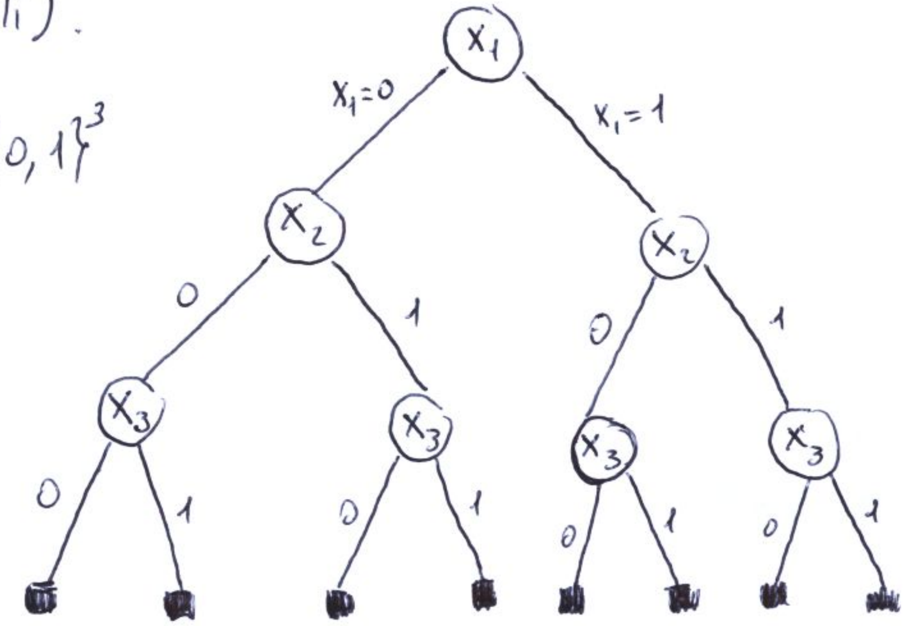
METODI ENUMERATIVI

- Idonei per i problemi di programmazione lineare intera con numero finito di soluzioni, in particolare i problemi con variabili binarie $x_i \in \{0,1\}$ $i=1....n$

- Basati sull'albero di enumerazione totale; albero radicato in cui i nodi di un dato livello identificano una variabile e gli archi che portano al livello successivo i possibili valori della variabile. Le foglie dell'albero individuano univocamente tutte le possibili soluzioni (incluse quelle non ammissibili).

$x \in \{0,1\}^3$



Ogni nodo individua un sottoproblema in cui i valori di alcune variabili sono stati fissati. $\overset{|||}{}$ (sottoalbero)

Idea base dei metodi BRANCH AND BOUND: esplorare l'albero, chiudendo/potando quei rami che conducono a foglie che individuano soluzioni non ammissibili o soluzioni ammissibili peggiori/non-migliori della migliore soluzione ammissibile disponibile (≡ soluzione corrente). Tramite l'esplorazione diretta o indiretta (≡potatura rami) di tutte le possibili...

soluzioni si individua quella ottima.

Poiché ciascun sottoproblema è analogo a quello di partenza (ma con meno variabili) serve conoscere una stima della qualità delle soluzioni del sottoproblema che sia più facilmente calcolabile. A questo scopo si considerano opportuni <u>rilassamenti</u> del problema, cioè problemi che contengano tutte le soluzioni ammissibili del (sotto)problema più altre e la cui soluzione ottima sia ottenibile tramite algoritmi noti.

Uno specifico metodo "branch and bound" richiede:

(1) una soluzione ammissibile di partenza
(2) un rilassamento del problema
(3) regole di ramificazione
(4) regole di potatura

(1) Una soluzione ammissibile (possibilmente di "buona qualità") può essere trovata tramite una tecnica euristica, in genere specifica per il problema in considerazione

(3) L'albero di enumerazione totale viene costruito dinamicamente scegliendo ad ogni passo su quale variabile "ramificare"

Ci sono regole standard per potare un albero ad un certo ramo:

(a) il sottoalbero non contiene soluzioni ammissibili

(b) la soluzione ottima del rilassamento (completata con le variabili i cui valori sono già stati fissati) è ammissibile per il problema di partenza.

(c) il valore ottimo del rilassamento è peggiore/non-migliore del valore della soluzione ammissibile corrente.

Il caso (a) è ovvio. Nel caso (b) la soluzione ottima del rilassamento è la migliore soluzione ammissibile per il problema originale in tutto il sottoalbero considerato, quindi è inutile proseguire l'esplorazione di quel sottoalbero. Qualore fosse anche migliore della soluzione ammissibile corrente, si sostituisce quest'ultima con la soluzione trovata. Nel caso (c) nessuna soluzione ammissibile può essere migliore della soluzione corrente, quindi l'esplorazione del sottoalbero può terminare.

Oss Nei problemi di massimizzazione (minimizzazione) il valore della soluzione corrente costituisce una valutazione inferiore (superiore) del valore ottimo ed il valore della soluzione ottima di un rilassamento [completata con le variabili di valore fissato] costituisce una valutazione superiore (inferiore).

PROBLEMA DELLO ZAINO

$$\begin{aligned} \max\ & c_1x_1 + \dots + c_nx_n \\ & a_1x_1 + \dots + a_nx_n \le b \\ & x_1, \dots, x_n \in \{0,1\} \end{aligned}$$

con $\underset{\text{benefici}}{c_i} > 0,\ \overset{\text{pesi}}{a_i} > 0,\ \overset{\text{capacità}}{b} > 0$.

$\sum_{i=1}^{n} a_i > b$, $a_i \le b$

Rilassamento continuo I

$$\begin{aligned} \max\ & c_1x_1 + \dots + c_nx_n \\ & a_1x_1 + \dots + a_nx_n \le b \\ & x_1, \dots, x_n \ge 0 \end{aligned} \xrightarrow{\text{dualità (simmetrica)}} \begin{aligned} \min\ & yb \\ & y \ge c_1/a_1 \\ & \vdots \\ & y \ge c_n/a_n \\ & y \ge 0 \end{aligned}$$

$b>0 \Rightarrow \bar{y} = \max\{c_i/a_i : i=1\dots n\} = c_k/a_k$ con $k\in\{1,\dots,n\}$

è soluzione ottimo del pb duale e conseguentemente $\bar{x}$ con

$$\bar{x}_i = \begin{cases} b_i/a_i & i=k \\ 0 & i\neq k \end{cases}$$ è soluzione ottima del rilassamento continuo

c_i/a_i = beneficio-unitario/rendimento (dell'oggetto i)

Tecnica euristica dei rendimenti decrescenti

Riordinando le variabili, supponiamo $c_1/a_1 \geq c_2/a_2 \geq \dots \geq c_n/a_n$ e inseriamo gli oggetti nello zaino in ordine decrescente di rendimento escludendo quelli che causerebbero uno "sforamento" della capacità. La soluzione ammissibile risultante $\hat{x}\in\{0,1\}^n$ è caratterizzata dalle seguenti proprietà:

$$\text{(RD)} \qquad \begin{aligned} &\hat{x}_1 = 1 \\ &\hat{x}_j = 1 \iff b - \sum_{i=1}^{j-1} a_i\hat{x}_i \geq a_j \qquad j\geq 2 \end{aligned}$$

Analoghe tecniche euristiche di tipo "greedy" sui benefici (decrescenti) oppure sui pesi (crescenti) → non sono legate a rilassamenti ma in alcuni casi possono fornire soluzioni migliori

Rilassamento continuo II

$$\begin{aligned} \max\ & c_1x_1+\dots+c_nx_n \\ & a_1x_1+\dots+a_nx_n \leq b \\ & 0\leq x_i\leq 1 \quad i=1\dots n \end{aligned}$$

costituisce un "miglior" rilassamento continuo (in quanto la regione ammissibile è più piccola)

Supponendo $c_1/a_1 \geq c_2/a_n \geq \dots \geq c_n/a_n$ la soluzione ottima è data da $\bar{x}$ con

$$\bar{x}_i = \begin{cases} 1 & \text{se } i<h \\ \dfrac{b-\sum_{i=1}^{h} a_i}{a_h} & \text{se } i=h+1 \\ 0 & \text{se } i>h+1 \end{cases} \qquad (RC_2)$$

dove $h \in \{1,\dots,n-1\}$ è tale che $\sum_{i=1}^{h} a_i \leq b$ e $\sum_{i=1}^{h+1} a_i > b$

Posto $z_i = a_i x_i$, si ottiene $\bar{z}_i = \begin{cases} a_i & \text{se } i<h \\ b-\sum_{i=1}^{h} a_i & \text{se } i=h+1 \\ 0 & \text{se } i>h+1 \end{cases}$ e il rilassamento continuo assume la forma

$$\begin{aligned} &\max\ c_1/a_1\, z_1 + \dots + c_n/a_n\, z_n \\ &z_1 + \dots + z_n \leq b \\ &0 \leq z_i \leq a_i \quad i=1\dots n \end{aligned} \quad \xrightarrow[\text{matriciale}]{\text{forma}} \quad \begin{aligned} &\max\ \hat{c}\cdot z \\ &\hat{A} z \leq \hat{b} \\ &z \geq 0 \end{aligned} \qquad \begin{aligned} &\hat{c} \in \mathbb{R}^n \\ &\hat{A} \in \mathbb{R}^{(n+1)\times n} \\ &\hat{b} \in \mathbb{R}^{n+1} \end{aligned}$$

con $\hat{c}_i = c_i/a_i$, $\hat{A} = \begin{bmatrix} 1 \dots\dots 1 \\ I \end{bmatrix}$, $\hat{b} = \begin{pmatrix} b \\ a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}$

il cui duale (simmetrico) risulta essere

$$\begin{aligned} &\min\ w\hat{b} \\ &w\hat{A} \geq \hat{c} \\ &w \geq 0 \end{aligned} \quad \xrightarrow{w=(y,v)\in\mathbb{R}\times\mathbb{R}^n} \quad \begin{aligned} &\min\ yb + \sum_{i=1}^{n} a_i v_i \\ &y + v_i \geq c_i/a_i \quad i=1\dots n \\ &y \geq 0,\ v_i \geq 0 \quad i=1\dots n \end{aligned}$$

Le condizioni degli scarti complementari (in forma simmetrica) sono pertanto

$$\begin{aligned} &w(\hat{b}-\hat{A}z)=0 \\ &(w\hat{A}-\hat{c})z=0 \end{aligned} \quad \longleftrightarrow \quad \begin{aligned} &y(z_1+\dots+z_n-b)=0 && (1) \\ &v_i(a_i-z_i)=0 && (2) \\ &(y+v_i-c_i/a_i)z_i=0 && (3) \end{aligned}$$

Per dimostrare l'ottimalità di $\bar{z}$ (e quindi di $\bar{x}$) bisogna trovare $\bar{w} = (\bar{y}, \bar{v})$ ammissibile per il pb duale tale che $\bar{z}$ e $\bar{w}$ soddisfino (1), (2), (3):

$\bar{z}_1 + \dots + \bar{z}_n = b \Rightarrow$ (1) è verificata

$\bar{z}_i < a_i \quad i \geq h+1 \Rightarrow$ (2) è verificata se $\boxed{\bar{v}_{h+1} = \dots = \bar{v}_n = 0}$

$\bar{z}_i > 0 \quad i \leq h \Rightarrow$ (3) è verificata se $\boxed{\bar{v}_i = c_i/a_i - \bar{y} \quad i = 1 \dots h}$

Un tale $(\bar{y}, \bar{v})$ è ammissibile se e solo se $\boxed{\frac{c_{h+1}}{a_{h+1}} \leq \bar{y} \leq \frac{c_h}{a_h}}$

Infatti: $\bar{y} \leq \frac{c_h}{a_h} \Rightarrow \bar{y} \leq c_i/a_i \quad i \leq h \Rightarrow \bar{v}_i \geq 0 \quad i \leq h$

$\bar{y} \geq \frac{c_{h+1}}{a_{h+1}} \Rightarrow \bar{y} + \bar{v}_i - c_i/a_i = \bar{y} - c_i/a_i \geq \frac{c_{h+1}}{a_{h+1}} - c_i/a_i \geq 0 \quad i \geq h+1$

mentre $\bar{y} + \bar{v}_i - c_i/a_i = 0$ per $i = 1 \dots h$

BRANCH AND BOUND PER ZAINO

Soluzione ammissibile (iniziale): $\hat{x}$ data da (RD)
(in alternativa trovata tramite altre tecniche "greedy")

Rilassamento: rilassamento continuo II la cui soluzione ottima è $\bar{x}$ data da (RC_2)
(per i sottoproblemi [redacted] formula [redacted] analoga dopo aver eliminato le variabili i cui valori sono già stati fissati)

Possibili regole di ramificazione:

- variabile con valore frazionario nella soluzione ottima del rilassamento cont.
- Variabile con il miglior rendimento (opp. beneficio/peso)
- Variabile con il peggior rendimento (opp. beneficio/peso) ..

Esempio:

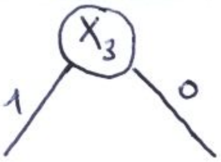
$$\max \ 11x_1 + 23x_2 + 18x_3 + 6x_4$$
$$7x_1 + 6x_2 + 3x_3 + 2x_4 \leq 8$$
$$x_i \in \{0,1\}$$

I rendimenti sono $11/7, 23/6, 6, 3$; quindi l'ordinamento delle variabili per rendimenti decrescenti è x_3, x_2, x_4, x_1.

Soluzione ammissibile: $\hat{x} = (0,0,1,1) \rightarrow c\hat{x} = 24$

Soluzione ottima rilassamento: $\bar{x} = (0, 5/6, 1, 0) \rightarrow c\bar{x} = 37 + 1/6$
(si veda (RC_2))

Ramifichiamo su x_3 (variabile con il miglior rendimento):



$\boxed{X_3 = 0}$ sol.ne ottima rilassamento: $\bar{x} = (0,1,0,1)$ con $c\bar{x} = 29$

$\bar{x}$ ammissibile $\Rightarrow$ POTARE e porre sol.ne ammissibile corrente $\hat{x} = \bar{x}$

$\boxed{X_3 = 1}$ sol.ne ottima rilassamento: $\bar{x} = (0, 5/6, 1, 0) \rightarrow c\bar{x} = 37 + 1/6 > c\hat{x} = 29$

Ramifichiamo su x_2 (variabile con il secondo miglior rendimento):

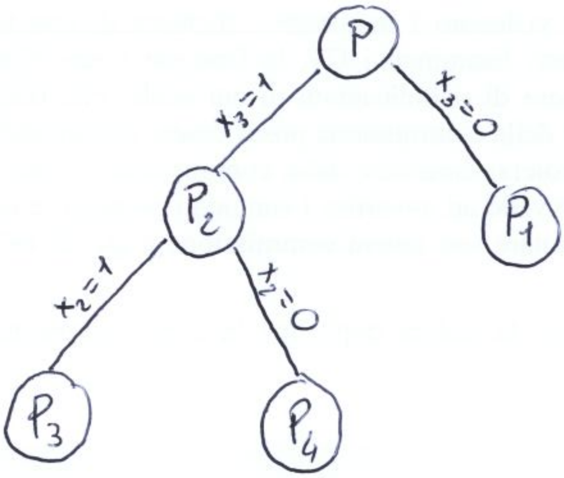
$\boxed{X_2 = 1}$ Nel sottoalbero non ci sono soluzioni ammissibili $\Rightarrow$ POTARE

$\boxed{x_2 = 0}$ sol.ne ottima rilassamento : $\bar{x} = (3/7, 0, 1, 1) \rightarrow c\bar{x} = 26 + 5/7$

Poiche' $c\bar{x} < c\hat{x} = 29$, nel sottoalbero non ci possono essere soluzioni ammissibili migliori di $\hat{x}$ (26 è il massimo valore che potrebbero avere!). Quindi si può potare e l'albero è "chiuso". Tutte le sol.ni (= foglie) sono state "visitate" implicitamente.

$\hat{x} = (0,1,0,1)$ è soluzione ottima del problema.

L'esecuzione dell'algoritmo può essere sintetizzata dalla porzione di albero visitata



e dalla tabella

valutazione inferiore

valutazione superiore (parte intera ↑ tutti i benefici sono interi)

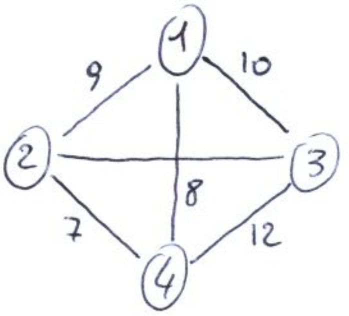
	sol.ne corrente	V_I	ottimo rilassamento	V_S	potatura
P	(0 0 1 1)	24	(0 5/6 1 0)	37	—
P_1	(0 0 1 1)	24	(0 1 0 1)	29	SI (ammissibilità)
P_2	(0 1 0 1)	29	(0 5/6 1 0)	37	NO ($V_S > V_I$)
P_3	(0 1 0 1)	29	$\emptyset$	-	SI (inammissibilità)
P_4	(0 1 0 1)	29	(3/7 0 1 1)	26	SI ($V_S < V_I$.)

PB COMMESSO VIAGGIATORE (TSP = Traveling Salesman Problem)

Un commesso viaggiatore vuole visitare n città (tornando alla fine alla città di partenza) minimizzando il percorso complessivo. Se le distanze tra le città soddisfano la disuguaglianza triangolare, la soluzione ottima passa 1 sola volta per ogni città.

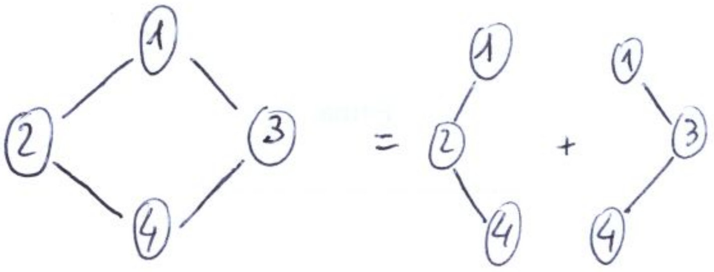
Matematicamente si può astrarre il seguente problema: dato un grafo non orientato con un costo su ciascun arco, trovare il ciclo hamiltoniano di costo minimo.
↖(distanza tra i 2 nodi incidenti i e j : d_{ij})

ciclo hamiltoniano = ciclo che passa per ogni nodo esattamente 1 volta
(toccando tutti i nodi del grafo)

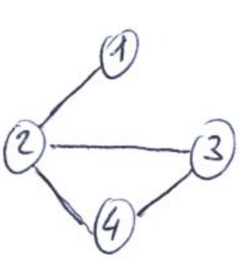


Scelto un nodo k, un ciclo hamiltoniano è un albero di copertura per il grafo privato di k e di tutti gli archi incidenti in k. Inoltre in k nel ciclo hamiltoniano incidono 2 archi (k ha grado 2).

k - albero = albero di copertura per il sottografo ottenuto rimuovendo k
e gli archi incidenti in k più 2 archi incidenti in k



ciclo hamiltoniano



3 - albero

Ogni ciclo hamiltoniano è un k - albero, ma non viceversa

Prop ciclo hamiltoniano = k - albero in cui ogni nodo ha grado 2 (cioè 2 archi incidenti)

BRANCH AND BOOND PER TSP simmetrico

Supponiamo che il grafo sia completo (TSP simmetrico), cioè esista l'arco (i,j) per ogni coppia di nodi i e j.

Poiché un ciclo hamiltoniano è un insieme di archi, si possono considerare le variabili binarie

$$x_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{se } (i,j) \text{ appartiene al ciclo hamiltoniano} \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases} \qquad (\text{con } i<j)$$

per costruire l'albero di enumerazione totale.

Tecnica euristica del "nodo più vicino"

Poiché il grafo è completo, ogni permutazione dei nodi individua un ciclo hamiltoniano. A partire da un qualsiasi nodo dato, una permutazione si ottiene visitando i nodi in una sequenza tale che il nodo che viene visitato sia, tra quelli non ancora visitati, quello a minor distanza dall'ultimo nodo visitato: $V=\{i_1, i_2, \dots, i_k\}$ insieme dei nodi già visitati (in ordine di visita)

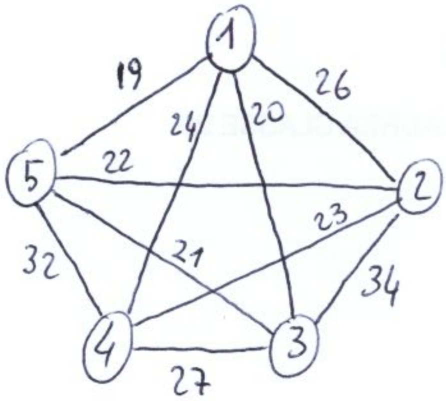
i_{k+1} soddisfa
- $i_{k+1} \notin V$
- $d_{i_k i_{k+1}} = \min\{d_{i_k j} : j \notin V\}$.

La soluzione ammissibile iniziale viene individuata tramite questa tecnica "greedy" del nodo più vicino

<u>Rilassamento</u>: k-albero di costo minimo

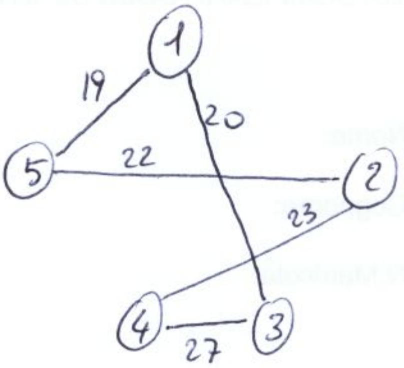
Può essere individuato risolvendo il problema dell'albero di copertura di costo minimo sul sottografo ottenuto rimuovendo K e gli archi incidenti in K e aggiungendo a tale albero i due archi di costo minimo incidenti in K.

Esempio



soluzione ammissibile iniziale:
(algoritmo nodo più vicino a partire da 2)

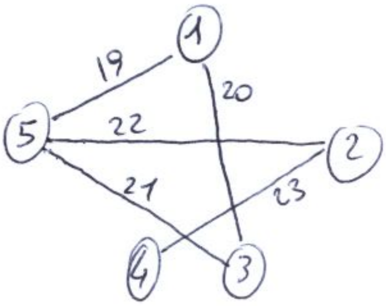
$(CH)_0$



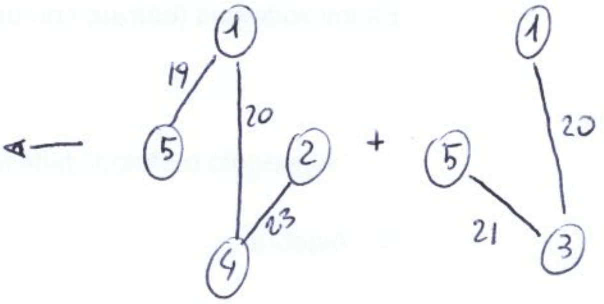
costo = 111
$\uparrow$
$V_S = 111$
$\nearrow$
valutazione superiore

Rilassamento = 3-albero di costo minimo

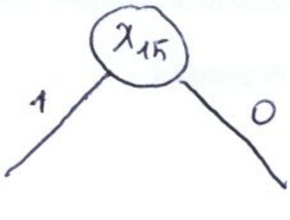
$(3A)_0$



costo = 105

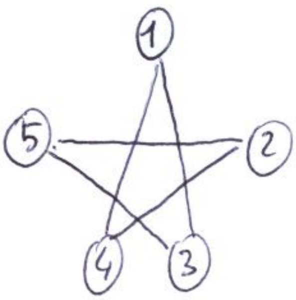


Ramifichiamo su x_{15} (arco di costo minore)



$\boxed{x_{15} = 0}$ 3-albero di costo minimo

$(CH)_1$

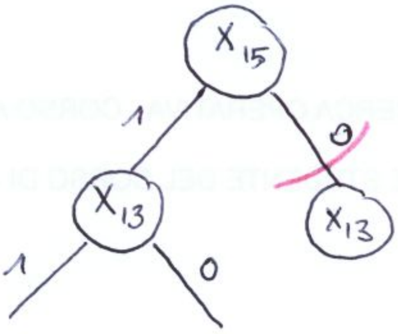


costo = 110

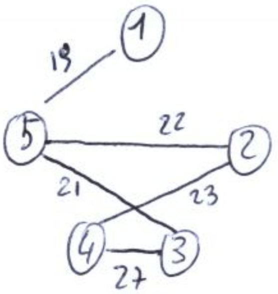
È anche un ciclo hamiltoniano => POTARE e selezionare come soluzione corrente con $V_S = 110$

$\boxed{X_{15} = 1}$ $(3A)_0$ è 3-albero di costo minimo (di costo $105 < v_s$)

Ramifichiamo su x_{13} (arco con il secondo miglior costo)



$\boxed{X_{13} = 0}$ 3-albero di costo minimo

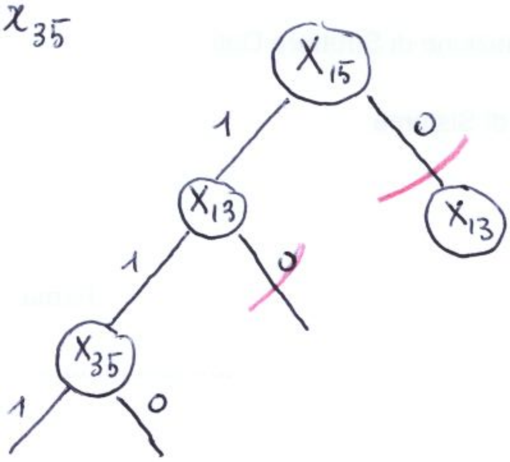


costo = 112

Poiché $112 > v_s$, nel sottoalbero non ci possono essere cicli hamiltoniani migliori di $(CH)_1$, quindi si può potare il ramo.

$\boxed{X_{13} = 1}$ $(3A)_0$ è 3-albero di costo minimo (di costo $105 < v_s$)

Ramifichiamo su x_{35}

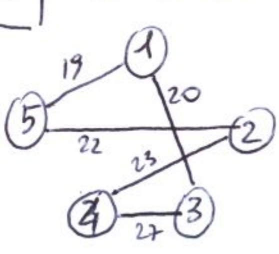


$\boxed{X_{35} = 1}$ Nel sottoalbero non ci sono cicli hamiltoniani: il nodo 5 ha grado 3

⇓

POTARE

$\boxed{X_{35} = 0}$ 3-albero di costo minimo



costo = 111 ↗ È un ciclo hamiltoniano con costo $111 > v_s$, quindi si può potare e l'albero è chiuso.

$(CH)_1$ è il ciclo hamiltoniano di costo minimo