## RICERCA OPERATIVA (a.a. 2021/22)

Per ogni esercizio si individuino le risposte corrette alla domanda *a*) (attenzione: potrebbero essere più di una oppure nessuna), per gli esercizi 2-5 anche l'unica risposta corretta alle domande *b*), *c*), *d*) e si risponda alla domanda finale *e*).

**1)** La multinazionale *Pannamontata*, leader nel commercio dei gelati confezionati, decide di aprire $m$ magazzini per rifornire gli $n$ supermercati dell'*Etuscia*. La capacità di ogni magazzino può essere scelta tra $q_1$, $q_2$, $q_3$, $q_4$ e $q_5$ confezioni a seconda delle esigenze dell'azienda. Il costo di apertura di ogni magazzino $j$ è proporzionale alla capacità scelta, dove $c_j$ individua il costo per 1000 confezioni. La domanda del supermercato $i$ è stimata in $d_i$ confezioni.

Aiuta la multinazionale a pianificare la sua logistica, formulando in termini di P.L.I. il problema di decidere la capacità dei magazzini e quali supermercati assegnare a ciascun magazzino, in modo da minimizzare il costo totale di apertura nel rispetto delle capacità selezionate per soddisfare la domanda complessiva.

Scelte le famiglie di variabili

$$x_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{se il supermercato } i \text{ è assegnato al magazzino } j, \\ 0, & \text{altrimenti,} \end{cases}$$

$$y_{kj} = \begin{cases} 1, & \text{se per il magazzino } j \text{ viene scelta la capacità } q_k, \\ 0, & \text{altrimenti,} \end{cases} \qquad i = 1, \ldots, n,\ j = 1, \ldots, m, k = 1, \ldots, 5,$$

parte della formulazione è data dai vincoli riportati qua sotto:

$$\min$$

$$\sum_{j=1}^{m} x_{ij} = 1 \qquad i = 1, \ldots, n$$

$$x_{ij}, y_{kj} \in \{0, 1\} \quad i = 1, \ldots, n,\ j = 1, \ldots, m,\ k = 1, \ldots, 5$$

a) Selezionare tra le funzioni obiettivo ed i vincoli seguenti tutti quelli che permettono di completare correttamente la formulazione.

A $\sum_{j=1}^{m} \sum_{k=1}^{5} (1000c_j) y_{kj}$ (funzione obiettivo)

B $\sum_{j=1}^{m} \sum_{k=1}^{5} c_j q_k y_{kj}$ (funzione obiettivo)

C $\sum_{j=1}^{m} y_{kj} = 1 \quad k = 1, \ldots, 5$

D $\sum_{k=1}^{5} y_{kj} \geq 1 \quad j, \ldots, m$

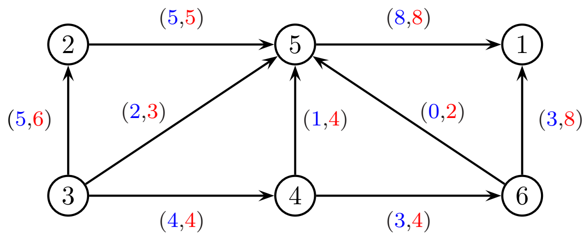
E $\sum_{k=1}^{5} y_{kj} = 1 \quad j = 1, \ldots, m$

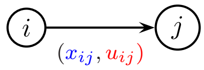
F $\sum_{i=1}^{n} d_i x_{ij} \leq \sum_{k=1}^{5} q_k y_{kj} \quad j = 1, \ldots, m$

G $\sum_{i=1}^{n} d_i x_{ij} \leq q_k y_{kj} \quad j = 1, \ldots, m,\ k = 1, \ldots, 5$

H $\sum_{i=1}^{n} d_i x_{ij} y_{kj} \leq \sum_{k=1}^{5} q_k \quad j = 1, \ldots, m$

**2)** Si consideri il problema del flusso massimo dal nodo 3 al nodo 1 sul grafo seguente:




a) Quali delle seguenti affermazioni sono corrette?

[A] Il valore del flusso riportato in figura è 11.

[B] La capacità del taglio $(\{2,3,4,5\},\{1,6\})$ è 11.

b) Quale dei seguenti è un cammino aumentante?

[I] $\{3,4,6,1\}$ [II] $\{3,5,4,6,1\}$ [III] $\{3,5,6,1\}$

c) Qual è un taglio di capacità minima?

[I] $(\{1,2,3,5\},\{4,6\})$ [II] $(\{1\},\{2,3,4,5,6\})$ [III] $(\{2,3\},\{1,4,5,6\})$

d) Aumentando la capacità dell'arco $(3,5)$ a $u_{35} = 5$, di quanto aumenta il valore del flusso massimo?

[I] 2 [II] 1 [III] 0

e) Quali capacità è sufficiente modificare (e come) affinché esista un unico taglio di capacità minima? Giustificare la risposta.

**3)** Si consideri il seguente problema di Programmazione Lineare ed il suo problema duale $(D)$:

$$
(P) \quad \begin{array}{rrcrcl}
\max & \alpha x_1 & + & \beta x_2 & & \\
 & x_1 & & & \leq & 1 \\
 & -x_1 & + & x_2 & \leq & 1 \\
 & x_1 & - & x_2 & \leq & 2 \\
 & x_1 & + & 2x_2 & \leq & 4
\end{array}
$$

a) Quali delle seguenti affermazioni sono corrette?

[A] Se $\alpha \geq 0$, allora $(P)$ è superiormente illimitato

[B] Se $\alpha = \beta = 1$, allora $\bar{x} = (1,-1)$ e $\bar{y} = (2,0,-1,0)$ soddisfano la condizione degli scarti complementari

b) Per quale famiglia di coppie di valori per $\alpha$ e $\beta$ la soluzione $\bar{x} = (1,-1)$ è ottima per $(P)$?

[I] $\alpha = \beta$ [II] nessuna [III] $\beta \leq 0,\ \alpha \geq -\beta$

c) Se $\alpha = 1$ e $\beta = 0$, qual è l'insieme di tutte le soluzioni ottime di $(P)$?

[I] $\{(1,-1)\}$ [II] $\{(1,t) : -1 \leq t \leq 3/2\}$ [III] $\{(1,3/2)\}$

d) Qual è l'insieme delle direzioni di recessione del poliedro?

[I] $\{\xi \in \mathbb{R}^2 : \xi_1 = \xi_2 \leq 0\}$ [II] $\{\xi \in \mathbb{R}^2 : \xi_1 \leq 0,\ \xi_2 = 0\}$ [III] $\{(0,0)\}$

e) Scegliere $\alpha$ e $\beta$ in modo tale che il problema duale $(D)$ risulti vuoto. Giustificare la risposta.

**4)** Si consideri la seguente coppia (asimmetrica) di problemi duali di Programmazione Lineare

$$
(P)\quad \begin{array}{rrcrcl}
\max & 2x_1 & + & 3x_2 & & \\
& 2x_1 & - & 3x_2 & \leq & 3 \\
& 5x_1 & + & 6x_2 & \leq & 3 \\
& & & x_2 & \leq & 3 \\
& x_1 & + & 3x_2 & \leq & 0 \\
& x_1 & & & \leq & 3
\end{array}
\qquad
(D)\quad \begin{array}{rrcrcrcrcrcl}
\min & 3y_1 & + & 3y_2 & + & 3y_3 & & & + & 3y_5 & & \\
& 2y_1 & + & 5y_2 & & & + & y_4 & + & y_5 & = & 2 \\
& -3y_1 & + & 6y_2 & + & y_3 & + & 3y_4 & & & = & 3 \\
& y_1, & & y_2, & & y_3, & & y_4, & & y_5 & \geq & 0
\end{array}
$$

e la loro risoluzione tramite l'algoritmo del Simplesso Duale a partire dalla base $B = \{2, 3\}$.

a) Quali delle seguenti affermazioni sono corrette?

A $x = (-3, 3)$ e $y = (0, 2/5, 3/5, 0, 0)$ sono le soluzioni di base individuate alla prima iterazione dell'algoritmo

B $\xi = (-1, 0)$ è una direzione ammissibile per $x = (1, -1/3)$ ma non di crescita per $(P)$

b) Quali sono la direzione di decrescita $d$ e il passo di spostamento $\bar\theta$ individuati alla prima iterazione dell'algoritmo?

I $d = (-1/5, 0, 0, 1, -9/5)$, $\bar\theta = 0$ II $d = (0, 1/5, 9/5, 1, 0)$, $\bar\theta = 1/3$ III $d = (0, -1/5, -9/5, 1, 0)$, $\bar\theta = 1/3$

c) Qual è la soluzione ottima di $(D)$ individuata dall'algoritmo?

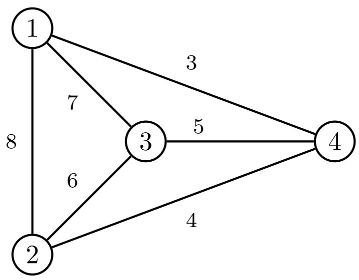
I $\bar y = (1, 0, 6, 0, 0)$ II $\bar y = (0, 1/3, 0, 1/3, 0)$ III $\bar y = (1/9, 0, 10/3, 0, 7/9)$

d) Qual è un piano di taglio (di Gomory) che esclude la soluzione ottima $\bar y$ trovata al punto precedente?

I $8y_3 + 3y_5 \geq 3$ II $5y_3 + 3y_5 \leq 3$ III $8y_3 + 3y_5 \geq 5$

e) Modificare al più un coefficiente della funzione obiettivo per il problema $(D)$ in modo tale che la soluzione ottima di $(P)$ individuata dall'algoritmo non sia più ottima. Giustificare la scelta effettuata.

**5)** Si considerino il problema del ciclo hamiltoniano di costo minimo sul seguente grafo




ed il seguente metodo "Branch and Bound": la soluzione ammissibile di partenza è ottenuta applicando l'algoritmo del nodo più vicino a partire dal nodo 1, la valutazione inferiore è ottenuta utilizzando il 1-albero di costo minimo come rilassamento, la ramificazione viene eseguita per costo crescente degli archi, e l'albero di enumerazione è visitato in ampiezza.

a) Quali delle seguenti affermazioni sono corrette?

A L'arco $(1, 3)$ appartiene al ciclo hamiltoniano individuato dall'algoritmo del nodo più vicino a partire dal nodo 1

B Il 1-albero di costo minimo nel sottoproblema in cui $x_{14} = 0$ è un ciclo hamiltoniano

b) Quali sono le valutazioni inferiore e superiore calcolate dall'algoritmo al nodo radice?

I $v_I = 18, v_S = 24$ II $v_I = 21, v_S = 24$ III $v_I = 19, v_S = 20$

c) Quanti nodi vengono chiusi alla prima ramificazione e per quale motivo?

- I 1 per ammissibilità
- II nessuno
- III 1 per inammissibilità

d) Su quante e quali variabili l'algoritmo ramifica prima di terminare?

- I 2: $x_{14}$, $x_{24}$
- II 3: $x_{14}$, $x_{24}$, $x_{34}$
- III 4: $x_{14}$, $x_{24}$, $x_{34}$, $x_{23}$

e) Modificare il costo di 1 solo arco in modo tale che l'algoritmo termini alla radice. Giustificare la scelta effettuata.