langle \mu - \bar\mu, h(\bar x)\rangle$$

$$= \varphi(\bar\lambda,\bar\mu) + \left\langle \begin{pmatrix} g(\bar x) \\ h(\bar x)\end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \lambda-\bar\lambda \\ \mu-\bar\mu\end{pmatrix}\right\rangle$$

dove $g(\bar x) = (g_1(\bar x), \dots, g_p(\bar x))$, $h(\bar x) = (h_1(x), \dots, h_q(x))$

Oss $(g(\bar x), h(\bar x)) \in \mathbb{R}^p \times \mathbb{R}^q$ è un "sopragradiente" (sotto (?)) di φ in $(\bar\lambda,\bar\mu)$

$\big((-g(\bar x), -h(\bar x))$ è un sottogradiente di $\underbrace{-\varphi}_{\text{convessa}}$ in $(\bar\lambda,\bar\mu)\big)$

SOTTOGRADIENTE PROIETTATO

$$\sup_{(\lambda,\mu)\in M} \varphi(\lambda,\mu) \qquad \left(\equiv \inf_{(\lambda,\mu)\in M} -\varphi(\lambda,\mu)\right)$$

$M = \mathbb{R}^p_+ \times \mathbb{R}^q$

Prop: C compatto $\Rightarrow$ φ Lipschitziana (su M)

dim C compatto $\Rightarrow$ $\varphi > -\infty$ su $\mathbb{R}^p \times \mathbb{R}^q$

Siano $(\hat\lambda,\hat\mu), (\bar\lambda,\bar\mu) \in M$ e $\bar x \in C$ t.c. $L(\bar x,\bar\lambda,\bar\mu) = \inf_{x\in C} L(x,\bar\lambda,\bar\mu) = \varphi(\bar\lambda,\bar\mu)$

$$\varphi(\hat\lambda,\hat\mu) - \varphi(\bar\lambda,\bar\mu) \leq L(\bar x,\hat\lambda,\hat\mu) - L(\bar x,\bar\lambda,\bar\mu) =$$

$$= \sum_{i=1}^{p} (\hat\lambda_i - \bar\lambda_i) g_i(\bar x) + \sum_{j=1}^{q} (\hat\mu_j - \bar\mu_j) h_j(\bar x) \longrightarrow$$

$$\varphi(\hat\lambda,\hat\mu)-\varphi(\bar\lambda,\bar\mu) \le \sum_{i=1}^{p} |\hat\lambda_i-\bar\lambda_i|\,|g_i(\bar x)| + \sum_{j=1}^{q} |\hat\mu_j-\bar\mu_j|\,|h_j(\bar x)|$$

$$\le \|\hat\lambda-\bar\lambda\|_1\, M' + \|\hat\mu-\bar\mu\|_1 M'' \le$$

$$\le \max\{M', M''\}\left\|\begin{pmatrix}\hat\lambda-\bar\lambda\\ \hat\mu-\bar\mu\end{pmatrix}\right\|_1$$

$g(x)=(g_1(x),\dots g_p(x))$
$h(x)=(h_1(x),\dots h_q(x))$

dove $M' = \max_{i=1..p}\left[\max_{x\in C} g_i(x)\right]$, $M''=\max_{j=1..q}\left[\max_{x\in C} h_j(x)\right]$

[redacted] $$\begin{pmatrix}\lambda^{k+1}\\ \mu^{k+1}\end{pmatrix} = P_M\left(\begin{pmatrix}\lambda^k+\alpha_k g(x^k)\\ \mu^k+\alpha_k h(x^k)\end{pmatrix}\right) \quad [*]$$

con $x^k\in \operatorname{argmin}\{L(x,\lambda^k,\mu^k) : x\in C\}$, α_k t.c. $\sum_{k=1}^{\infty}\alpha_k=+\infty$, $\sum_{k=1}^{\infty}\alpha_k^2<+\infty$

[*] $$\lambda^{k+1}=(\lambda^k+\alpha_k g(x^k))^+$$
$$\mu^{k+1}=\mu^k+\alpha_k h(x^k)$$

con $a^+=(\max\{a_1,0\},\dots,\max\{a_p,0\})$.

METODI DEI PIANI DI TAGLIO

(D) $\sup_{(\lambda,\mu)\in M}\varphi(\lambda,\mu) \rightsquigarrow (\lambda^{k+1},\mu^{k+1})\in \operatorname{argmax}_{(\lambda,\mu)\in M}\varphi_{k+1}(\lambda,\mu)$

dove $$\varphi_{k+1}(\lambda,\mu) = \min\Big\{\varphi(\lambda^\ell,\mu^\ell)+\sum_{i=1}^{p}\text{[redacted]}(\lambda_i-\lambda_i^\ell)\,g_i(x^\ell)+\sum_{j=1}^{q}(\mu_j-\mu_j^\ell)\cdot h_j(x^\ell),\ f(\hat x)\ \Big|\ \ell=0,1..k\Big\}$$

con $x^\ell\in\operatorname{argmin}\{L(x,\lambda^\ell,\mu^\ell) : x\in C\}$, $\hat x\in X$

<u>Oss</u> $\hat x\in X \Rightarrow \varphi(\lambda,\mu)\le f(\hat x)\quad \forall(\lambda,\mu)\in M$

e $\varphi_k(\lambda,\mu)\ge\varphi(\lambda,\mu)$

quindi $\varphi_k(\lambda,\mu)$ è sup.nte limitata

$$\max_{(\lambda,\mu)\in M} \varphi_K(\lambda,\mu) \equiv \left|\begin{array}{l} \max\ z \\ z \le \varphi(\lambda^\ell,\mu^\ell) + \sum_{i=1}^{p}(\lambda_i-\lambda_i^\ell)\, g_i(x^\ell) + \sum_{j=1}^{q}(\mu_j-\mu_j^\ell)\, h_j(x^\ell) \quad \ell=0,1,\dots,K-1 \\ z \le f(\hat{x}) \\ \lambda_i \ge 0 \quad i=1\dots m \end{array}\right.$$

(PL)

$$\parallel\!\!\mid$$

$$\left|\begin{array}{l} \max\ v \\ v \le \varphi(\lambda^\ell,\mu^\ell) + \sum_{i=1}^{p}\lambda_i\, g_i(x^\ell) + \sum_{j=1}^{q}\mu_j\, h_j(x^\ell) \quad \ell=0,1,\dots,K-1 \\ v \le f(\hat{x}) - \sum_{i=1}^{p}\lambda_i^\ell\, g_i(x^\ell) + \sum_{j=1}^{q}\mu_j^\ell\, h_j(x^\ell) \\ \lambda_i \ge 0 \end{array}\right.$$

Ogni punto di accumulazione di $\{(\lambda^k,\mu^k)\}$ [redacted] risolve (D).

Oss Non serve richiedere C compatto purche' $\min\{L(x,\lambda^\ell,\mu^\ell) : x\in C\}$ ammetta soluzione.

Altro metodo

$$\varphi(\lambda,\mu) = \inf\{L(x,\lambda,\mu) \mid x\in C\}$$

$$(D)\ \sup_{(\lambda,\mu)\in M} \varphi(\lambda,\mu) \equiv \begin{array}{l} \sup\ z \\ \text{s.t.} \\ z \le L(x,\lambda,\mu) \quad \forall x\in C \\ \lambda_i \ge 0 \quad i=1\dots m \end{array}$$

\# infinito di vincoli lineari

selezionare # finito di $x\in C$

$$\varphi_{K+1}(\lambda,\mu) = \min\{\inf\{L(x^\ell,\lambda,\mu) \mid \ell=0,1,\dots K\},\ f(\hat{x})\} \qquad \begin{array}{l} \sup\ z \\ \text{s.t.} \\ z \le L(x^\ell,\lambda,\mu) \quad \ell=0,1,\dots,K \\ \lambda_i \ge 0 \quad i=1\dots m \end{array}$$

(PL)

Oss ① $\varphi_{K+1}(\lambda,\mu) \ge \varphi(\lambda,\mu)$ $\forall (\lambda,\mu)\in M$

si può aggiungere il vincolo $z \le f(\hat{x})$ con $\hat{x}\in X$ per evitare che il pb approx. sia sup.nte illim.

$$x^k \in \arg\min \{ L(x, \lambda^k, \mu^k) \mid x \in C \}$$
$$(\lambda^{k+1}, \mu^{k+1}) \in \arg\max \{ \varphi_{k+1}(\lambda, \mu) \mid (\lambda, \mu) \in M \}$$

Oss $\varphi_{k+1}(\lambda, \mu) \leq L(x^k, \lambda, \mu) \quad \forall (\lambda, \mu) \in M$

Legame con punti di sella: $L(\bar{x}, \lambda, \mu) \leq L(\bar{x}, \bar{\lambda}, \bar{\mu}) \leq L(x, \bar{\lambda}, \bar{\mu})$

si alterna la minimizzazione di $L(x^k, \cdot, \cdot)$ con la massimizzazione approssimata di $L(\cdot, \lambda^k, \mu^k)$

Teo Sia $C \subseteq \mathbb{R}^n$ compatto. Allora ogni punto di accumulazione $(\bar{\lambda}, \bar{\mu})$ di $\{(\lambda^k, \mu^k)\}$ risolve (D).

dim Poiché C è compatto, considerando le opportune sottosuccessioni possiamo supporre $\lambda^k \to \bar{\lambda}$, $\mu^k \to \bar{\mu}$ e $x^k \to \bar{x}$ per un qualche $\bar{x} \in C$

$$x^k \in \arg\min \{ L(x, \lambda^k, \mu^k) \mid x \in C \}$$
$$\Downarrow$$
$$L(x^k, \lambda^k, \mu^k) \leq L(x, \lambda^k, \mu^k) \quad \forall x \in C$$
$$\Downarrow$$
$$L(\bar{x}, \bar{\lambda}, \bar{\mu}) \leq L(x, \bar{\lambda}, \bar{\mu}) \quad \forall x \in C \longrightarrow \bar{x} \in \arg\min \{ L(x, \bar{\lambda}, \bar{\mu}) \mid x \in C \} \text{ e } L(\bar{x}, \bar{\lambda}, \bar{\mu}) = \varphi(\bar{\lambda}, \bar{\mu}).$$

$$L(x^{k-1}, \lambda^k, \mu^k) \geq \varphi_k(\lambda^k, \mu^k) \geq \varphi_k(\bar{\lambda}, \bar{\mu}) \geq \varphi(\bar{\lambda}, \bar{\mu})$$
$$\downarrow$$
$$L(\bar{x}, \bar{\lambda}, \bar{\mu}) \qquad \text{da cui} \quad \lim_{k \to +\infty} \varphi_k(\lambda^k, \mu^k) = \varphi(\bar{\lambda}, \bar{\mu})$$

Inoltre $\varphi_k(\lambda^k, \mu^k) \geq \varphi(\lambda, \mu) \quad \forall (\lambda, \mu) \in M$

da cui $\varphi(\bar{\lambda}, \bar{\mu}) \geq \varphi(\lambda, \mu) \quad \forall (\lambda, \mu) \in M$ ovvero $(\bar{\lambda}, \bar{\mu})$ risolve (D) ∎