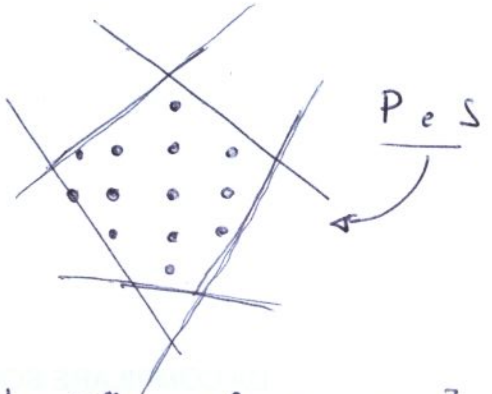
PROGRAMMAZIONE LINEARE INTERA

Problemi:



$$(P_I) \quad \max\ c \cdot x \qquad Ax \leq b \qquad x \in \mathbb{Z}^n$$

$$(D_I) \quad \min\ y \cdot b \qquad yA = c \qquad y \in \mathbb{Z}^m_+$$

$P = \{x \in \mathbb{R}^n : Ax \leq b\}$ poliedro

$S = P \cap \mathbb{Z}^n$ regione ammissibile

$Q = \{y \in \mathbb{R}^m_+ : yA = c,\ y \geq 0\}$

$T = Q \cap \mathbb{Z}^m$ regione ammissibile

(Oss $Q = \left\{y \in \mathbb{R}^m : \begin{pmatrix} A^T \\ -A^T \\ I \end{pmatrix} y \leq \begin{pmatrix} c \\ -c \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$)

RILASSAMENTO CONTINUO

$$(RC_P) \quad \max\ c \cdot x \qquad Ax \leq b$$

$$(RC_D) \quad \min\ y \cdot b \qquad yA = c \qquad y \geq 0$$

Se $\bar{x} \in P$ sol.ne ottima di (RC_P) è a componenti intere (cioè $x \in S$), allora $\bar{x}$ è sol.ne ottima di (P_I) (analogamente con (RC_D)).

Questa situazione accade sicuramente qualora tutti i vertici di P siano a componenti intere (Proprietà dell'interezza)

$\overset{|||}{\text{(sol.ne di base ammissibili)}}$

A = matrice di incidenza nodi/archi di un grafo + c a componenti intere $\Rightarrow$ Q ha la proprietà dell'interezza

ARROTONDAMENTO INTERO

Se la sol.ne ottima $\bar{x} \in P$ di (RC_P) ha componenti frazionarie, allora un opportuno arrotondamento intero (parte intera inf./sup.) delle componenti frazionarie fornisce una sol.ne ottima di (P)

$\downarrow$

FALSO !!!

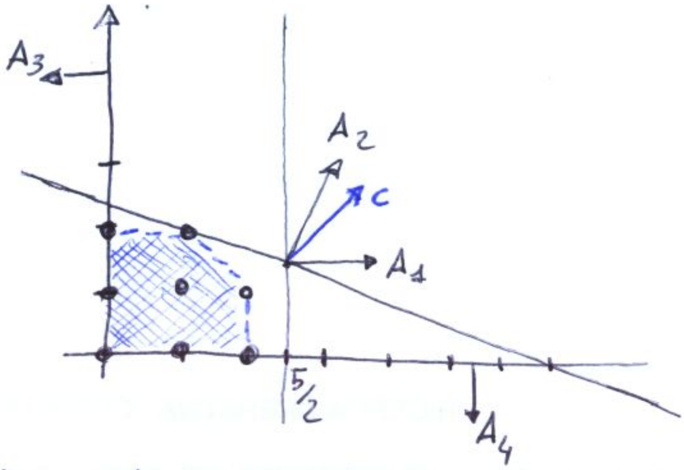
$\max \; x_1 + 2x_2$

$x_1 \leq 5/2$

$x_1 + 3x_2 \leq 7$

$x_1 \geq 0, \; x_2 \geq 0$

$x_1, x_2 \in \mathbb{Z}$



$(5/2, 3/2)$ è la sol.ne ottima del rilassamento continuo

$(1, 2)$ è la sol.ne ottima del problema $\left(1 \notin \{\lfloor 5/2 \rfloor, \lceil 5/2 \rceil\}\right)$.

CONVESSIFICAZIONE RETICOLO INTERO

$\operatorname{conv} S = \left\{ \sum_{i=1}^{n+1} \lambda_i x^i \; : \; \lambda_i \geq 0, \; \sum_{i=1}^{n+1} \lambda_i = 1, \; x^i \in S \right\}$ si dice

INVOLUCRO (o INVILUPPO) CONVESSO di S

$$\operatorname{conv} S = \bigcap_{\substack{A \supseteq S \\ A \text{ convesso}}} A$$

conv S può non essere un poliedro!

$P = \{x \in \mathbb{R}^2_+ \; : \; x_2 \geq \sqrt{2}\, x_1\}$ $\qquad \operatorname{conv} S = \{x \in \mathbb{R}^2_+ \; : \; x_2 > \sqrt{2}\, x_1\} \subsetneq P$

S finito oppure A e b a componenti intere $\Rightarrow$ conv S è un poliedro con la proprietà dell'interezza e pertanto

$$\max_{x \in S} c \cdot x \equiv \max_{x \in \operatorname{conv} S} c \cdot x$$

Ma caratterizzare conv S tramite vincoli espliciti è estremamente difficile

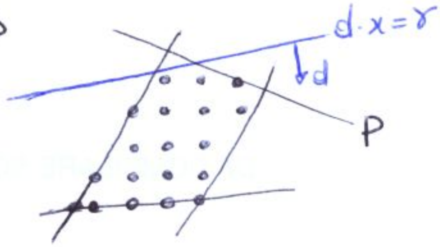
(la caratterizzazione è nota solo in pochi casi)

DISUGUAGLIANZE VALIDE

$d \in \mathbb{R}^n$, $\gamma \in \mathbb{R}$

$d \cdot x \geq \gamma$ si dice DISUGUAGLIANZA VALIDA per S se $d \cdot x \geq \gamma \ \forall x \in S$

ovvero $\{x \in \mathbb{R}^n : Ax \leq b,\ d \cdot x \geq \gamma\} \cap \mathbb{Z}^n = S$



PIANI DI TAGLIO

Sia $\bar{x} \notin S$ una sol.ne ottima del rilassamento continuo (RC_P).

Una disuguaglianza valida $d \cdot x \geq \gamma$ si dice PIANO DI TAGLIO se

$$d \cdot \bar{x} < \gamma$$

(ovvero se $\{x \in \mathbb{R}^n : Ax \leq b,\ d \cdot x \geq \gamma\} \supseteq S$ approssima S meglio di P
e "taglia" fuori la sol.ne ottima del relativo rilassamento)

PIANI DI TAGLIO DI GOMORY

Si costruiscono per il problema nella forma (D_I) $\begin{cases} \min\ y \cdot b \\ yA = c \\ y \in \mathbb{Z}^m_+ \end{cases}$ con $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$, $m \geq n$

Sia $\bar{y} = (cA_B^{-1}, 0)$ una sol.ne ottima (di base)
del rilassamento continuo (RC_D) e supponiamo $\bar{y}_r \notin \mathbb{Z}$ $(r \in B)$
(se tale r non esistesse $\bar{y}$ sarebbe sol.ne ottima di (D_I)).

Sia $\tilde{A} = A_N A_B^{-1} \in \mathbb{R}^{(m-n) \times n}$ (si numerino le righe con gli indici di N
e le colonne con gli indici di B)

Prop: $\sum_{j \in N} \{\tilde{A}_{jr}\} y_j \geq \{\bar{y}_r\}$ è un piano di taglio (per $\bar{y}$)

dove $\{\cdot\}$ denota la parte frazionaria

$(\{3.7\} = 0.7,\ \{-3.7\} = 0.3)$

dim $\bar{y}$ non soddisfa la disuguaglianza ($\bar{y}_j = 0$ per $j \in N$):

$$\sum_{j\in N} \{\tilde{A}_{jr}\}\bar{y}_j = 0 < \{\bar{y}_r\} \qquad (\bar{y}_r \notin \mathbb{Z} \Rightarrow \{\bar{y}_r\} > 0)$$

La disuguaglianza è valida: sia $y \in Q \cap \mathbb{Z}^m$

$$y_B A_B + y_N A_N = c \;\rightarrow\; y_B = (c - y_N A_N) A_B^{-1} = c A_B^{-1} - y_N A_N A_B^{-1} = \bar{y}_B - y_N \underbrace{A_N A_B^{-1}}_{\tilde{A}}$$

da cui $y_r = \bar{y}_r - \sum_{j\in N} \{\tilde{A}_{jr}\} y_j = [\bar{y}_r] + \{\bar{y}_r\} - \sum_{j \in N} ([\tilde{A}_{jr}] + \{\tilde{A}_{jr}\}) y_j$

(dove $[\cdot]$ denota la parte intera)

$$-\{\bar{y}_r\} + \sum_{j\in N} \{\tilde{A}_{jr}\} y_j = [\bar{y}_r] - y_r - \sum_{j \in N} [\tilde{A}_{jr}] y_j \in \mathbb{Z}$$

$\in \mathbb{Z}$

$\{\tilde{A}_{jr}\}, y_j \geq 0 \Rightarrow -\{\bar{y}_r\} + \sum_{j\in N} \{\tilde{A}_{jr}\} y_j \geq -\{\bar{y}_r\} > -1$

Poiché $-\{\bar{y}_r\} + \sum_{j \in N} \{\tilde{A}_{jr}\} y_j \in \mathbb{Z}$, risulta $-\{\bar{y}_r\} + \sum_{j\in N} \{\tilde{A}_{jr}\} y_j \geq 0$

ovvero $\sum_{j \in N} \{\tilde{A}_{jr}\} y_j \geq \{\bar{y}_r\}$ e y soddisfa la disuguaglianza ∎

Se $\bar{y} \cdot b \notin \mathbb{Z}$, si può dimostrare analogamente che

$$\sum_{j \in N} \{b_j - A_j A_B^{-1} b_B\} y_j \geq \{\bar{y} \cdot b\} \text{ è un piano di taglio}$$

(si utilizza che $y \cdot b = y_B b_B + y_N b_N = \bar{y} \cdot b + y_N (b_N - A_N A_B^{-1} b_B)$)

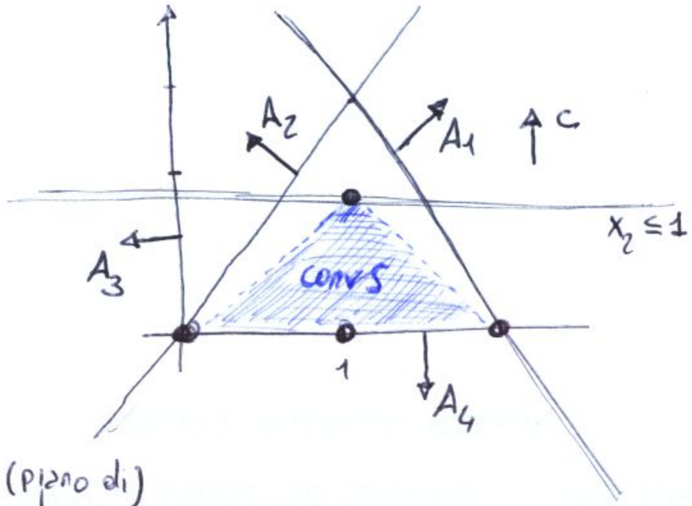
$\boxed{\text{Algoritmo di Gomory}}$ 1958-1963

1) Calcolare $\bar{y}$ sol.ne ottima di base di $\min\{y \cdot b : y \in Q\}$
2) Se $\bar{y} \in \mathbb{Z}^m$, STOP
3) Costruire <u>un</u> piano di taglio $d \cdot x \geq \gamma$ relativo a $\bar{y}$
4) $Q = Q \cap \{x \in \mathbb{R}^n : d \cdot x \geq \gamma\}$ e ritornare a 1)

l'algoritmo termina # finito di iterazioni se i piani sono scelti con opportune regole

Esempio:

$$\max\ x_2$$
$$3x_1 + 2x_2 \le 6$$
$$-3x_1 + 2x_2 \le 0$$
$$x_1, x_2 \in \mathbb{Z}^2_+$$



$$\max\ x_2$$
$$3x_1 + 2x_2 \le 6$$
$$-3x_1 + 2x_2 \le 0$$
$$-x_1 \le 0$$
$$-x_2 \le 0$$
$$\Downarrow$$
$$B = \{1, 2\}$$
$$\bar{x} = (1, 3/2) \text{ sol.ne ottima}$$

Per individuare un (piano di) taglio di Gomory bisogna portare il pb in forma duale:

$x_1 = y_1$, $x_2 = y_2$ + y_3, y_4 variabili di scarto

$$-\min\ -y_2$$
$$3y_1 + 2y_2 + y_3 = 6$$
$$-3y_1 + 2y_2 + y_4 = 0$$
$$y_1, y_2, y_3, y_4 \in \mathbb{Z}_+$$

$$c = (6, 0) \quad \rightarrow \quad A = \begin{bmatrix} 3 & -3 \\ 2 & 2 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad b = \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$B = \{1, 2\}$ $\bar{y} = (1, 3/2, 0, 0)$ sol.ne ottima di base $\rightarrow r = 2$

$$A_B = \begin{bmatrix} 3 & -3 \\ 2 & 2 \end{bmatrix} \quad A_B^{-1} = \frac{1}{12}\begin{bmatrix} 2 & 3 \\ -2 & 3 \end{bmatrix} \quad \tilde{A} = A_N A_B^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1/6 & 1/4 \\ -1/6 & 1/4 \end{bmatrix} = \begin{array}{c} \begin{array}{cc} 1 & 2 \end{array} \\ \begin{bmatrix} 1/6 & 1/4 \\ -1/6 & 1/4 \end{bmatrix} \end{array} \begin{array}{c} 3 \\ 4 \end{array}$$

Piano di taglio di Gomory: $\frac{1}{4} y_3 + \frac{1}{4} y_4 \ge \{\frac{3}{2}\} = \frac{1}{2} \rightarrow y_3 + y_4 \ge 2$

$$y_3 = 6 - 3y_1 - 2y_2 = 6 - 3x_1 - 2x_2$$
$$y_4 = 3y_1 - 2y_2 = 3x_1 - 2x_2$$

$$: \quad y_3 + y_4 \ge 2 \iff 6 - 4x_2 \ge 2 \iff x_2 \le 1$$